Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 211-217

GIANNANGELO LUISI (*)

Gruppi di collineazioni transitivi sui punti di un q-arco di un piano proiettivo d'ordine $q = p^r$, $p \neq 2$ primo (**)

1 - Introduzione

Uno dei teoremi fondamentali sui k-archi dei piani desarguesiani d'ordine $q = p^r$, p primo, asserisce che i q-archi non sono completi (B. Segre [**6**], G. Tallini [**7**]).

È stato A. Barlotti [**1**] ad avviare le ricerche intorno ai q-archi dei piani non-desarguesiani rilevando che tale teorema non si estende a tutti i piani finiti d'ordine q. I 9-archi dei noti piani non-desarguesiani d'ordine 9 sono stati determinati in [**3**].

È notevole per lo studio dei q-archi un recente lavoro di G. Menichetti [**5**], il quale costruì q-archi completi in ogni piano di Hall d'ordine q con $q = 2^r$.

Nella presente Nota si svolgerà un sistematico studio sulle omologie che trasformano in sè un q-arco Ω in un piano proiettivo π di ordine q con q dispari, ed i risultati conseguiti consentono di determinare il gruppo H generato da tali omologie involutorie.

Il principale risultato è che, se $q = p^r$, $p \neq 2$ primo, H soddisfa alle ipotesi del famoso teorema Z^* di Glauberman [**4**] di cui daremo in **2** l'enunciato.

Applicando tale teorema, si stabilisce non solo la struttura astratta di H, ma si prova anche che Ω non è completo purchè il gruppo G delle collineazioni che trasforma Ω in sè sia transitivo sui punti di Ω. Più precisamente si dimostrerà il seguente

Teorema. *Sia π un piano proiettivo d'ordine q, $q = p^r$, $p \neq 2$ primo, dotato di un q-arco Ω. Se π ammette un gruppo di collineazioni G tale che trasformi Ω in sè operando transitivamente sui punti di Ω, e contenga delle omologie involutorie, allora*

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Via Re David 200/A, 70124 Bari, Italy.
(**) Ricevuto: 22-IX-1983.

(i) *il gruppo H generato dalle omologie involutorie contenute in G ha ordine $2p^s$, $s \geqq r$,*

(ii) *il sottogruppo Q d'ordine p^s di H opera ancora transitivamente sui punti di Ω,*

(iii) *Ω non è completo.*

2 - Il teorema Z^* di Glauberman

Sia G un gruppo finito e Σ un insieme di numeri primi dispari. Supponiamo che G sia generato da una classe completa J di involuzioni che godono della seguente proprietà

(1) i divisori primi dell'ordine del prodotto di qualunque due involuzioni di J appartengono a Σ.

Allora, il sottogruppo H generato da J ha ordine $2n$ ed i divisori primi di n appartengono a Σ.

Nel caso particolare in cui Σ consti di un solo primo p, si ha che l'ordine di H è uguale a $2p^s$.

3 - Alcune proprietà delle omologie involutorie che trasformano in sè un q-arco Ω di un piano proiettivo π di ordine q, q dispari

Lemma 1. (a) *Ω ha in ogni suo punto esattamente due tangenti.*

(b) *Due omologie involutorie che trasformino Ω in sè non possono avere lo stesso centro.*

(c) *Una qualsiasi potenza del prodotto di due omologie involutorie risulta essere il prodotto di due omologie involutorie. Più precisamente: Se i e j sono due omologie involutorie ed m intero positivo, esiste un'omologia involutoria k tale che $(ij)^m = kj$. Se i e j non hanno il medesimo centro, la retta che congiunge i centri contiene anche il centro di k.*

(d) *Il prodotto di due omologie involutorie non può lasciare fissi i quattro vertici di un quadrangolo non degenere. Se nè i centri, nè gli assi coincidono, il prodotto può avere al più un punto fisso non situato sulla retta congiungente i centri. Tale punto è l'intersezione degli assi.*

