Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 493-500

ALBERTO VEZZANI (*)

Due generalizzazioni delle nozioni di campo irrotazionale e di campo di Killing (**)

1 - Introduzione

Come è noto, vari Autori hanno stabilito interessanti proprietà globali per i campi vettoriali irrotazionali e di Killing su di una varietà riemanniana compatta. In questo lavoro, che va considerato nella stessa linea di ricerca, si propongono due diverse generalizzazioni dei campi sopra accennati.

La prima, che conduce alle nozioni di campo *quasi irrotazionale* e *quasi Killing*, nasce dal confronto tra la misura del campo Du, ottenuto a partire da un campo vettoriale u per derivazione covariante, e le misure dei campi εDu, σDu, dedotti da Du mediante emisimmetrizzazione, simmetrizzazione (v. **3**). Le stesse nozioni si possono anche introdurre in relazione al segno di un opportuno invariante, denotato con $M(Du, Du)$.

La considerazione, per ogni campo vettoriale u, dei campi tensoriali $D(\varepsilon Du)$, $D(\sigma Du)$ suggerisce la seconda generalizzazione (campi *debolmente irrotazionali*, *debolmente Killing*) (v. **5**).

Per i campi vettoriali, introdotti in **3**, **5**, si ottengono vari risultati: i teoremi 5, 6, 7 di **5**, nell'ipotesi che la varietà riemanniana V sia compatta, ed i teoremi 2, 3, 4 di **3** nell'ipotesi che V sia anche orientabile. Come casi particolari si ritrovano risultati noti relativi ai campi irrotazionali e di Killing.

Anche il teorema 1 di **3** estende un noto risultato ad una coppia di campi, irrotazionale il primo, di Killing generalizzato il secondo.

Varie osservazioni, sempre in **3** e **5**, completano la ricerca.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Progetto « Geometria delle Varietà Differenziabili » finanziato dal Ministero della Pubblica Istruzione. — Ricevuto: 7-III-1983.

L'ultima parte del lavoro (v. **7**, **8**) è dedicata allo studio dei campi vettoriali *ricorrenti*. Si stabiliscono alcuni risultati, che mettono in luce analogie di comportamento tra questi campi ed altri considerati nei numeri precedenti.

2 - Generalità

Siano V una varietà riemanniana di dimensione n e di classe C^3, $\mathscr{T}^r_s$ lo spazio vettoriale dei campi tensoriali di tipo (r, s) su V, g il campo simmetrico di $\mathscr{T}^0_2$ di classe C^2, che definisce la metrica su V (¹).

Se u, v, w sono campi vettoriali di $\mathscr{T}^0_1$, si indica con $v \cdot w$ il *prodotto scalare* di v, w e con $\operatorname{mis} u = (u \cdot u)^{1/2}$ la *misura* di u nella metrica definita da g. Analogamente, se a, b, c sono campi tensoriali di $\mathscr{T}^0_2$, per indicare il *prodotto scalare* di b, c e la *misura* di a si usano i simboli $b \cdot c$ e $\operatorname{mis} a = (a \cdot a)^{1/2}$ (²).

Conviene osservare che, indicati con σ, ε gli omomorfismi di simmetrizzazione, emisimmetrizzazione di $\mathscr{T}^0_2$, risulta

$$\operatorname{mis}^2 a = \operatorname{mis}^2 \sigma a + \operatorname{mis}^2 \varepsilon a \quad (^3) . \tag{1}$$

È utile per il seguito considerare l'espressione

$$M(a, a) = \operatorname{mis}^2 \sigma a - \operatorname{mis}^2 \varepsilon a . \tag{2}$$

3 - Campi quasi irrotazionali, quasi Killing, equidistanti

Sia u un campo vettoriale covariante di V di classe C^1 e sia Du il campo tensoriale di $\mathscr{T}^0_2$ ottenuto da u per derivazione covariante nella connessione di Levi-Civita.

