

PIERRE D O L B E A U L T (*)

Théorème de Plemelj en plusieurs variables

En 1908, dans \mathbb{C} , J. Plemelj [3] a établi le résultat suivant: étant donnée une fonction f assez régulière, définie sur une courbe V d'un ouvert U , par transformée de Cauchy $T(f)$ de f , on obtient une fonction F sur $U \setminus V$ admettant, de part et d'autre de V , des prolongements continus à V , F^+ et F^- , tel que $F^+ - F^- = f$, (\star) $F^+ + F^-$ étant la valeur principale de Cauchy de $T(f)$.

Ce théorème a été généralisé, dans un ouvert U de \mathbb{C}^n , à l'aide de la transformée de Bochner-Martinelli par Harvey et Lawson [3] (1975), la courbe étant remplacée par une hypersurface lisse V de U .

On se propose d'établir un théorème de même énoncé dans les deux cas suivants

(1) l'espace ambiant est une variété de Stein: c'est un travail récent [5] de Mme Laurent-Thiébaud (1982) qui utilise le noyau de Henkin-Leitner sur une variété de Stein [4] (1981)

(2) l'espace ambiant est un hyperplan réel de \mathbb{C}^n ; on utilise alors un noyau voisin de celui de Bochner-Martinelli.

Le seule hypothèse faite sur la fonction f donnée est d'être C^1 à support compact; l'hypothèse C^1 peut d'ailleurs être affaiblie en $f \in \text{Lip}_\alpha$ ($0 < \alpha < 1$); la fonction F est définie globalement sur l'ouvert $U \setminus V$ grâce à la définition globale du noyau et, dans le cas complexe, n'est pas holomorphe en général.

Pour terminer, on indiquera, selon [5], dans le cas (1), des généralisations aux cas où la donnée est une forme différentielle ou un courant d'ordre zéro.

La nouveauté par rapport aux résultats antérieurs, par exemple [1], est la construction explicite de la fonction F à l'aide de noyaux et satisfaisant à (\star).

(*) Adresse: Institut Mathématique, Université Paris VI, 34 Rue des Cordelières, 75013 Paris, France.

1 - Préliminaires: noyaux

1.1 - En 1943, Martinelli [6], puis Bochner [2] on introduit, dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ ($z_1, \dots, z_n; \zeta_1, \dots, \zeta_n$) le noyau suivant

$$k_z^{BM}(\zeta) = c_n \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \frac{\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}} d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}_j \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}_n,$$

où c_n est une constante convenable dépendant de n seul.

1.2 - En vue d'une solution du problème du d'' , Henkin et Leiterer [4] ont construit des noyaux sur une variété de Stein M , de dimension n , de la façon suivante. Soient $T(M)$ et $T^*(M)$ les espaces fibrés holomorphes tangent et cotangent à M ; on désigne par $\tilde{T}(M \times M)$, $\tilde{T}^*(M \times M)$ le fibré image réciproque par la première projection: $M \times M \rightarrow M$ de $T(M)$ et $T^*(M)$ respectivement. On désigne par (z, ζ) un point de $M \times M$.

Alors, il existe une section holomorphe $s: M \times M \rightarrow \tilde{T}(M \times M)$ telle que la restriction de s à la diagonale $\Delta(M)$ de $M \times M$ soit nulle et que $s(z, \cdot): M \rightarrow T_z(M)$ soit biholomorphe au voisinage de z ; cela résulte du plongement de la variété de Stein M dans \mathbf{C}^n et du théorème B sur les variétés de Stein.

