Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 73-78

GUIDO RAVERA (*)

Sulla costruzione grafica del raggio di inerzia di un sistema piano (**)

In [3] ho presentato un nuovo metodo per risolvere fondamentali problemi della Statica grafica, quali la costruzione del raggio d'inerzia e del centro relativo di un sistema materiale piano rispetto ad un asse complanare. Il metodo si basa sulla conoscenza dell'ellisse di Culmann e del cerchio ad essa concentrico avente la stessa area (1), ed ha soprattutto il pregio di non impegnare in alcun modo le proprietà proiettive della stessa ellisse.

È tuttavia noto che nelle applicazioni ben raramente si dispone dell'ellisse di Culmann completamente tracciata; quasi sempre ne sono noti soltanto due diametri coniugati, che nei casi più fortunati possono essere gli assi canonici.

Si pone allora nel modo più spontaneo la necessità di estendere il metodo del cerchio equivalente anche al caso in cui si conoscano due diametri coniugati dell'ellisse di Culmann anzichè l'intera ellisse. Al fine di conseguire questo risultato occorre risolvere due problemi, concernenti l'uno la costruzione del cerchio equivalente e l'altro la costruzione dell'intersezione fra l'ellisse ed una retta passante per il suo centro, quando siano noti due diametri coniugati.

Il primo problema si risolve agevolmente utilizzando il 2° teorema di Apollonio ([2], pag. 369). Se G denota il baricentro del sistema e GP_0 e GP sono due semidiametri coniugati dell'ellisse di Culmann γ, il raggio R_e del cerchio equivalente risulta infatti, per il suddetto teorema, medio proporzionale fra GP_0 e GC, essendo C la proiezione di P sulla perpendicolare condotta per G

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, via L. B. Alberti 4, 16132 Genova, Italy.

(**) Ricevuto: 7-VI-1983.

(1) Come in [3], nel seguito questo verrà chiamato « cerchio equivalente ».

a GP_0. La costruzione di R_e e la conseguente rappresentazione del cerchio equivalente Γ sono quindi immediate (Fig. 1).

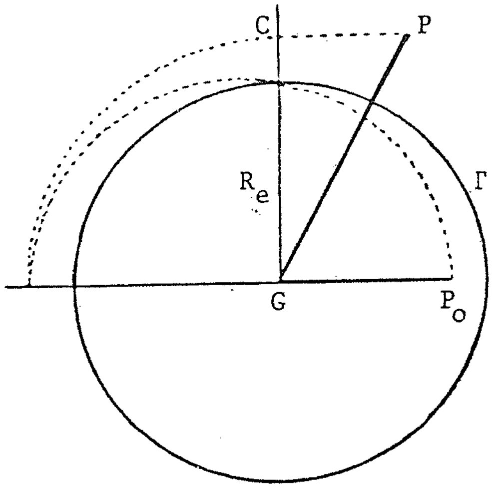

Figura 1

La conoscenza di Γ si rivela già utile nella risoluzione del secondo problema, ove per semplicità identificheremo con x la direzione di GP_0 e con y quella perpendicolare (Fig. 2). Siano inoltre D, E le intersezioni di y ed x col

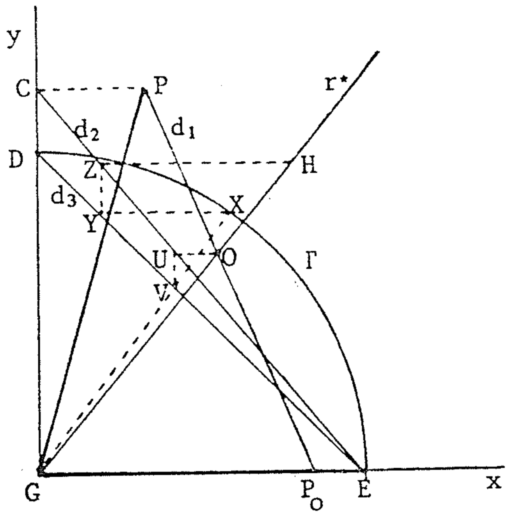

Figura 2

cerchio Γ, e d_1, d_2, d_3 le rette individuate rispettivamente da P_0 e P, E e C, E e D. Se r^* è una assegnata retta uscente da G, una delle sue intersezioni con γ si costruisce agevolmente a partire da O, punto in cui r^* interseca d_1, mediante il tracciamento di sole rette parallele ad x o y, nonchè di una retta uscente da G. Infatti, condotta per O la parallela ad x, si indichi con U la sua intersezione con d_2, e sia V il punto in cui si intersecano d_3 e la parallela ad y passante per U. Detta X la proiezione di V da G sul cerchio Γ, siano poi Y il punto in cui la parallela ad x condotta per X incontra d_3, e Z la proiezione di Y su d_2 nella direzione y. La parallela ad x passante per Z interseca r^* nel punto H che, come è agevole verificare, appartiene anche all'ellisse di Culmann e rappresenta quindi la desiderata intersezione di r^* con γ.

