Riv. Mat. Univ. Parma (4) **11** (1985), 223-228

S. PELLEGRINI MANARA (*)

Sui quasi-anelli mediali in cui ogni elemento è potenza di se stesso (**)

1 - Introduzione

I quasi-anelli N in cui $x_1x_2x_3 = x_2x_1x_3$ $\forall x_1, x_2, x_3 \in N$ sono stati studiati da vari autori; in [**6**] vengono chiamati quasi-anelli debolmente commutativi. Ligh in [**5**] ha classificato i quasi-anelli debolmente commutativi e di Boole e Subrahmanyam in [**7**] ha individuato proprietà reticolari di quasi-anelli debolmente commutativi e di Boole. Il lavoro che qui presentiamo inizia lo studio dei quasi-anelli N con proprietà mediale: $\forall x, y, z, t \in N$ $xyzt = xzyt$. I gruppoidi e i quasi-gruppi mediali sono stati ampiamente studiati ed hanno dato luogo a numerose applicazioni geometriche. Nei quasi-anelli la proprietà mediale risulta essere una generalizzazione della debole commutatività. Seguendo la linea di Ligh [**5**] giungiamo ad una caratterizzazione della struttura sottodiretta dei quasi-anelli mediali in cui ogni elemento è potenza di se stesso [**1**]; risultano così essere casi particolari di questa classe di quasi-anelli, i β-quasi-anelli di Ligh e i semi-anelli di Subrahmanyam.

Dimostriamo che un quasi-anello mediale i cui elementi sono potenza di se stessi, sono isomorfi ad una somma sottodiretta di quasi-anelli irriducibili N_i, ove ogni N_i è un campo oppure un quasi-anello che possiede una unità sinistra e ogni suo elemento non costante ha una potenza che è unità sinistra. Anzi più in generale tali quasi-anelli sono somma di un quasi-anello costante e di un quasi-anello zero-simmetrico che è somma sottodiretta di quasi-anelli che sono campi oppure quasi-domini semplici regolari il cui semigruppo moltiplicativo è un gruppo destro.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 7-X-1983.

2 - Preliminari

Indicheremo con N un quasi-anello sinistro. Per le notazioni e le nozioni fondamentali ci riferiremo a [**6**] anche senza esplicito richiamo. Ricordiamo comunque che ogni quasi-anello è somma della sua parte costante N_c e della sua parte zero-simmetrica N_0 (cfr. [**6**], Prop. 1.13). Se M è un sottoinsieme di N poniamo $A(M) = \{y \in N / xy = 0 \ \forall x \in M\}$. Infine ricordiamo che un quasi-anello è sottodirettamente irriducibile se ogni famiglia di suoi ideali diversi dall'ideale nullo, ha intersezione non nulla.

3 - MP-quasi-anelli

Def. 1. Un quasi-anello N si dice *mediale* se $\forall x, y, z, t \in N$ è $xyzt = xzyt$.

Oss. 1. Se in quasi-anello N sussiste la debole commutatività, allora vale la proprietà mediale ([1]).

Se infatti vale la proprietà di debole commutatività $\forall x, y, z, t \in N$ $xyzt = zxyt = xzyt$ e quindi vale la mediale.

Def. 2. Chiamiamo *MP-quasi-anello* un quasi-anello N mediale in cui $\forall x \in N$ esiste un intero positivo $l(x)$ tale che $x^{l(x)} = x$.

Oss. 2. Se N è un quasi-anello mediale, N_0 è un ideale di N, inoltre $N_c N_0 = \{0\}$ e $N_0 N_c = N_c$.

Sappiamo che in generale in un quasi-anello N_0 è un ideale destro ed N_c è un sottogruppo invariante (cfr. [**6**], Prop. 1.32). Se N è mediale N_0 è anche ideale sinistro: infatti $\forall x \in N$, $\forall n_0 \in N_0$ $0xn_0 = 00xn_0 = 0x0n_0 = 0n_0 = 0$. È poi ovvio che $N_c N_0 = \{0\}$ e $N_0 N_c = N_c$.

Oss. 3. Ogni immagine omomorfa di un MP-quasi-anello è un MP-quasi-anello. La dimostrazione è ovvia.

Lemma 1. *Un elemento x di un MP-quasi-anello N sottodirettamente irriducibile ha una potenza che è unità sinistra se e solo se $A(x) = \{0\}$.*

---

(1) In un quasi-anello sussiste la debole commutatività se $\forall x, y, z \in N$ $xyz = yxz$.

