Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 457-464

SALVATORE SESSA (*)

Una generalizzazione di un teorema del punto fisso dovuto a R.M. Bianchini Tiberio (**)

1 - In [**1**] (pp. 306-308) R. M. Bianchini Tiberio dimostra il seguente

TEOREMA 1. *Siano $C(x_0, \varrho)$ il cerchio chiuso, di centro x_0 e raggio $\varrho > 0$, di uno spazio metrico completo (S, d) e τ una applicazione di $C(x_0, \varrho)$ in S godente della proprietà*

(A) *esistono tre funzioni continue e crescenti ψ_1, ψ_2, ψ_3 di $[0, 2\varrho]$ in $[0, +\infty[$ soddisfacenti alle condizioni:*

(a₁) $$\psi_1(r)r + \psi_2(r)r + \psi_3(r) < r, \quad \forall r \in]0, 2\varrho],$$

(a₂) $$d(\tau(x), \tau(y)) \leqslant \max\{\psi_1(d(x, y))\, d(x, \tau(x)) + \psi_2(d(x, y))\, d(y, \tau(y)),$$
$$\psi_1(d(x, y))\, d(y, \tau(y)) + \psi_2(d(x, y))\, d(x, \tau(x))\} + \psi_3(d(x, y))\}, \quad \forall (x, y) \in C^2(x_0, \varrho)$$

(a₃) $$d(x_0, \tau(x_0)) \leqslant \frac{\varrho - \psi_3(\varrho)}{1 + \psi_1(\varrho) + \psi_2(\varrho)}.$$

Allora esiste in $C(x_0, \varrho)$ un unico punto fisso di τ ed esso attrae x_0 (1).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Facoltà di Architettura, Via Monteoliveto 3, 80134 Napoli, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 21-VI-1982.

(1) Qualunque siano lo spazio metrico S, la parte non vuota C di S, l'applicazione τ di C in S e i punti z e x di S, useremo in questa nota la locuzione *z attrae x* per indicare la circostanza che la successione $(\tau^n(x))_{n\in N}$ ($N =$ l'insieme degli interi positivi) ha senso e converge verso x; se X è una parte non vuota di S diremo che *un punto attrae X* se attrae ogni punto di X.

Scopo di questa nota è di fornire una generalizzazione (cfr. teor. 5) del teorema suddetto usando procedimenti analoghi a quelli seguiti in una mia precedente nota [**4**].

2 – Utilizzeremo la seguente definizione data da M. L. Diviccaro ([2]).

Def. Siano (S, d) uno spazio metrico e τ una applicazione di S in sè. Si dice che *la coppia* (x, d), $x \in S$, *è τ-ammissibile* se la successione $(\tau^n(x))_{n\in N}$ converge verso un punto fisso di τ, sempreché sia di Cauchy.

Ci sarà inoltre utile, per poter enunciare concisamente qualche condizione, la definizione seguente ([3]).

Def. Siano U un insieme non vuoto, I un intervallo non vuoto di R ed α una funzione di $U \times I$ in $[0, 1[$. Si dice che α *gode della proprietà* $\mathscr{P}_+$ (risp. $\mathscr{P}$) in un punto t di R che sia di accumulazione a destra (risp. di accumulazione) per I se esistono due numeri reali positivi h e k, il secondo dei quali minore di 1, tali che si abbia $t \leqslant r < t + h \overset{r\in I}{\Longrightarrow} \alpha(u, r) \leqslant k \quad \forall u \in U$ (*risp.* $|r - t| < h \overset{r\in I}{\Longrightarrow} \alpha(u, r) \leqslant k \ \forall u \in U$).

Seguendo un ragionamento analogo a quello fatto per dimostrare il Teorema 4 di [**4**], non è difficile provare il seguente teorema orbitale, più generale dello stesso Teorema 4 di [**4**].