Dim. (a) discende dal fatto che per ogni punto di Ω passano esattamente $q+1$ rette. Per vedere (b) basta osservare che se j_1 ed j_2 sono due omologie involutorie dello stesso centro C che trasformino Ω in sè, allora $j_1 j_2$ ha almeno

$q-2$ punti uniti su Ω, il che implica che $j_1 = j_2$. Passiamo ora a provare (c). È facile vedere che $(ij)^m$ si scrive nella forma di kj ove k è una involuzione che risulta essere coniugata ad i oppure a j, mediante una collineazione t. In virtù di un ben noto teorema ([2], 3.1.10), il centro di k sarà l'immagine del centro di i oppure di j nella collineazione t. Poichè t è una potenza di ij, la congiungente i centri di i e di j è unita in t. Tale retta contenendo l'immagine dei centri di i e di j in t, deve contenere anche il centro di k. Infine, (d) discende agevolmente da due teoremi elementari ([2], 3.1.4 e 3.1.7).

Lemma 2. *Se un'omologia trasforma Ω in sè, è involutoria; inoltre*

(2) *l'asse* a *è tangente ad Ω,*

(3) *il centro C appartiene all'altra tangente ad Ω nel punto di contatto di Ω ed* a.

Dim. Sia j un'omologia involutoria di centro C e di asse a, che trasformi Ω in sè. Proviamo prima di tutto che

(4) *C non giace su Ω.*

Sia $L \in \Omega$ un punto non lasciato fisso da j. È chiaro che $L' = j(L)$, L e C sono tre punti allineati. Poichè $L, L' \in \Omega$, nessun altro punto della retta LL' può appartenere ad Ω; di qui la (4).

Se j avesse ordine maggiore di 2, i punti $L'' = j(L)$, L' ed L sarebbero tre punti allineati di Ω. Essendo Ω un arco, ciò non è possibile.

Dalla (4) discende che i punti di Ω uniti in j sono quelli dell'intersezione $a \cap \Omega$. Essendo, per ipotesi, $|\Omega|$ dispari, il numero dei punti uniti in j sarà anch'esso dispari. Ne segue la (2).

Denotiamo con T il punto di contatto di Ω con l'asse a. Poichè C ed a non sono incidenti, la retta TC non coincide con a. È subito visto che TC è una retta unita in j. Siccome j lascia fisso T e trasforma Ω in sè, TC non può avere un ulteriore punto in comune con Ω. Infatti, tale punto, essendo unito in j, dovrebbe coincidere con C, contrariamente alla (4).

Lemma 3. *L'ordine del prodotto di due omologie involutorie che trasformino Ω in sè divide $(q^2-1)q^2$.*

Dim. Siano j e k due omologie involutorie che trasformino Ω in sè. I loro centri, siano essi A e B, non possono coincidere per il Lemma 1. Escludiamo l'eventualità che abbiano lo stesso asse. In una tale eventualità, pure jk è una omologia, l'ordine della quale è, per il Lemma 2, uguale a 2. Risulterebbe che jk commuta sia con j sia con k, di conseguenza, jk lascerebbe fisso sia il centro di j che quello di k. In tal modo jk avrebbe più di un punto fisso non giacente sul suo asse. Ma allora jk dovrebbe essere la collineazione identica del piano, ossia risulterebbe $j = k$, contrariamente all'ipotesi di $j \neq k$.

Possiamo supporre, d'ora in avanti, che gli assi delle due omologie involutorie j e k non coincidano. Denoteremo con R il punto d'intersezione di tali due assi. Indicheremo inoltre con $\langle jk \rangle$ il gruppo ciclico generato da j e k.

Consideriamo le orbite di punti di $\langle jk \rangle$ che non siano situate sulla retta AB, nè ridotte al solo punto R. Detta l la lunghezza minima di tali orbite, proviamo che jk ha ordine l.