Il résulte aussi du théorème B l'existence d'une fonction φ holomorphe sur $M \times M$, égale à 1 sur $\Delta(M)$ et dont la restriction à $M \times M \setminus \Delta(M)$ est une section du sous-faisceau \mathcal{F}_s du faisceau $\mathcal{O}_{M \times M}$ engendré par s . Il existe une application fibrée $\sigma: \tilde{T}(M \times M) \rightarrow \tilde{T}^*(M \times M)$, C^∞ antilinéaire et bijective sur chaque fibre telle que, \langle, \rangle désignant la dualité entre $\tilde{T}(M \times M)$ et $\tilde{T}^*(M \times M)$, $x^* \mapsto \langle x^*, \sigma^{-1}x^* \rangle^{\frac{1}{2}}$ soit une métrique hermitienne sur $\tilde{T}^*(M \times M)$; à $s(z, \zeta)$, on associe la section $\bar{s}(z, \zeta) = \sigma s(z, \zeta)$ de $\tilde{T}^*(M \times M)$; alors il existe un plus petit entier $\chi \geq 0$ tel que $\varphi^\chi(z, \zeta) \cdot \langle \bar{s}(z, \zeta), s(z, \zeta) \rangle^{-1}$ soit C^1 sur $M \times M \setminus \Delta(M)$.

On construit alors, par le procédé de Leray, à l'aide de s et \bar{s} , un noyau comme k_z^{BM} que l'on corrige par le facteur $\varphi^{\nu n}(z, \zeta)$ avec $\nu \geq \chi$; on le note $\Omega^0(\varphi^\nu, \bar{s}, s, z) = \Omega^0(z) = \Omega^0(\zeta, z) = \Omega^0(\cdot, z)$.

1.3 - On vérifie, comme pour le noyau $k_z^{BM}(\zeta)$, les propriétés suivantes:

- (1) $d\Omega^0(z) = d_\zeta \Omega^0(z, \zeta) = d'_\zeta \Omega^0(z, \zeta) = \delta_{\zeta=z}$ (mesure de Dirac au point $\zeta = z \in M$)
- (2) z étant fixé, pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $|\zeta - z| < \varepsilon$ (dans une carte), $\Omega^0(z, \zeta)$ est inchangé par $\zeta - z \mapsto -(\zeta - z)$, à une forme différentielle C^1 près
- (3) $\Omega^0(z, \zeta)$ a une singularité d'ordre $(2n - 1)$ sur $\Delta(M)$.

De (1) et (2) résulte

1.4 – Lemme. Soit Δ un domaine relativement compact de M , à bord de classe C^1 , alors

$$(a) \int_{\partial\Delta} \Omega^0(z) = 0 \quad \text{si } z \notin \bar{\Delta}, \quad (b) \int_{\partial\Delta} \Omega^0(z) = 1 \quad \text{si } z \in \Delta,$$

$$(c) \text{Vp} \int_{\partial\Delta} \Omega^0(z) = \frac{1}{2} \quad \text{si } z \in b\Delta,$$

Vp désignant la valeur principale de Cauchy dont on rappellera la définition en 2.1.

2 - Théorème de Plemelj sur une variété de Stein M [5]

2.1 – Théorème. Soient M une variété de Stein, U un ouvert de M , V une hypersurface C^1 orientée de U telle que $U \setminus V = U^+ \cup U^-$ où U^+ et U^- sont connexes et $bU^+ = V$. Soient $f \in C_0^1(V)$ (fonction C^1 à support compact dans V) et $F(z) = \int_V f(\zeta) \Omega^0(z, \zeta)$ pour $z \in U \setminus V$.

Alors $F|_{U^\pm}$ a une extension continue F^\pm à $U^\pm \cup V$ et, sur V , on a :

$$(4) F^+ - F^- = f; \quad F^+ + F^- = 2 \text{Vp} \int_V f(\zeta) \Omega^0(z, \zeta)$$

(5) pour tout compact $K \subset V$, il existe une constante C telle que, pour toute $f \in C_0^1(V)$, $\text{Supp } f \subset K$, on ait $|F^\pm|_{\infty, V} \leq C \|f\|_{C^1(V)}$.

$\Omega^0(z, \zeta)$ est le noyau de Henkin-Leiterer (1.2); $F(z)$ est la transformée de Bochner-Martinelli de f (pour le noyau $\Omega^0(z, \zeta)$ au lieu de k_z^{2M} dans C^n).