Teorema 2. *Siano* (S, d) *uno spazio metrico,* τ *una applicazione di* S *in sè,* x *un punto di* S *tale che la coppia* (x, d) *sia* τ*-ammissibile e risulti* $\lim\limits_n d(\tau^n(x), \tau^{n+1}(x)) = 0$; *il punto* x *goda inoltre della proprietà*

(B_x) *esistono due funzioni limitate* α_1, α_2 *di* $S^2 \times]0, +\infty[$ *in* $[0, +\infty[$, *una funzione* α_3 *di* $S^2 \times]0, +\infty[$ *in* $[0, 1[$ *godente della proprietà* $\mathscr{P}_+$ *in ogni punto di* $]0, +\infty[$ *ed una funzione* f *di* $]0, +\infty[$ *in* $]0, +\infty[$ *infinitesima in* 0, *continua a destra e semicontinua inferiormente, tali che*

$$f(d(\tau(a), \tau(b))$$

$$\leqslant \alpha_1(a, b, d(a, b)) f(d(a, \tau(a))) + \alpha_2(a, b, d(a, b)) f(d(b, \tau(b)))$$
$$+ \alpha_3(a, b, d(a, b)) f(d(a, b)) \ \ \forall (a, b) \in T_x^2 \colon \ a \neq \tau(a) \neq \tau(b) \neq b \, ,$$

dove $T_x = \{\tau^n(x), n \in N\}$.

([2]) Cfr. [**2**], def. a pag. 65.
([3]) Cfr. [**3**], def. a pag. 29.

Allora il punto x è attratto da un punto fisso di τ.

Fruendo del Teorema 2, dimostriamo ora il seguente teorema, che assorbe il Teorema 6 di [4] ([4]).

Teorema 3. *Siano (S, d) uno spazio metrico completo e τ una applicazione di S in sè, godente di almeno una delle seguenti proprietà.*

(C) *Esistono tre funzioni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ di $s^2 \times]0, +\infty[$ in $[0, 1[$ soddisfacenti alle condizioni:*

(c_1) *almeno una delle funzioni α_1, α_2 ha estremo superiore minore di 1 o gode della proprietà $\mathscr{P}_+$ in 0;*

(c_2) *la funzione $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ha codominio incluso in $[0, 1[$ e gode della proprietà $\mathscr{P}_+$ in ogni punto di $]0, +\infty[$ ed una funzione continua e crescente f di $[0, +\infty[$ in $[0, +\infty[$, nulla solo in 0, tali che*

(c_3) $f(d(\tau(x), \tau(y))) \leqslant \alpha_1(x, y, d(x, y))\, f(d(x, \tau(x))) + \alpha_2(x, y, d(x, y))$

$\cdot f(d(y, \tau(y))) + \alpha_3(x, y, d(x, y))\, f(d(x, y)$ $\forall (x, y) \in S^2 : x \neq y$.

(C′) *Esistono tre funzioni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ di $S^2 \times]0, +\infty[$ in $[0, 1[$ soddisfacenti alla condizione* (c_1) *ed alla seguente*

(c_2') *la funzione $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ha codominio incluso in $[0, 1[$ e gode della proprietà $\mathscr{P}$ in ogni punto di $]0, +\infty[$ ed una funzione f di $[0, +\infty[$ in $[0, +\infty[$, nulla solo in 0, continua a destra e semicontinua inferiormente, soddisfacente alla condizione*

(c_3') *per ogni sottoinsieme A non limitato di $[0, +\infty[$, $f(A)$ è anch'esso un sottoinsieme non limitato di $[0, +\infty[$, tali che valga la* (c_3).

Allora esiste un unico punto fisso di τ ed esso attrae S.

Dim. A norma del Teorema 2, basta provare che: (i) la coppia (x, d) è τ-ammissibile $\forall x \in S$, (ii) $\lim_n d(\tau^n(x), \tau^{n+1}(x)) = 0$ $\forall x \in S$, (iii) esiste al più un punto fisso di τ.