Ciò premesso, u si dice *quasi irrotazionale*, *quasi Killing*, *equidistante*, secondo che si abbia rispettivamente

$$\begin{gathered} \operatorname{mis}^2(\varepsilon Du) \leqslant \tfrac{1}{2} \operatorname{mis}^2 Du , \qquad \operatorname{mis}^2(\sigma Du) \leqslant \tfrac{1}{2} \operatorname{mis}^2 Du , \\ \operatorname{mis}^2(\varepsilon Du) = \operatorname{mis}^2(\sigma Du) = \tfrac{1}{2} \operatorname{mis}^2 Du . \end{gathered} \tag{3}$$

(¹) Per le nozioni fondamentali sulle varietà ved. per es. S. Kobayashi and K. Nomizu, [**1**]; K. Yano, [**4**]₁.

(²) Per il prodotto scalare di tensori con ugual numero di indici ved. per es. K. Yano, [**4**]₂, p. 4.

(³) Basta notare che $\sigma a \cdot \varepsilon a = 0$.

Le nozioni introdotte generalizzano rispettivamente quelle di campo irrotazionale, di Killing, parallelo, che corrispondono nell'ordine a $\varepsilon Du = 0$, $\sigma Du = 0$, $Du = 0$ (4).

Si dirà poi *quasi armonico* un campo quasi irrotazionale e solenoidale (a divergenza nulla).

Tenendo presenti le (1), (2) si riconosce subito che le (3) *sono rispettivamente equivalenti alle*

$$M(Du, Du) \geqslant 0\,, \qquad M(Du, Du) \leqslant 0\,, \qquad M(Du, Du) = 0\,. \tag{4}$$

È utile per il seguito notare che, se u è un campo di *Killing generalizzato* (*conformal Killing*), risulta

$$M(Du, Du) = \frac{1}{n}\,\mathrm{div}^2 u - \mathrm{mis}^2(\varepsilon Du)\,. \tag{5}$$

Con riferimento ai campi vettoriali accennati sussistono alcuni teoremi. Precisamente, nell'ipotesi che la varietà V sia *compatta*, si ha

Teor. 1. *Siano v, w campi di classe C^2, irrotazionale il primo, di Killing generalizzato il secondo, e sia m il campo definito da* $m = \big([(n-2)/n]v\big)\,\mathrm{div}\,w - w\,\mathrm{div}\,v$. *Se* $\mathrm{div}\,m \geqslant 0$ *ovvero* $\mathrm{div}\,m \leqslant 0$, *il prodotto scalare $v\cdot w$ è costante in ogni componente di V connessa per archi ed m è solenoidale.*

Se poi la varietà V è *compatta* e *orientabile*, indicato con R il campo tensoriale di Ricci, risulta

Teor. 2. *Un campo vettoriale u di classe C^1, che su V soddisfi alla condizione* $\mathrm{mis}^2(\sigma Du) + R(u, u) \leqslant 0$, *è necessariamente armonico.*

Teor. 3. *Non esistono su V campi vettoriali u quasi armonici, non equidistanti, per i quali si abbia $R(u, u) \geqslant 0$.*

Teor. 4. *Non esistono su V campi vettoriali u quasi Killing, non equidistanti e solenoidali, per i quali si abbia $R(u, u) \leqslant 0$.*

Il teorema 1 generalizza un noto risultato per una coppia di campi, uno armonico, l'altro di Killing (5). Il teorema 2 indica una condizione sufficiente perchè un campo sia armonico. Infine i teoremi 3 e 4 estendono noti risultati per campi armonici e di Killing, rispettivamente (6).

---

(4) Uno studio di questi e di altri campi vettoriali notevoli su di una varietà riemanniana è contenuto in G. B. Rizza [**2**].

(5) Ved. K. Yano and S. Bochner [**5**], Th. 2.12, p. 43.

(6) Ved. per es. K. Yano [**4**]$_2$, Th. 2.3, Th. 3.3, pp. 42, 44. I risultati ora citati valgono anche senza l'ipotesi di orientabilità (cfr. K. Yano and S. Bochner [**5**], Th. 2.9, Th. 2.10, pp. 37, 39).