Sia N un MP-quasi-anello sottodirettamente irriducibile ed x un suo elemento tale che $x^{l(x)}$ è unità sinistra; ovviamente $A(x^{l(x)}) = \{0\}$ e quindi anche $A(x) = \{0\}$ perchè diversamente, $y \in A(x)$ implicherebbe $xy = 0$ e quindi anche $x^{l(x)}y = 0$, cosa ora esclusa. Viceversa, se $A(x) = \{0\}$ $\forall y \in N$, $xy = x^{l(x)}y$ implica $x(y - x^{l(x)-1}y) = 0$ e quindi $y = x^{l(x)-1}y$, e cioè x ha una sua potenza che è unità sinistra.

Lemma 2. *Un MP-quasi-anello sottodirettamente irriducibile, possiede una unità sinistra.*

Mostriamo anzitutto che per ogni $x \in N$, $A(x) = \{y \in N/xy = 0\}$ è un ideale di N. Per ogni y', $y'' \in A(x)$, $y' - y'' \in A(x)$, dato che $x(y' - y'') = 0$. Inoltre per ogni $n \in N$, e per ogni $y \in A(x)$, $n + y - n \in A(x)$; pertanto $A(x)$ è un sottogruppo normale di N. Inoltre $\forall n \in N$ e $\forall y \in A(x)$, $nx \in A(x)$: infatti $xny = x^{l(x)}ny$ e poichè N è mediale $x^{l(x)}ny = x^{l(x)-1}nxy = 0$. Infine $\forall n$, $n' \in N$ $\forall y \in A(x)$ $(n + y)n' - nn' \in A(x)$, dato che $x((n + y)n' - nn') = 0$. Ora, se $A(x) = \{0\}$ allora $x^{l(x)-1}$ è unità sinistra di N (cfr. Lemma 1). Se invece per ogni $x \in N$ è $A(x) \neq \{0\}$, poniamo $A \bigcap\limits_{x \in N} A(x)$. Dato che N è sottodirettamente irriducibile per ipotesi, è $A \neq \{0\}$. Se $0 \neq w \in A$, allora $w^2 = 0$ ma $w^2 = 0$ implica $w^{l(w)} = w = 0$ e ciò è escluso. Quindi esiste un elemento $e \in N$ tale che $A(e) = \{0\}$ e quindi $e^{l(e)-1}$ è unità sinistra.

Accertata l'esistenza di unità sinistre in un MP-quasi-anello sottodirettamente irriducibile e fornitane una caratterizzazione in funzione degli annullatori destri, sembra opportuno vedere il comportamento degli elementi $x \in N$ tali che $A(x) \neq \{0\}$.

Indicheremo nel seguito con $\mathscr{H}$ l'insieme degli elementi $x \in N$ tali che $A(x) \neq \{0\}$.

Lemma 3. *Se N ε un MP-quasi-anello sottodirettamente irriducibile e $z \neq 0$ è un elemento di $\mathscr{H}$, allora $zy = 0y$ per ogni $y \in N$.*

Dato che N è sottodirettamente irriducibile, è $A = \bigcap\limits_{x \in \mathscr{H}} A(x) \neq \{0\}$. Sia $0 \neq w \in A$. Ora, $xw = 0$ per ogni $x \in \mathscr{H}$. Se $wy = 0$ per qualche $y \neq 0$ di N, allora $w \in \mathscr{H}$ e $ww = 0$, cosa esclusa perchè sarebbe $w^{l(w)} = w = 0$. Ne segue che è $wy \neq 0$ per ogni $0 \neq y \in N$ e ciò vuol dire che $A(w) = \{0\}$ cioè che $w^{l(w)-1}$ è unità sinistra (cfr. Lemma 1). Pertanto $zy = zw^{l(w)-1}y = 0y$ per ogni $y \in N$ e $z \in \mathscr{H}$.

Corollario 1. *Un elemento $z \neq 0$ di un MP-quasi-anello sottodirettamente irriducibile appartiene ad $\mathscr{H}$ se e solo se z è costante.*

Se z è costante, ovviamente $A(z) \neq \{0\}$ (cfr. Oss. 2), quindi $z \in \mathscr{H}$. Viceversa, se $z \in \mathscr{H}$, per il Lemma 3 è $zy = 0y$ $\forall y \in N$ quindi anche per $y = z^{l(z)-1}$, pertanto $z = zz^{l(z)-1} = 0z^{l(z)-1} = 00z^{l(z)-1} = 0z$, applicando la proprietà mediale, e quindi z è costante.