Orbene, con ragionamenti analoghi a ragionamenti svolti nel corso della dimostrazione del Teorema 6 di [4] si provano agevolmente la (ii), la (iii) e,

---

([4]) Per quanto riguarda la verifica, nelle ipotesi del Teorema 6 di [4], delle condizioni del Teorema 3, va tra l'altro tenuto presente che è lecito supporre che i valori delle funzioni λ_1 e λ_2 di cui al Teorema 6 di [4] siano minori di 1/2 (cfr. [4], nota (7)).

limitatamente ad ognuno dei due casi seguenti $\sup \alpha_1 < 1$, $\sup \alpha_2 < 1$, anche la (i).

Passiamo allora a dimostrare la (i) nel caso in cui una delle funzioni α_1 e α_2 goda della proprietà $\mathscr{P}_+$ in 0. Supposto che si tratti della α_2 (ma il ragionamento può svolgersi analogamente nel caso della α_1), esistono due numeri reali positivi h e k, il secondo dei quali minore di 1, tali che $\alpha_2(x, y, r) < k$, $\forall (x, y) \in S^2$ e $\forall r \in]0, h[$, e conseguentemente risulta

$$f\big(d(\tau(x), \tau(y))\big) \leqslant f\big(d(x, \tau(x))\big) + f\big(d(x, y)\big) + kf\big(d(y, \tau(y))\big) , \tag{2.1}$$

per ogni $(x, y) \in S^2$ tale che $d(x, y) < h$ (5).

Ciò premesso, e posto

$$x_n = \tau^n(x) \ \forall n \in N \cup \{0\} \quad \text{e} \quad \delta_n = d(x_{n-1}, x_n) \ \forall n \in N ,$$

per provare la (i) basta osservare che se la successione $(x_n)_{n\in N}$ è di Cauchy, detto z il suo limite, in virtù della (2.1) esiste un $m \in N$ tale che

$$f\big(d(x_{n+1}, \tau(z))\big) \leqslant f(\delta_{n+1}) + f\big(d(x_n, z)\big) + kf\big(d(z, \tau(z))\big) \qquad \forall n \geqslant m ,$$

e quindi risulta (6)

$$f\big(d(z, \tau(z))\big) \leqslant \limsup_n f\big(d(x_{n+1}, \tau(z))\big) \leqslant kf\big(d(z, \tau(z))\big) ,$$

da cui consegue $\tau(z) = z$.

Il teorema è così completamente dimostrato.

6 – Dato un sottoinsieme non vuoto Γ di uno spazio metrico (S, d) e con riferimento ad una applicazione τ di Γ in S, denotiamo con (C_Γ) (risp. (C'_Γ)) la proprietà che si ottiene modificando la (C) (risp. (C')) del Teorema 3 sostituendo Γ^2 a S^2. Ciò premesso, è facile provare, con ragionamenti analoghi a quelli seguiti nella dimostrazione del Teorema 3, il teorema seguente, che assorbe lo stesso Teorema 3.

---

(5) La (2.1) è evidente se $x = y$, e nel caso $x \neq y$ si ottiene subito tenendo presente la (C_3).

(6) Tanto nel caso della (C) quanto nel caso della (C'), la f è semicontinua inferiormente in $d(z, \tau(z))$ e continua in 0.

Teorema 4. *Siano* (S, d) *uno spazio metrico completo,* Γ *un sottoinsieme chiuso non vuoto di* S (*o più in generale,* (S, d) *uno spazio metrico e* Γ *un suo sottoinsieme completo*) *e* τ *una applicazione di* Γ *in* S *godente di una almeno delle proprietà* (C_Γ) *e* (C'_Γ).

Allora, se non è vuoto l'insieme X *dei punti* x *di* Γ *tali che la successione* $(\tau^n(x))_{n\in N}$ *abbia senso, esiste in* Γ *un unico punto fisso di* τ *ed esso attrae* X.