$\text{Vp} \int_V f(\zeta) \Omega^0(z, \zeta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{V \setminus U_\varepsilon(z)} f(\zeta) \Omega^0(z, \zeta)$ où $U_\varepsilon(z)$ est défini de la façon suivante: soit h une carte de M , centrée en z , dont le domaine est le voisinage W de z dans M , alors h est une application biholomorphe: $W \rightarrow h(W) \subset C^n$ et $U_\varepsilon(z) = h^{-1}(B(0, \varepsilon))$ où ε est assez petit pour que $B(0, \varepsilon) \subset h(W)$.

2.2 – Démonstration. On va établir (4) en chaque point $z_0 \in V$.

2.2.1 – Il suffit de considérer le cas où f a son support dans un voisinage arbitrairement petit de z_0 dans V ; en effet f est la somme d'une telle fonction et d'une fonction f_2 à support disjoint d'un voisinage de z_0 ; alors $F_2(z) = \int_V f_2(\zeta) \Omega^0(z, \zeta)$ est continue pour z dans un voisinage de z_0 dans M et f_2, F_2 vérifient (4) trivialement.

2.2.2 – Si $\text{Supp } f$ est assez petit, il existe un domaine $\Delta \subset\subset U^+$ avec $b\Delta$ de classe C^1 tel que $\text{Supp } f \subset b\Delta$.

2.2.3 – On a

$$\lim_{\substack{t \rightarrow z \\ t \notin b\Delta}} \int_{\zeta \in b\Delta} (f(\zeta) - f(z)) \Omega^0(t, \zeta) = \int_{b\Delta} (f(\zeta) - f(z)) \Omega^0(z, \zeta)$$

qui a un sens d'après (3).

(Cf. la démonstration du résultat analogue dans [7], § 5).

2.2.4 – Si Δ est un domaine à bord C^1 relativement compact dans une variété de Stein M , alors $F(z) = \int_{b\Delta} f(\zeta) \Omega^0(z, \zeta)$ a des extensions continues F^+ sur $\bar{\Delta}$ et F^- sur $M \setminus \Delta$ telles que $F^+|_{b\Delta} - F^-|_{b\Delta} = f$.

On a

$$\int_{\substack{b\Delta \\ t \notin b\Delta}} (f(\cdot) - f(z)) \Omega(t, \cdot) = F(t) - f(z) \int_{b\Delta} \Omega^0(t) = \begin{cases} F(t) - f(z) & \text{si } t \in \Delta \\ F(t) & \text{si } t \notin \bar{\Delta}, \end{cases}$$

d'après le Lemme 1.4.

D'après 2.2.3

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow z \\ t \in \Delta}} \int_{b\Delta} (f(\cdot) - f(z)) \Omega^0(t, \cdot) &= \lim_{\substack{t \rightarrow z \\ t \in \Delta}} F(t) - f(z) = \int_{b\Delta} (f(\cdot) - f(z)) \Omega^0(z, \cdot) \\ \lim_{\substack{t \rightarrow z \\ t \notin \bar{\Delta}}} \int_{b\Delta} (f(\cdot) - f(z)) \Omega^0(t, \cdot) &= \lim_{\substack{t \rightarrow z \\ t \notin \bar{\Delta}}} F(t) = \int_{b\Delta} (f(\cdot) - f(z)) \Omega^0(z, \cdot). \end{aligned}$$

Alors $F^+(z)$ et $F^-(z)$ existent et sont continues; en outre $F^+(z) - f(z) = F^-(z)$.