Per dimostrare ciò si scrivano le equazioni dell'ellisse di Culmann

$$Ax^2 + By^2 + 2Fxy = J^2 m^{-1} \tag{1}$$

e del cerchio equivalente

$$x^2 + y^2 = Jm^{-1}, \tag{2}$$

dove m denota la massa del sistema,

$$J^2 = AB - F^2, \tag{3}$$

e si indichi con n il coefficiente angolare di r^*. Semplici calcoli consentono di trovare che

$$x_0 = JA^{1/2}m^{-1/2}[n(J+F)+A]^{-1},$$

$$y_V = nJ^{3/2}m^{-1/2}[n(J+F)+A]^{-1}, \qquad y_X = nJ^{3/2}m^{-1/2}A^{-1/2}(A+Bn^2+2Fn)^{-1/2},$$

mentre dalla costruzione emerge che

$$x_H = y_X y_V^{-1} x_0, \qquad y_H = n x_H. \tag{4}$$

È allora immediato verificare che le coordinate (4) di H soddisfano la (1), per cui H è l'intersezione di r^* con γ.

A questo punto è possibile applicare il *metodo del cerchio equivalente* al fine di risolvere graficamente il seguente fondamentale problema: « Noti due diametri coniugati dell'ellisse di Culmann di un sistema materiale piano, costruire il raggio d'inerzia del sistema rispetto ad una generica retta r con esso complanare ».

Basta infatti applicare le costruzioni sopra indicate per tracciare il cerchio equivalente Γ a partire dai diametri coniugati ed individuare quindi l'intersezione H dell'ellisse di Culmann con la retta r^* passante per G e parallela ad r (Fig. 3). Seguendo [**3**] si tracci poi la retta p ortogonale ad r per G e si

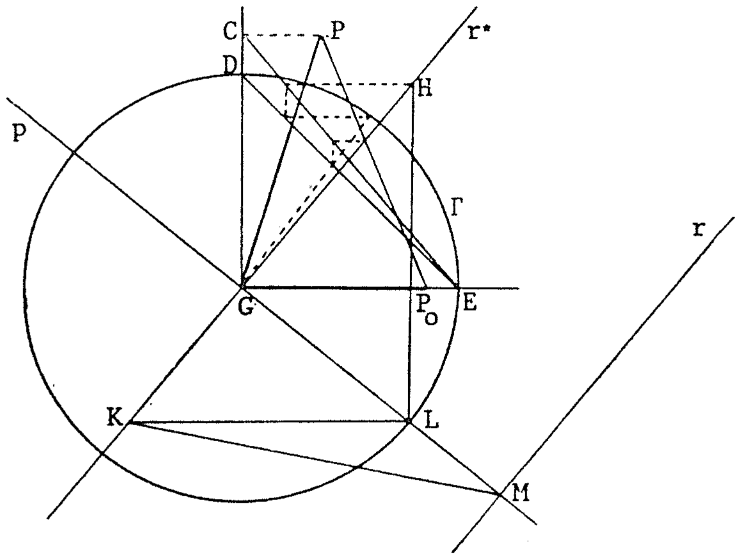

Figura 3

indichino con L una delle intersezioni di p con Γ e con M l'intersezione di p con r. Detta K l'intersezione fra r^* e la perpendicolare alla HL passante per L, il segmento MK misura Δ_r.

Si noti che questo procedimento, oltre ad avere il pregio di non basarsi in alcun modo su considerazioni di Geometria Proiettiva, presenta il vantaggio di consentire la costruzione di Δ_r senza individuare preliminarmente il centro relativo, il che è invece indispensabile se si segue il metodo tradizionale ([**1**], pag. 106). Ricordiamo a questo proposito che, considerate le due intersezioni della retta r con gli assegnati diametri coniugati, secondo il metodo tradizionale vengono individuate di ciascuna di tali intersezioni le rispettive antipolari. Ci si deve quindi necessariamente valere delle classiche (non del tutto semplici) costruzioni grafiche della Geometria Proiettiva, ed in particolare del teorema di reciprocità in base al quale il centro relativo risulta essere l'intersezione delle antipolari medesime.