Dal Teorema 4 si deduce il seguente

Teorema 5. *Siano* $C(x_0, \varrho)$ *il cerchio chiuso di centro* x_0 *e raggio* $\varrho > 0$, *dello spazio metrico completo* (S, d) (7) *e* τ *un'applicazione di* $C(x_0, \varrho)$ *in* S *godente della proprietà*

(D) *esistono tre funzioni* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *di* $C^2(x_0, \varrho)\times]0, 2\varrho]$ *in* $[0, 1[$ *ed una funzione continua e crescente* f *di* $[0, +\infty[$ *in* $[0, +\infty[$, *nulla solo in* 0, *soddisfacenti alle condizioni*:

(d_1) *almeno una delle funzioni* α_1, α_2 *ha estremo superiore minore di* 1 *o gode della proprietà* $\mathscr{P}_+$ *in* 0;

(d_2) *la funzione* $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ *ha codominio incluso in* $[0, 1[$, *gode della proprietà* $\mathscr{P}_+$ *in ogni punto di* $]0, 2\varrho[$ *ed è tale che* $\sup\limits_{(x,y)\in C^2(x_0,\varrho)} \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i(x, y, 2\varrho) < 1$;

$$(d_3)\quad f(d(\tau(x), \tau(y))) \leqslant \alpha_1(x, y\, d(x, y))\, f(d(x, \tau(x))) + \alpha_2(x, y, d(x, y))\, f(d(y, \tau(y)))$$

$$+ \alpha_3(x, y, d(x, y))\, f(d(x, y)) \quad \forall (x, y) \in C^2(x_0, \varrho) \colon x \neq y,$$

e, posto $X = C^2(x_0, \varrho)\times]0, \varrho]$, $f_0 = f(d(x_0, \tau(x_0)))$, *ad una almeno delle tre condizioni seguenti*:

($d_{4,1}$) f *è strettamente crescente e* $r \leqslant f(r)$ $\forall r \in [0, +\infty[$,

$$\sup_{(x,y,r)\in X} (\alpha_3(x, y, r) f(r)) \leqslant \varrho\,, \qquad f_0 \leqslant \frac{\varrho - \sup\limits_{(x,y,r)\in X} (\alpha_3(x, y, r) f(r))}{1 + \sup\limits_{(x,y,r)\in X} \sum\limits_{i=1}^{2} \alpha_i(x, y, r)}\,,$$

---

(7) Più in generale, con riferimento ad uno spazio metrico (S, d) non necessariamente completo, si può supporre che sia completo l'indicato cerchio chiuso di (S, d).

($d_{4,2}$) *f è strettamente crescente,*

$$f(r+s)\leqslant f(r)+f(s)\quad \forall (r,s)\in[0,+\infty[^2,\quad f_0\leqslant \frac{f(\varrho)-\sup\limits_{(x,y,r)\in X}\big(\alpha_3(x,y,r)f(r)\big)}{1+\sup\limits_{(x,y,r)\in X}\sum\limits_{i=1}^{2}\alpha_i(x,y,r)}\,,$$

($d_{4,3}$) $r\leqslant f(r)\quad \forall r\in[0,+\infty[,\quad \sum\limits_{i=1}^{3}\sup\limits_{(x,y,r)\in X}\alpha_i(x,y,r)\leqslant 1$ *ed esiste* $j\in\{1,2\}$ *tale che*

$$\sup_{(x,y,r)\in X}\alpha_j(x,y,r)<1\,,\qquad f_0\leqslant \varrho\,\frac{1-\sum\limits_{i=1}^{3}\sup\limits_{(x,y,r)\in X}\alpha_i(x,y,r)}{1-\sup\limits_{(x,y,r)\in X}\alpha_j(x,y,r)}\,.$$

Allora, esiste in $C(x_0,\varrho)$ un unico punto fisso di τ ed esso attrae x_0.

Dim. Per ogni $i\in\{1,2,3\}$, prolunghiamo su $C^2(x_0,\varrho)\times[0,2\varrho]$ la funzione α_i associando il numero 0 ad ogni punto $(x,y,0)$ con $(x,y)\in C^2(x_0,\varrho)$ e denotate per comodità con $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ le funzioni prolungate, osserviamo che la (D) continua ad essere verificata e anzi la diseguaglianza di cui alla (d_3) sussiste per ogni $(x,y)\in C^2(x_0,\varrho)$.