4 - Dimostrazioni

Prima di stabilire il teorema 1, conviene ricordare che per le forme differenziali di classe C^2 su V (in particolare per le funzioni (0-forme) e per i campi vettoriali covarianti (1-forme)) l'*operatore di Laplace* Δ è definito da

$$\Delta = d\delta + \delta d\,, \tag{6}$$

essendo d il differenziale esterno e δ il codifferenziale (7).

Ciò premesso, per ogni coppia v, w di campi covarianti di classe C^2 su V sussiste la *relazione*

$$\Delta(v\cdot w) = v\cdot\Delta w + w\cdot\Delta v - 2\,Dv\cdot Dw - 2\,R(v, w)\,, \tag{7}$$

cui si perviene con calcolo diretto tenendo presente la (1.4) a p. 40 di [**4**]$_2$.

Ora, le ipotesi del teorema 1 relative a v, w si traducono nella

$$\varepsilon\,Dv = 0\,, \qquad \sigma\,Dw = \frac{1}{n}\,g\;\mathrm{div}\,w\,, \tag{8}$$

da cui segue subito

$$Dv\cdot Dw = \frac{1}{n}\,\mathrm{div}\,v\;\mathrm{div}\,w\,. \tag{9}$$

Successivamente, utilizzando la (8) e la (2.4) a p. 9 di [**4**]$_1$, si perviene senza difficoltà a

$$\Delta v = -\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,v\,, \qquad \Delta w = \frac{n-2}{n}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,w + 2\,R(w)\,, \tag{10}$$

dove $R(w)$ indica il corrispondente di w nell'omomorfismo di $\mathcal{T}^0_1$ definito dal campo tensoriale di Ricci (8). In conclusione, in virtù delle (9), (10), la (7) diviene

$$\Delta(v\cdot w) = \frac{n-2}{n}\,v\cdot\mathrm{grad}\;\mathrm{div}\,w - w\cdot\mathrm{grad}\;\mathrm{div}\,v - \frac{2}{n}\,\mathrm{div}\,v\;\mathrm{div}\,w\,. \tag{11}$$

---

(7) Per le definizioni di d, δ ved. per es. K. Yano [**4**]$_2$, pp. 9, 10. Si noti che, per una funzione f, Δf differisce per il segno dal classico operatore di Laplace.

(8) Ved. per es. G. B. Rizza [**2**], p. 148.

D'altra parte, il calcolo diretto permette di riconoscere che il secondo membro della (11) coincide con $\operatorname{div} m$. Di conseguenza basta applicare il Lemma di Bochner [9] alla funzione $v \cdot w$ per giungere alla tesi del teorema 1.

Per stabilire gli altri teoremi è essenziale la *relazione*

$$\int_V \left(M(Du, Du) + R(u, u) - \operatorname{div}^2 u\right) \mathrm{d}V = 0 , \tag{12}$$

che sussiste per ogni campo vettoriale covariante u di V [10].

Ciò premesso, se $\operatorname{mis}^2(\sigma Du) + R(u, u) \leqslant 0$, dalla (12), tenuto conto della (2), segue $\operatorname{mis}^2(\varepsilon Du) = \operatorname{div}^2 u = 0$, cioè l'armonicità di u. Ciò prova il Teor. 2. In modo analogo, tenendo presenti le (4), si ottengono i teoremi 3 e 4.

5 - Campi debolmente irrotazionali, debolmente Killing

Una diversa generalizzazione delle nozioni di campo irrotazionale e di campo di Killing è la seguente.

Un campo vettoriale covariante u di classe C^2 si dice *debolmente irrotazionale*, *debolmente Killing* se soddisfa, rispettivamente, alla condizione

$$D(\varepsilon Du) = 0 , \qquad D(\sigma Du) = 0 . \tag{13}$$

Analogamente, un campo u si dice *debolmente solenoidale* se soddisfa alla condizione

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0 . \tag{14}$$

In particolare, u è *debolmente armonico*, se è debolmente irrotazionale e debolmente solenoidale.