A tal fine osserviamo che $(jk)^l$ ha almeno punti fissi non situati su AB nè coincidenti con R. Per il Lemma 1 (c), $(jk)^l$ è il prodotto di due omologie involutorie i cui centri appartengono ad AB. Per il Lemma 1 (d), $(jk)^l$ è la collineazione identica. Ma allora le orbite di punti in $\langle jk \rangle$ prese in considerazione hanno la stessa lunghezza l.

Le medesime orbite danno luogo ad una partizione dell'insieme dei punti non situati su AB nè coincidenti con R. Il numero di tali punti è uguale a q^2 oppure a $q^2 - 1$ secondochè R appartiene o meno alla retta AB. Ne segue che $l \,|\, q^2(q^2 - 1)$.

Proviamo da ultimo che l'ordine di jk è uguale ad l.

Siccome $\langle jk \rangle$ ha un'orbita di lunghezza l, si ha che $(jk)^n$ con $n < l$ non può lasciare fisso ogni punto del piano; d'altronde, come abbiamo già visto, $(jk)^l$ è la collineazione identica di π, di qui l'asserto.

Lemma 4. *L'ordine del prodotto di due omologie involutorie che trasformino Ω in sè divide q^2.*

Dim. Possiamo applicare il Lemma 3. Ci resta ancora da escludere la possibilità che l'ordine divida $q^2 - 1$. Per quanto è stato provato nella dimostrazione del Lemma 3, si ha che se due omologie involutorie j e k trasformano Ω in sè e il loro prodotto divide $q^2 - 1$, allora gli assi sono diversi e il loro punto d'intersezione non sta sulla retta congiungente i centri.

Proviamo che il punto comune R degli assi non appartiene neppure ad Ω. Infatti, se vi appartenesse, i due assi sarebbero le due tangenti ad Ω nel punto R, come discende dal Lemma 2. Sempre per il Lemma 2, si avrebbe che il centro di j appartiene all'asse di k, e viceversa. Tale proprietà implica ([**2**], p. 121, 3.1.12) che j e k commutino, quindi jk sarebbe un'involuzione, la quale, per il Lemma 1 (d), è un'omologia. L'asse di tale omologia jk non può coincidere con l'asse di j nè con quello di k.

Dal Lemma 2 discende invece che jk dovrebbe avere per asse una delle due tangenti ad Ω nel punto R, essendo R unito in jk. Tale contraddizione prova il nostro asserto.

Possiamo pertanto supporre d'ora in avanti che R non stia su Ω. La congiungente r dei centri di j e k, non può essere tangente ad Ω, altrimenti R apparterebbe ad Ω.

I punti di Ω non situati su r vengono ripartiti in orbite nel gruppo ciclico $\langle jk \rangle$ generato da jk. In virtù dei Lemmi 1 (c) e 1 (d), tali orbite hanno la stessa lunghezza, uguale all'ordine di jk. Ne segue che l'ordine di jk divide $q-2$.

Essendo il m.c.d. $(q-2, q-1)$ uguale a 1 o 3, abbiamo soltanto da escludere la possibilità che jk abbia ordine 3.

Siano U e V i due punti di intersezione di Ω ed r. Poichè sia j che k scambiano U con V, jk lascia fissi U e V.

Siano u_1 e u_2 le due tangenti ad Ω in U. jk o le scambia oppure trasforma in sè entrambe. Ad ogni modo, $(jk)^2$ trasforma in sè entrambe le tangenti u_1, u_2.

Denotate con v_1 e v_2, rispettivamente, le due tangenti ad Ω in V, abbiamo altresì che $(jk)^2$ trasforma in sè entrambe le tangenti v_1 e v_2.

Le quattro tangenti u_1, u_2, v_1, v_2 costituiscono un quadrilatero non degenere che viene trasformato in sè da $(jk)^2$; ma allora $(jk)^2$ lascia fissi i quattro punti di un quadrangolo non degenere di π, il che è impossibile per il Lemma 1.