Com'è facile verificare, a norma del Teorema 4 basta dimostrare che

(a) *ha senso la successione* $(\tau^n(x_0))_{n\in N}$. A tal riguardo, denotato con δ_1 il numero $d(x_0,\tau(x_0))$ e posto, per ogni intero $n>1$ tale che $\tau^n(x_0)$ abbia senso

$$x_{n-1}=\tau^{n-1}(x_0)\qquad\text{e}\qquad \delta_n=d\big(x_{n-1},\tau(x_{n-1})\big)\,,$$

consideriamo dapprima il caso in cui è soddisfatta una delle condizioni ($d_{4,1}$), ($d_{4,2}$).

In tal caso osserviamo anzitutto che la (a) è equivalente alla validità della

$$(3.1)_n\qquad \big(\tau^m(x_0)\text{ ha senso e } d\big(x_0,\tau^m(x_0)\big)\leqslant\varrho\quad \forall m\in\{1,2,\dots,n\}\big)$$

per ogni $n\in N$.

Orbene, poichè la $(3.1)_1$ è vera [8], basta provare che, se n è un intero posi-

[8] Risulta infatti $f(\delta_1)\leqslant f(\varrho)$ e da ciò segue, per la stretta crescenza di f, che $\delta_1\leqslant\varrho$.

tivo per il quale vale la $(3.1)_n$, risulta

$$d(x_0,\, \tau^{n+1}(x_0)) \leqslant \varrho\,. \tag{3.2}$$

Intanto, per ogni $m \in \{1, \dots, n\}$, in virtù delle condizioni (d_3) e (d_2) risulta

$$f(\delta_{m+1}) \leqslant \frac{\alpha_1(x_{m-1},\, x_m,\, \delta_m) + \alpha_2(x_{m-1},\, x_m,\, \delta_m)}{1 - \alpha_2(x_{m-1},\, x_m,\, \delta_m)} \cdot f(\delta_m) \leqslant f(\delta_m) \leqslant f_0\,.$$

Conseguentemente, ancora in virtù della (d_3), si ha

$$\begin{gathered} f(\delta_1) + f\big(d(\tau(x_0),\, \tau(x_n))\big) \\ \leqslant \Big(1 + \sup_{(x,y,r)\in X} \sum_{i=1}^{2} \alpha_i(x, y, r)\Big) f_0 + \sup_{(x,y,r)\in X} \big(\alpha_3(x, y, r) f(r)\big)\,. \end{gathered}$$

La (3.2) è allora vera, in quanto, nel caso della $(d_{4,1})$ risulta

$$d(x_0,\, \tau^{n+1}(x_0)) \leqslant \delta_1 + d\big(\tau(x_0),\, \tau(x_n)\big) \leqslant f(\delta_1) + f\big(d(\tau(x_0),\, \tau(x_n)\big) \leqslant \varrho\,,$$

e nel caso della $(d_{4,2})$ risulta

$$f\big(d(x_0,\, \tau^{n+1}(x_0))\big) \leqslant f(\delta_1) + f\big(d(\tau(x_0),\, \tau(x_n)\big) \leqslant f(\varrho)$$

e cioè, per la stretta crescenza di f, $d(x_0,\, \tau^{n+1}(x_0)) \leqslant \varrho$.

Dimostriamo infine la (a) nel caso in cui è soddisfatta la $(d_{4,3})$.
In tal caso, perverremo alla (a), e cioè alla validità, per ogni $n \in N$, della

$$\tau^n(x_0) \text{ ha senso}\,, \tag*{$(3.3)_n$}$$

dimostrando, ancora ragionando per ricorrenza, che per ogni $n \in N$ sussistono la $(3.3)_n$ e le seguenti

$$f(\delta_n) \leqslant \alpha^{n-1}(1 - \alpha)\,\varrho\,, \tag*{$(3.4)_n$}$$

$$d(x_0,\, x_n) \leqslant (1 - \alpha^n)\,\varrho\,, \tag*{$(3.5)_n$}$$

nelle quali

$$\alpha = \frac{\sup\limits_{(x,y,r)\in X} \alpha_i(x, y, r) + \sup\limits_{(x,y,r)\in X} \alpha_3(x, y, r)}{1 - \sup\limits_{(x,y,r)\in X} \alpha_j(x, y, r)}\,,$$

con $i, j \in \{1, 2\}$ ed $i \neq j$.