Nell'ipotesi che la varietà V sia *compatta* e *orientabile*, sussistono le osservazioni:

O_1 - *Ogni campo debolmente armonico è necessariamente armonico*; *ogni campo debolmente Killing è necessariamente di Killing.*

O_2 - *Un campo debolmente irrotazionale e debolmente Killing è necessariamente un campo parallelo.*

Sia ora V una varietà *compatta* (non necessariamente orientabile). Sussistono alcuni risultati:

---

(9) Ved. K. Yano and S. Bochner [**5**], Th. 2.3, p. 30.

(10) La (12), a parte le diverse notazioni, coincide con la (2.69) a p. 51 di [**5**].

Teor. 5. *Siano v, w due campi vettoriali di classe C^2, debolmente armonico il primo, debolmente Killing il secondo. Se su V risulta $Dv\cdot Dw \geqslant 0$ ovvero $Dv\cdot Dw \leqslant 0$, allora $v\cdot w$ è costante in ogni componente di V connessa per archi e risulta $Dv\cdot Dw = 0$.*

Teor. 6. *Non esistono su V campi vettoriali v debolmente armonici, non paralleli, per i quali si abbia $R(v, v) \geqslant 0$.*

Teor. 7. *Non esistono su V campi vettoriali w debolmente Killing, non paralleli, per i quali si abbia $R(w, w) \leqslant 0$.*

Prima di passare alle dimostrazioni conviene notare che i teoremi 5, 6, 7 generalizzano noti risultati relativi ai campi armonici e di Killing ([11]). L'osservazione O_1 mostra che la generalizzazione proposta all'inizio di questo numero perde in parte interesse nel caso delle varietà compatte e orientabili.

6 - Dimostrazioni

Siano v, w due campi covarianti, debolmente armonico il primo, debolmente Killing il secondo. Si noti anzitutto che *ogni campo debolmente Killing è debolmente solenoidale*. È ora immediato riconoscere che v, w soddisfano rispettivamente alle (2.17), (2.19) di [**5**]. Poichè queste relazioni sono, rispettivamente, equivalenti alle (2.18), (2.20), in virtù dei teoremi 2.15, 2.16 del volume citato si perviene subito ad O_1.

Se u è un campo soddisfacente alle ipotesi di O_2, dalle (13) segue $DDu = 0$ e di qui l'asserto in virtù del teorema 1.7 a p. 25 di [**4**]$_1$.

Nelle ipotesi del teorema 5, i campi v, w soddisfano rispettivamente alle (2.18), (2.20) di [**5**] ([12]). Tenuta presente la (1.4) a p. 40 di [**4**]$_2$, risulta quindi

$$\Delta v = 0\,, \qquad \Delta w = 2R(w)\,. \tag{15}$$

Di conseguenza la (7) di **4** si riduce a $\Delta(v\cdot w) = -2Dv\cdot Dw$. Basta ora applicare il Lemma di Bochner per stabilire la tesi del teorema 5.

Per ottenere i teoremi 6, 7, si noti che, in virtù della (15), dalla (7) segue

$$\Delta(v\cdot v) = -2Dv\cdot Dv - 2R(v, v)\,, \qquad \Delta(w\cdot w) = -2Dw\cdot Dw + 2R(w, w)\,.$$

Si perviene quindi all'asserto, utilizzando ancora il Lemma di Bochner.

([11]) Ved. [**5**], Th. 2.12, Th. 2.9, Th. 2.10, pp. 43, 37, 39. Per il primo caso si osservi che, se v è armonico e w è di Killing, risulta $Dv\cdot Dw = 0$.

([12]) Ciò appare dalla dimostrazione di O_1.

7 - Campi ricorrenti

In questo numero e nel successivo si considerano campi vettoriali ricorrenti. Questi campi, che generalizzano i campi paralleli, hanno alcune proprietà che li avvicinano ai campi introdotti nei numeri precedenti.