Corollario 2. *Se N è un MP-quasi-anello sottodirettamente irriducibile ed x un suo elemento costante, $A(x) = N_0$.*

Ovviamente $A(x) \supseteq N_0$; se $y \in A(x)$ è $xy = 0y = 0$ e quindi $y \in N_0$.

In modo ovvio seguono:

Corollario 3. *In un MP-quasi-anello sottodirettamente irriducibile ogni elemento $x \in N \setminus N_c$ ha una potenza che è unità sinistra.*

Corollario 4. *Ogni elemento di un MP-quasi-anello sottodirettamente irriducibile zero-simmetrico, ha una potenza che è unità sinistra.*

Teorema 1. *Un MP-quasi-anello sottodirettamente irriducibile con un elemento $h \neq 0$ distributivo a destra* (2) *è un campo.*

Se h è distributivo a destra, è un elemento zero-simmetrico: infatti $(0 + 0)h = 0h = 0h + 0h$ implica $0h = 0$. Osserviamo che $A(h) = \{0\}$ perchè se ciò non fosse, per il Lemma 3 sarebbe $hy = 0y$ per ogni $y \in N$ e quindi anche per $y = h$. Ma $hh = 0h = 0$ è escluso, quindi $A(h) = \{0\}$ ed $h^{l(h)-1}$ è unità sinistra (cfr. Lemma 1). Sia ora $S_h = \{y \in N / yh = 0\}$: si vede subito che S_h è un ideale di N. Supponiamo per assurdo $S_h \neq \{0\}$ e sia $L = S_h \cap A$, ove al solito $A = \bigcap_{x \in \mathscr{H}} A(x)$. Se $S_h \neq \{0\}$ anche $L \neq \{0\}$ perchè N è sottodirettamente irriducibile. Sia w un elemento non nullo di L: $xw = 0$ per ogni $x \in \mathscr{H}$ e $wh = 0$, cioè $w \in \mathscr{H}$ e quindi $ww = 0$, cosa esclusa per ipotesi. Pertanto è $w = 0$ e quindi $S_h = \{0\}$. Se $S_h = \{0\}$, $h^{l(h)-1}$ è unità destra: infatti $\forall x \in N$ $xh - xh^{l(h)} = (x - xh^{l(h)-1})h = 0$, e quindi $x = xh^{l(h)-1}$. Inoltre N è commutativo in quanto mediale: $\forall x, y \in N$ $xy = h^{l(h)-1}xyh^{l(h)-1} = h^{l(h)-1}yxh^{l(h)-1} = yx$. Se N è commutativo è ovviamente zero-simmetrico, distributivo e ogni elemento ha inverso: per ogni $x \in N$, $x^{l(x)} = x = xh^{l(h)-1}$ implica $x(x^{l(x)-1} - h^{l(h)-1}) = 0$ e quindi $x^{l(x)-1}$ è unità di N e $x^{l(x)-2}$ è l'inverso di x. Se poi $l(x) = 2$, x è idempotente e coincide con il proprio inverso. Risulta così che N è un campo.

---

(2) Un elemento h è *distributivo a destra* quando $\forall x, y \in N$ $(x + y)h = xh + yh$.

Con riferimento ai quasi-anelli i cui elementi sono idempotenti si hanno:

Corollario 5. *Un quasi-anello mediale N ad elementi idempotenti sottodirettamente irriducibile, se possiede un elemento $h \neq 0$ distributivo a destra, è il campo di 2 elementi.*

Il Teorema 1 assicura che in queste ipotesi N è un campo di unità h, inoltre se ogni elemento è idempotente, (cfr. Corollario 3) è unità sinistra pertanto $\forall x \in N \quad x = xh = h$ ed N è il campo di 2 elementi.

Teorema 2. *Ogni MP-quasi-anello è isomorfo ad una somma sottodiretta di quasi-anelli N_i sottodirettamente irriducibili, ove ogni N_i o è un campo oppure è un quasi-anello che possiede una unità moltiplicativa sinistra, ed ogni suo elemento non costante ha una potenza che è unità sinistra.*

Ogni quasi-anello è isomorfo alla somma sottodiretta di quasi-anelli sottodirettamente irriducibili (cfr. [2]) N_i. Ora ogni N_i è immagine omomorfa di N e quindi per l'Oss. 3 è un MP-quasi-anello. Se N_i ha un elemento non nullo distributivo a destra, è un campo (Teorema 1), altrimenti è un quasi-anello che possiede una unità sinistra (Lemma 2) ed ogni suo elemento non costante possiede una potenza che è unità sinistra (corollari 1 e 3).