2.2.5. – Démonstration de (4)₂. Pour $z \in V$, on a

$$\text{Vp} \int_{\zeta \in V} f(\zeta) \Omega^0(z, \zeta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{V \setminus \bar{U}_\varepsilon(z)} (f(\zeta) - f(z)) \Omega^0(z, \zeta) + f(z) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{V \setminus \bar{U}_\varepsilon(z)} \Omega^0(z, \zeta).$$

La première limite existe et est égale à $\int (f(\zeta) - f(z)) \Omega^0(z, \zeta)$ à cause de (3) et, compte tenu du Lemme 1.4 (c) on a

$$\text{Vp} \int_{\zeta \in V} f(\zeta) \Omega^0(z, \zeta) = \int_V (f(\zeta) - f(z)) \Omega^0(z, \zeta) + \frac{1}{2} f(z).$$

Pour $\text{Supp } f$ assez petit, la démonstration de 2.2.4 fournit

$$F^+(z) + F^-(z) - f(z) = 2 \text{Vp} \int_{\zeta \in V} f(\zeta) \Omega^n(z, \zeta) - f(z).$$

2.2.6 - Il suffit de démontrer (5) pour K contenu dans un domaine de carte et assez petit et d'utiliser les expressions ci-dessus de $F^+(z) - f(z)$ et de $F^-(z)$.

3 - Théorème de Plemelj dans un hyperplan réel E de \mathbb{C}^n

Dans $\mathbb{C}^n(z_1, \dots, z_n)$, on considère l'hyperplan $E = \{z \in \mathbb{C}^n; \text{Im } z_1(z) = 0\}$; on pose $x_1 = \text{Re } z_1$, alors, dans E , on a les coordonnées (x_1, z_2, \dots, z_n) . On va définir dans E un noyau analogue à celui de Bochner-Martinelli dans \mathbb{C}^n à partir d'un champ de vecteurs à coefficients distributions dans E qu'appellera encore noyau, par la technique de [3].

3.1 - Noyaux dans E .

Dans E , toute forme différentielle est somme de formes différentielles homogènes en $dz_j, d\bar{z}_j, dx_1$ ($j = 2, \dots, n$) de degré p, q, r respectivement; r prend les valeurs 0 et 1; p, q varient de 0 à $n-1$. Pour toute forme homogène ψ , on appelle $D\psi$ la somme des termes de $d\psi$ dont le degré p en dz_j ($j = 2, \dots, n$) n'est pas augmenté par d . Alors si $d_x^n = \sum_{j=2}^n (\partial/\partial \bar{z}_j) d\bar{z}_j$, on a $D = d_x^n + (\partial/\partial x_1) dx_1$; on vérifie immédiatement que $D^2 = 0$.

Soit $K = K_1(\partial/\partial x_1) + \sum_{j=2}^n K_j(\partial/\partial \bar{z}_j)$ un champ de vecteurs à coefficients distributions dans E ; on identifiera les distributions aux courants de degré 0.

Tout courant u à support compact dans E , $u \in \mathcal{E}'(E)$ peut s'écrire $u = dx_1 \wedge u_1 + u_2$ où u_1 et u_2 sont indépendants de dx_1 .

$dx_1 \wedge u_1$ est somme de monômes qu'on note encore $dx_1 \wedge u_1$, avec $u_1 = u_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$ où I et J sont des multiindices (i_1, \dots, i_p) et (j_1, \dots, j_q) respectivement $dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}$; $d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$; on définit la convolution-contraction de K et $u_1 \wedge dx_1$ par

$$K \# u_1 \wedge dx_1 = K_1 * u_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J + \sum_{j_k \in J} (K_{j_k} * u_{IJ}) (-1)^{|I|+k} dx_1 \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_{J \setminus \{j_k\}}$$

* désignant le produit de convolution des coefficients; on définit de façon analogue $K \# u_2$ et, par linéarité, $K \# u$.

On pose $\text{Div } K = \partial K_1 / \partial x_1 + \sum_{j=2}^n \partial K_j / \partial \bar{z}_j$, qu'on appelle *D-divergence* de K .
Alors

Lemme. Pour tout $u \in \mathcal{E}'(E)$, on a: $D(K \# u) + K \# (Du) = \text{Div } K * u$.