Un campo vettoriale covariante u di classe C^1 si dice *ricorrente*, rispetto ad un campo vettoriale covariante k di classe C^0, se sussiste la relazione

$$Du = k \otimes u \quad (^{13}) . \tag{16}$$

Tenuto conto delle definizioni introdotte in **2**, si ha subito

$$\mathrm{mis}^2 Du = \mathrm{mis}^2 k \ \mathrm{mis}^2 u \,, \qquad M(Du, Du) = \mathrm{div}^2 u \,. \tag{17}$$

Ciò premesso, sussistono le osservazioni:

O_3 - *Ogni campo ricorrente è quasi irrotazionale. In particolare è equidistante, se e solo se è solenoidale. Infine è parallelo, se e solo se è armonico.*

O_4 - *Se* $n \geqslant 2$, *non esistono campi ricorrenti di Killing generalizzati non paralleli.*

Se la varietà V è supposta *compatta*, si ha

Teor. 8. *Sia* u *un campo di classe* C^2, *ricorrente rispetto ad un campo* k *di classe* C^1. *Se l'espressione* $2\,\mathrm{mis}^2 k + \mathrm{div}\, k$ *è non negativa ovvero non positiva su* V, u *è un campo parallelo.*

Infine se la varietà V è *compatta* e *orientabile*, risulta

Teor. 9. *Non esistono campi ricorrenti* u, *per i quali si abbia* $R(u, u) > 0$, *ovvero* $R(u, u) < 0$.

L'osservazione O_3 collega la nozione classica di campo ricorrente con le nuove nozioni introdotte in **3**. Il teorema 8 fornisce una caratterizzazione dei campi paralleli tra i campi ricorrenti. Infine il teorema 9 è analogo ai teoremi 3, 4 di **3** ed ai teoremi 6, 7 di **5**.

8 - Dimostrazioni

Le prime due proposizioni di O_3 sono diretta conseguenza della $(17)_2$, e

(13) Ved. per es. T. J. Willmore [**3**], p. 245.

delle $(4)_1$, $(4)_3$ di **3**. Tenute presenti le (1), (2) di **2**, si ha poi

$$2 \operatorname{mis}^2(\varepsilon Du) = \operatorname{mis}^2 Du - M(Du, Du) .$$

In virtù della $(17)_2$ si prova anche la terza proposizione.

All'osservazione O_4 si perviene subito confrontando la $(17)_2$ con la (5) di **3** e tenendo conto dell'ultima parte della O_3.

Per stabilire il teorema 8 occorre notare che per il campo u risulta

$$\Delta u = - u(\operatorname{div} k + \operatorname{mis}^2 k) + R(u) , \tag{18}$$

onde, tenute presenti la (7) di **4** e la $(17)_1$ si perviene a

$$\Delta(u \cdot u) = - 2 \operatorname{mis}^2 u (2 \operatorname{mis}^2 k + \operatorname{div} k) . \tag{19}$$

Il Lemma di Bochner permette di concludere che $\operatorname{mis}^2 u$ è costante, quindi $D(\operatorname{mis}^2 u) = 0$. Segue subito l'asserto in virtù della (16).

Infine la tesi del teorema 9 segue subito dalla (12) di **4**, tenendo conto della $(17)_2$.

Bibliografia

[1] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* (I), Interscience Publ., New York 1963.

[2] G. B. Rizza, *Campi irrotazionali e di Killing su di una varietà compatta*, Rendiconti di Matematica **19** (1960), 143-167.

[3] T. J. Willmore, *An introduction to differential geometry*, Clarendon Press, Oxford 1959.

[4] K. Yano: $[\cdot]_1$ *Differential geometry on complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, Oxford 1965; $[\cdot]_2$ *Integral formulas in Riemannian Geometry*, Dekker, New York 1970.

[5] K. Yano and S. Bochner, *Curvature and Betti numbers*, Univ. Press, Princeton 1953.

Summary

Two generalizations of the classical notions of Killing vector fields and of irrotational ones on a Riemannian manifold are introduced. Some global results are obtained and known theorems can be derived as special cases.

Recurrent vector fields are also studied. Some results show a sort of analogy between recurrent fields and other fields considered in the paper.

* * *

Finito di stampare il 10 Giugno 1984 Tipografia Compositori Bologna