Lemma 5. *Sia G un gruppo di collineazioni di π che trasformi Ω in sè operando transitivamente sui punti di Ω. Supponiamo che G contenga delle omologie involutorie. Sia H il sottogruppo di G generato dalle omologie involutorie contenute in G Allora, H è ancora transitivo su Ω.*

Dim. In virtù del Lemma 2, le omologie involutorie che trasformano Ω in sè hanno ciascuna uno ed un solo punto fisso su Ω. Poichè G è transitivo su Ω, ogni punto di Ω è lasciato fisso da un'omologia involutoria contenuta in G. In virtù del teorema di Gleason (cfr. [2], p. 191, 3.4.15), H è ancora transitivo su Ω.

Lemma 6. *H soddisfa alle ipotesi del teorema Z^* di Glauberman, purchè J sia l'insieme delle omologie involutorie contenute in G.*

Dim. Poichè la coniugata di un'omologia involutoria mediante una qualsiasi collineazione del piano è ancora un'omologia involutoria, il Lemma 6 è un corollario del Lemma 4.

Lemma 7. *Siano K un k-arco ed F un gruppo di collineazioni che trasformi K in sè operando transitivamente sui suoi punti. Se k è dispari ed F lascia fisso un punto P, allora $K \cup \{P\}$ è un $(k+1)$-arco.*

Dim. Essendo k dispari, passa per P almeno una tangente t a K. Poichè F opera transitivamente su K, si ha in ogni punto di K una tangente allo stesso K

che è immagine di t in una opportuna collineazione di F. Siccome F lascia P fisso, dette tangenti passano per P. Ma allora, le rette per P che incontrano K sono tangenti a K. Ciò prova senz'altro l'asserto.

4 - La dimostrazione del Teorema

In virtù del Lemma 6, essendo, per ipotesi, $q = p^r$, $p \neq 2$ primo, si ha $|H| = 2p^s$. Poichè H, per il Lemma 5, è transitivo su Ω si avrà inoltre che

$$|H| = |H_P|\,|\Omega|\,, \tag{5}$$

ove P è un qualsiasi punto di Ω ed H_P indica lo stabilizzatore di P in H. Essendo, per il Lemma 2, $2 \mid |H_P|$, ne segue che $s \geqq r$. Per vedere la (ii), notiamo che

$$|Q| = l|Q_P|\,, \tag{6}$$

ove l indica la lunghezza dell'orbita di P nel gruppo Q. Essendo $|H| = 2|Q|$ dalle (15) e (16) discende che $P^Q = \Omega$, ossia la (ii).

Il numero dei punti del piano non situato su Ω è uguale a $q^2 + 1$. Poichè $|Q| = p^s$ e $q = p^r$, ne segue che Q ha almeno un punto fisso non situato su Ω. Per il Lemma 7, ne discende la (iii).

Bibliografia

[1] A. Barlotti, *Un'osservazione intorno ad un teorema di B. Segre sui q-archi*, Matematiche **21** (1966), 23-29.

[2] P. Dembowski, *Finite Geometries*, Springer-Verlag, 1968.

[3] R. H. F. Deniston, *On arcs in projective planes of order* 9, Manuscripta Math. **4** (1971), 61-89.

[4] G. Glauberman, *Central elements in core-free groups*, J. Algebra **4** (1966), 403-420.

[5] G. Menichetti, *q-archi completi nei piani di Hall d'ordine $q = 2^r$*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **56** (1974), 518-525.

[6] B. Segre, *Le geometrie di Galois*, Ann. Mat. Pura Appl. **48** (1959), 1-96.

[7] G. Tallini, *Sui q-archi di un piano lineare finito di caratteristica $p = 2$*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **23** (1957), 242-245.

Summary

In this paper the following theorem is proved. Let Ω be a q-arc in a projective plane π of order $q = p^r$, $p \neq 2$ prime. Suppose that π admits a collineation group G such that: (1) *G acts transitively on Ω,* (2) *G contains involutorial homologies.*

Let H be the subgroup of G generated by all involutorial homologies contained in G. Then: (3) *$H = 2p^s$ with $s \geqq r$,* (4) *the subgroup Q of order p^s of H acts transitively on Ω,* (5) *Ω is not complete.*

* * *