Volendo peraltro individuare il centro relativo R, è possibile proseguire la costruzione conducendo per K la perpendicolare a KM, che interseca p nel punto Q, e tracciando per Q la parallela $\tilde{r}$ ad r; su $\tilde{r}$ sta R [3]. Una seconda retta cui deve appartenere R è la retta s^* diametrale coniugata con r^*. Per costruirla basta determinare l'intersezione N di CP con r^*, riportare sulla normale a CP un segmento $\overline{PN''} = \overline{GP_0}$ e condurre per N'' la perpendicolare a NN'' chiamando N' la sua intersezione con la retta CP; congiungendo G con N' si ottiene s^*. L'intersezione di s^* con $\tilde{r}$ individua il centro relativo R (Fig. 4).

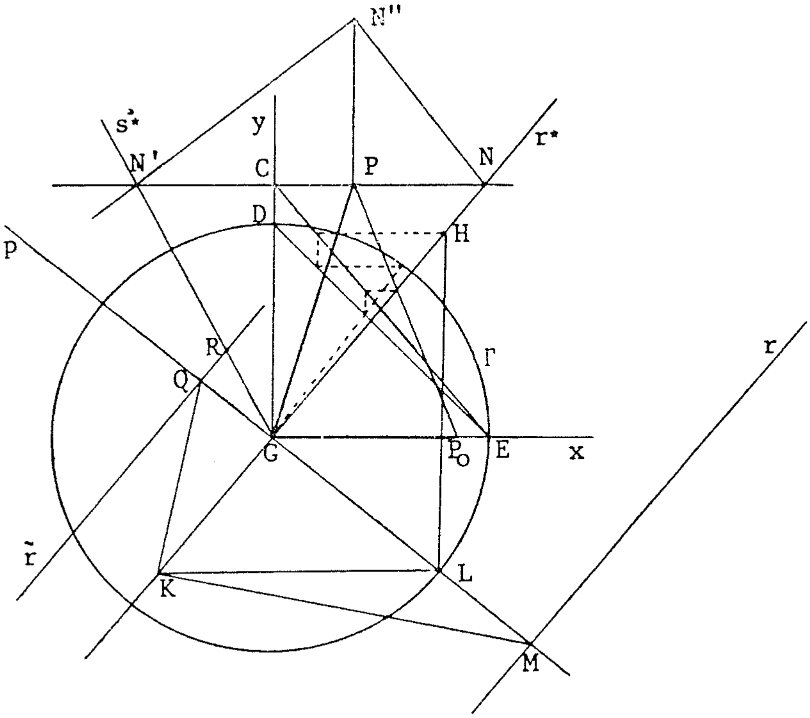

Figura 4

La costruzione di s^* sopra descritta può essere giustificata osservando che, se $y = nx$ è l'equazione di r^*, quella della retta coniugata s^* sarà ([2], pag. 326)

$$y = -(A + Fn)(F + Bn)^{-1}x.$$

Le ascisse dei punti N ed N' valgono pertanto

$$(5) \qquad x_N = n^{-1}(Am^{-1})^{1/2}, \qquad x_{N'} = -(Am^{-1})^{1/2}(F + Bn)(A + Fn)^{-1},$$

mentre

$$(6) \qquad x_P = F(Am)^{-1/2}, \qquad x_{P_0} = J(Am)^{-1/2}.$$

Dalle (5) e (6) segue allora

$$\overline{PN}\cdot\overline{PN'} = |(A+Fn)n^{-1}(Am)^{-1/2}|\,|nJ^2(Am)^{-1/2}(A+Fn)^{-1}| = J^2(Am)^{-1} = \overline{GP}_0^2\,,$$

e ciò giustifica il procedimento seguito per costuire N'.

Bibliografia

[1] O. Belluzzi, *Scienza delle Costruzioni* (I), Bologna 1966.
[2] L. Bianchi, *Lezioni di Geometria Analitica*, Pisa 1915.
[3] G. Ravera, *Una semplice soluzione di fondamentali problemi della Statica grafica*, Atti Acc. Lig. Sc. e Lett. **38** (1981).

Summary

A new graphic method relating to the determination of the radius of gyration for plane systems, already presented in a previous note by using Culmann's ellipse, is extended to the basic case in which a pair of conjugate diameters of this ellipse is known.

* * *