Corollaire. Si $\text{Div } K = \delta_0$ (mesure de Dirac en 0), pour tout $u \in \mathcal{E}'(E)$, on a

$$u = D(K \# u) + K \# (Du) \quad (\text{formule d'homotopie pour } D).$$

3.2 - Noyau de Bochner-Martinelli K^{BM} .

Soient $z = (x_1, z_2, \dots, z_n) \in E$; $|z| = (x_1^2 + \sum_{j=2}^n z_j \bar{z}_j)^{\frac{1}{2}}$; on pose

$$K_1 = \frac{C}{|z|^{2n-1}} \frac{1}{2} x_1; \quad K_j = \frac{C}{|z|^{2n-1}} \bar{z}_j \quad (j = 2, \dots, n),$$

avec une constante C choisie plus loin. Par définition

$$K^{BM} = K_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^n K_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}.$$

Lemme. Pour un choix convenable de la constante C , on a $\text{Div } K^{BM} = \delta_0$, mesure de Dirac en 0.

Dans la suite on suppose C choisie comme dans le lemme.

Proposition. Si $u \in \mathcal{E}'(E)$, sans terme en dz_j et si $Du = 0$, alors $v = K^{BM} \# u \in \mathcal{E}'(E)$ est la solution à support compact unique de $Dv = u$.

Cela résulte de la formule d'homotopie pour D ; la compacité de v est prouvée en utilisant un autre noyau simple moins régulier que K^{BM} .

3.3 - Transformée de Bochner-Martinelli et théorème de Plemelj.

Soient U un ouvert de E , V une hypersurface C^1 orientée de U telle que $U \setminus V = U^+ \cup U^-$ où U^+ et U^- sont connexes et $bU^+ = V$ (avec orientation). Alors pour toute fonction $f \in C_0^1(V)$, la transformée de Bochner-Martinelli de f est

$$F(z) = K^{BM} \# (f[V])(z) = \int_V f k_z^{BM},$$

où $[V]$ est le courant d'intégration sur V et où

$$\begin{aligned} k_z^{BM}(\zeta) = k^{BM}(z, \zeta) &= \frac{C}{|\zeta - z|^{2n-1}} \left[\frac{1}{2} (\zeta_1 - x_1) d\zeta_2 \wedge \dots \wedge d\zeta_n \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge \dots \wedge \bar{\zeta}_n \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=2}^n (-1)^{j+1} \overline{(\zeta_j - z_j)} d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge \dots \wedge d\zeta_n \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{\zeta}_j} \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}_n \right], \end{aligned}$$

avec $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$. Alors, la propriété $\text{Div } K^{BM} = \delta_0$ entraîne

- (1)' $dk_z^{BM} = d_\zeta k_z^{BM} = D_\zeta k_z^{BM} = \delta_{\zeta=z}$
- (2)' z étant fixé k_z^{BM} est changé en son opposé par $(\zeta - z) \mapsto -(\zeta - z)$
- (3)' pour $\zeta = z$, la singularité de $k^{BM}(z, \zeta)$ est d'ordre $(2n - 2)$.

Alors, le procédé de démonstration de **2** se transporte dans ce cas et on a

3.4 - Théorème. *Dans les notations ci-dessus, pour toute $f \in C_0^1(V)$ et $F(z) = \int_V f(\zeta) k^{BM}(z, \zeta)$, $F|_{U^\pm}$ a une extension continue F^\pm à $U^\pm \cup V$ et, sur V*

$$F^+ - F^- = f; \quad F^+ + F^- = 2 \int_V f(\zeta) k^{BM}(z, \zeta),$$

pour tout compact K de V , il existe une constante C telle que, pour $\text{Supp } f \subset K$, on ait $\|F^\pm\|_{\infty, V} \leq C \|f\|_{C^0(V)}$.