Corollario 6. *Un quasi-anello mediale ad elementi idempotenti è isomorfo ad una somma sottodiretta di quasi-anelli sottodirettamente irriducibili N_i ove ogni N_i è il campo di 2 elementi oppure un quasi-anello piccolo.* (3)

È ovvia conseguenza del Corollario 5 e del Teorema 2.

In particolare possiamo dimostrare

Teorema 3. *Un MP-quasi-anello zero-simmetrico N è isomorfo ad una somma sottodiretta di quasi-anelli che sono campi oppure sono quasi-domini semplici, regolari in cui $(N \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo destro* (4).

Sappiamo che un quasi-anello N è somma sottodiretta di quasi-anelli sottodirettamente irriducibili N_i [2], ciascuno dei quali è ora nelle nostre ipotesi

(3) Ricordiamo che un quasi-anello N si dice *piccolo* se possiede una unità sinistra e, inoltre $\forall x \neq e$ x è unità sinistra oppure $xy = 0y$ $\forall y \in N$ cfr. [5].

(4) Per la definizione di quasi-dominio si veda per esempio [4]; per le definizioni di quasi-anello semplice, regolare e di gruppo destro si veda [3] e [6].

un MP-quasi-anello zero-simmetrico. Osserviamo che ogni elemento $x \in N_i$ ha una potenza che è unità sinistra (Corollario 4) e $A(x) = \{0\}$ (Lemma I). Quindi ogni N_i è un quasi-dominio. In particolare possiamo osservare che $xN_i = N_i$ $\forall x \in N_i$. Infatti $xN_i \supseteq x^2N_i \supseteq \ldots \supseteq x^{l(x)-1}N_i = N_i$. Pertanto ogni N_i è N-semplice (5) e quindi è semplice essendo zero-simmetrico. Inoltre $\forall x \neq 0$, $x \in N$, $\exists y \in N / xy = e$ ove e è unità sinistra ed $(N_i \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo destro. Inoltre $xyx = ex = x$ ed N_i è regolare. È poi ovvio che se d è un elemento distributivo di N_i, N_i è un campo: infatti dato che N_i è regolare $\forall x \in N_i$ $xd = xdd'd$ ove $dd'd = d$. Pertanto $(x - xdd')d = 0$ e quindi $x = xdd'$ cioè dd' è unità destra di N_i. Se N_i possiede una unità destra è un campo. (cfr. anche Teorema 1)

Il Teorema 3 permette ancora di caratterizzare gli MP-quasi-anelli.

Teorema 4. *Ogni MP-quasi-anello N è somma di un quasi-anello costante e di un quasi-anello zero-simmetrico che è isomorfo ad una somma sottodiretta di quasi-anelli che sono campi oppure quasi-domini semplici, regolari il cui semigruppo moltiplicativo è un gruppo destro.*

Bibliografia

[1] H. E. Bell, *Near-rings in which each element is power of itself*, Bull. Austral. Math. Soc. **2** (1970), 363-368.

[2] C. G. Fain, *Some structure theorems for near-rings*, Doctoral Dissertation, University of Oklahoma 1968.

[3] H. E. Heatherly, *Near-rings without nilpotent elements*, Publ. Math. Debrecen **20** (1973), 201-205.

[4] H. E. Heatherly and H. Oliver, *Near-integral domains*, Monatsh. Math. **78** (1974), 215-222.

[5] S. Ligh, *The structure of a special class of near-rings*, J. Austral. Math. Soc. **13** (1972), 141-146.

[6] G. Pilz, *Near-rings*, North Holland N.Y. 1977.

[7] N. V. Subrahmanyam, *Boolean semirings*, Math. Ann. **148** (1962), 395-401.

Summary

We study the medial near-rings in which each element is power of itself. We show that such structures are isomorphic to a subdirect sum of irreducible near-rings N_i, where each N_i is a field or a near-ring with a left identity and each non constant element has a left-identity-power. More generally they are sum of a constant near-ring and of a zero-symmetric near-ring that is subdirect sum of near-rings N_i, where each N_i is a field or a regular, simple near-domain with $(N_i \setminus \{0\}, \cdot)$ right group.

(5) Per la definizione di quasi-anello N-semplice cfr. [6].

* * *