Orbene, la $(3.3)_1$ è evidente e le $(3.4)_1$, $(3.5)_1$ sono vere, in quanto dalla $(d_{4,3})$ si ricava $\delta_1 \leqslant f(\delta_1) = f_0 \leqslant (1-\alpha)\varrho$.

Sia allora n un intero positivo tale che valgano le $(3.3)_n$, $(3.4)_n$, $(3.5)_n$. Ovviamente, risultando $d(x_0, x_n) \leqslant \varrho$, vale la $(3.3)_{n+1}$ in virtù della condizione (d_3) opportunamente applicata, e della (d_2) risulta inoltre $f(\delta_{n+1}) \leqslant \alpha f(\delta_n)$, e da ciò segue, per la $(3.4)_n$, la $(3.4)_{n+1}$ nonchè, conseguentemente, la $(3.5)_{n+1}$ risultando

$$\begin{aligned} d(x_0, x_{n+1}) &\leqslant d(x_0, x_n) + \delta_{n+1} \leqslant d(x_0, x_n) + f(\delta_{n+1}) \\ &\leqslant (1-\alpha^n)\varrho + \alpha^n(1-\alpha)\varrho = (1-\alpha^{n+1})\varrho . \end{aligned}$$

Il Teorema 5 è così completamente dimostrato. Esso, come andiamo a verificare, generalizza il Teorema 1.

Nelle ipotesi del Teorema 1, per una semplice osservazione messa in luce da R. M. Bianchini Tiberio all'inizio della dimostrazione del Teorema 1, esistono due funzioni μ e ν di $C^2(x_0, \varrho)$ in $\{1, 2\}$ tali che $\mu + \nu = 3$ e

$$\begin{aligned} d(\tau(x), \tau(y)) \leqslant \psi_{\mu(x,y)}(d(x,y))\, d(x, \tau(x)) + \psi_{\nu(x,y)}(d(x,y))\, d(y, \tau(y)) \\ + \psi_3(d(x,y)) \quad \forall (x,y) \in C^2(x_0, \varrho) . \end{aligned}$$

Risulta allora verificata la (D) del Teorema 5 quando si considerino le funzioni $f, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ definite ponendo $f(r) = r \quad \forall r \in [0, +\infty[$, nonchè, per ogni $(x, y, r) \in C^2(x_0, \varrho) \times]0, 2\varrho]$:

$$\alpha_1(x,y,r) = \psi_{\mu(x,y)}(r) , \quad \alpha_2(x,y,r) = \psi_{\nu(x,y)}(r) , \quad \alpha_3(x,y,r) = \psi_3(r)/r \ (^9) .$$

Bibliografia

[1] R. M. Bianchini Tiberio, *Un teorema di esistenza di soluzioni di una classe di problemi ai limiti non lineari*, Matematiche (Catania) **28** (1977), 305-315.

[2] M. L. Diviccaro, *Un teorema orbitale di punto fisso*, Matematiche (Catania) **32** (1977), 63-69.

[3] S. Reich, *Fixed points of contractive functions*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **5** (1972), 26-42.

[4] S. Sessa, *Un teorema orbitale di punto fisso ed una sua conseguenza*, Matematiche (Catania) (in corso di stampa).

Summary

In this paper the author generalizes some results of [4] *and a fixed point theorem of R. M. Bianchini Tiberio.*

---

(9) Risultano verificate tanto la $(d_{4,1})$ quanto la $(d_{4,2})$.

* * *