4 - Généralisation aux formes différentielles et aux courants d'ordre 0 sur une variété de Stein M [5]

4.1 - Henkin et Leiterer [4] ont construit des noyaux globaux Ω_q^0 sur une variété de Stein M de sorte que, pour toute $(0, q)$ -forme $f \in C^1$ à support compact sur V , (i.e. la restriction à V d'un $(0, q)$ -forme sur M au voisinage de V), on définit la transformée de Bochner-Martinelli de f

$$F(z) = \int_{\zeta \in V} f(\zeta) \wedge \Omega_q^0(z, \zeta).$$

Alors, pour U et V comme dans **1**, $F|_{V^\pm}$ a un prolongement continu F^\pm à $U^\pm \cup V$ et $(F^+ - F^-)|_V = (-1)^q f_i$ modulo $d''\varrho$, $\varrho = 0$ étant une équation locale de V et f_i désignant la composante tangentielle complexe de f ; on a une expression de $(F^+ + F^-)|_V$ à l'aide d'une \int_V et une estimation.

4.2 - On obtient un théorème analogue pour les $(n, n - q - 1)$ -formes en utilisant la transformée

$$f \mapsto F(\zeta) = \int_{z \in V} f(z) \wedge \Omega_q^0(z, \zeta).$$

4.3 - Par dualité, on obtient un théorème pour les courants f sur V , d'ordre 0, de degré $2n - q - 1$.

Soit $i: V \rightarrow M$ l'injection canonique, si $i_* f = [i_* f]^{n, n-q}$, alors $F(z) = \langle f(\cdot), i^* \Omega_q^0(z, \cdot) \rangle$ admet des valeurs au bord vérifiant $vb_V^+ F - vb_V^- F = (-1)^{q+1} f$. On définit la valeur au bord comme suit.

Soit $\Delta = \{\varrho < 0; \varrho \in C^\infty; d\varrho \neq 0 \text{ sur } b\Delta\}$ un domaine lisse de M ; soient $b\Delta_\varepsilon = \{z \in M; \varrho(z) = \varepsilon\}$, $\varphi \in C_0^\infty(b\Delta)$, $\tilde{\varphi}$ un prolongement C^∞ de φ au voisinage de $b\Delta$; on pose $\varphi_\varepsilon = \tilde{\varphi}|_{b\Delta_\varepsilon}$; la fonction F admet une valeur au bord sur $b\Delta$ s'il existe un courant $T \in \mathcal{D}'(b\Delta)$ tel que $\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle F|_{b\Delta_\varepsilon}, \varphi_\varepsilon \rangle$.

Bibliographie

- [1] A. ANDREOTTI and C. D. HILL, *E. E. Levi convexity and the Hans Lewy Problem I*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **26** (1972), 325-363.
- [2] S. BOCHNER, *Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula*. Ann. of Math. (2) **44** (1943), 652-673.
- [3] R. HARVEY and H. B. LAWSON, *Boundaries of complex analytic varieties I*, Ann. of Math. **102** (1975), 233-290.
- [4] G. M. HENKIN and J. LEYFERER, *Global integral formulas for solving the $\bar{\partial}$ -equation on Stein manifolds*, Ann. Pol. Math. **39** (1981), 93-116.
- [5] C. LAURENT-THIEBAUT, *Formules intégrales et théorèmes du type Bochner sur une variété de Stein*, C. R. Acad. Sci. **295** (1982), 661-664; *Théorèmes de type Plemelj et expression intégrale d'une fonction holomorphe à valeur au bord donnée sur une variété de Stein*, (prépublication, 1983).
- [6] E. MARTINELLI, *Sopra una dimostrazione di R. Fueter per un teorema di Hartogs*. Comment. Math. Helv. **15** (1943), 340-349.
- [7] E. MARTINELLI, *Sulla determinazione di una funzione analitica di più variabili complesse in un campo, assegnatane la traccia sulla frontiera*, Ann. di Mat. pura ed appl. (4) **55** (1961), 191-202.
- [8] J. PLEMELJ, *Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend*, Monatsch. Math. und Phys. **19** (1908), 205-210.

* * *