Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 391-401

GIANCARLO CANTARELLI (*)

Metodo per lo studio della stabilità dei moti merostatici generalizzati (**)

1 - Condizioni sufficienti per la stabilità dei moti merostatici generalizzati

Consideriamo un sistema olonomo *reonomo* S, cioè un sistema materiale soggetto a vincoli olonomi dipendenti dal tempo, bilaterali e lisci, con $n+m$ gradi di libertà ($n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$). Scegliamo una $(n+m)$-upla di coordinate lagrangiane indipendenti $\boldsymbol{q}^T = (q_1, \ldots, q_n)$, $\boldsymbol{z}^T = (z_1, \ldots, z_m)$ e supponiamo che le m coordinate $z_1, \ldots, z_m$ siano *ignorabili* (chiameremo invece *posizionali* le n coordinate $q_1, \ldots, q_n$), cioè tali che non compaiono nella funzione di Lagrange di S

$$L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{z}}) \tag{1.1}$$

$$= \tfrac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \dot{\boldsymbol{z}}^T \boldsymbol{B}^T(t, \boldsymbol{q})\,\dot{\boldsymbol{q}} + \tfrac{1}{2}\dot{\boldsymbol{z}}^T \boldsymbol{C}(t, \boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{z}} - \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{q}) - \dot{\boldsymbol{z}}^T \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{q}) - \Pi(t, \boldsymbol{q})\,.$$

Tutte le funzioni delle variabili $(t, \boldsymbol{q})$ che compaiono nella lagrangiana (1.1), sono definite e di classe $\mathscr{C}^1$ nell'insieme $I \times \Omega$, dove $I = (\tau, \infty)$ con $\tau \in \mathbb{R}$ ed Ω è un sottoinsieme aperto e connesso di $\mathbb{R}^n$ contenente l'origine. Precisamente: la matrice quadrata $\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{q})$ di ordine n, la matrice rettangolare $\boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{q})$ $n \times m$, la matrice quadrata $\boldsymbol{C}(t, \boldsymbol{q})$ di ordine m, i vettori colonna $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{q})$ $n \times 1$, $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{q})$ $m \times 1$, e la funzione scalare $\Pi(t, \boldsymbol{q})$ che è l'energia potenziale *generalizzata* di S. Inoltre sul sistema reonomo considerato agisce una sollecitazione dissipativa « ridotta alle coordinate non ignorabili », cioè con compo-

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Ricevuto: 12-V-1982.

nenti lagrangiane relative alle coordinate ignorabili identicamente nulle, mentre le rimanenti n, relative alle coordinate posizionali, sono funzioni continue $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$, e con potenza $\boldsymbol{Q}^T\dot{\boldsymbol{q}} \leqslant 0$. Supponiamo infine che tutte le funzioni considerate siano sufficientemente regolari in modo da assicurare l'unicità delle soluzioni delle equazioni di Lagrange di S.

Le m coordinate ignorabili danno luogo ad altrettanti integrali primi dei momenti generalizzati

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{z}}} \equiv \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{q}) + \dot{\boldsymbol{z}}^T \boldsymbol{C}(t, \boldsymbol{q}) - \boldsymbol{f}^T(t, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{c}^T, \tag{1.2}$$

dove $\boldsymbol{c}^T = (c_1, \ldots, c_m)$ sono m costanti arbitrarie. La (1.2) è risolubile rispetto alle velocità ignorabili (come conseguenza dell'indipendenza delle coordinate lagrangiane)

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{f} - \boldsymbol{B}^T \dot{\boldsymbol{q}}) \,. \tag{1.3}$$

Purtroppo l'integrale primo (1.2) dipende esplicitamente dal tempo e non è adatto alla costruzione della funzione di Liapunov del tipo $\max\{V(t, \boldsymbol{x}), U(t, \boldsymbol{x})\}$, dove $U(t, \boldsymbol{x})$ è un integrale primo scalare che deve soddisfare alla condizione A di $[\mathbf{1}]_1$. Conviene quindi passare alle equazioni di Routh, le quali posseggono m integrali primi indipendenti dal tempo. La funzione di Routh, che è per definizione

$$R(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{c}) = [L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{z}}} \dot{\boldsymbol{z}}]_{\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{f} - \boldsymbol{B}^T \dot{\boldsymbol{q}})} = R_2 + R_1 + R_0 \,, \tag{1.4}$$

ha la seguente espressione

$$R_2(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \tfrac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T [\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^T] \dot{\boldsymbol{q}} \,, \quad R_1(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{c}) = [(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{f})^T \boldsymbol{C}^{-1} B^T - \boldsymbol{g}^T] \dot{\boldsymbol{q}}, \tag{1.5}$$

$$R_0(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{c}) = -\Pi(t, \boldsymbol{q}) - \tfrac{1}{2} (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{f})^T \boldsymbol{C}^{-1} (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{f}) \,.$$

Supponiamo che il sistema di Routh possegga una soluzione « statica », cioè del tipo

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{0} \,, \qquad \dot{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{0} \,, \qquad \boldsymbol{c} = \bar{\boldsymbol{c}} \qquad \forall t \geqslant t_0 \in I \,, \tag{1.6}$$

alla quale corrisponde la seguente soluzione delle equazioni di Lagrange di S

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{0} \,, \qquad \dot{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{0} \,, \qquad \dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{C}_0^{-1}(\bar{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{f}_0) \qquad \forall t \geqslant t_0 \,, \tag{1.7}$$

dove $C_0^{-1} = C^{-1}(t, \mathbf{0})$, $f_0 = f(t, \mathbf{0})$, che è un *moto merostatico generalizzato* di S [**1**]$_1$. La stabilità (secondo Liapunov) della soluzione (1.7) rispetto alle variabili $\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{z}}$ (la cosiddetta stabilità *ridotta*) è riconducibile allo studio della stabilità della soluzione corrispondente (1.6) del sistema di Routh. In generale la stabilità non è invariante rispetto al cambiamento di variabili (1.2)-(1.3) (che trasforma le equazioni di Lagrange in quelle di Routh), però sussistono alcune proprietà che sono state stabilite in ([**1**]$_1$, p. 54) e che utilizzeremo nel seguito. Ci limitiamo dunque a studiare la stabilità secondo Liapunov della soluzione $\boldsymbol{q}(t) \equiv \mathbf{0}$, $\dot{\boldsymbol{q}}(t) \equiv \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ del sistema di Routh, avendo posto $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{c} - \bar{\boldsymbol{c}}$. Indichiamo con $\|\boldsymbol{\beta}\| = \sqrt{\beta_1^2 + \ldots + \beta_m^2}$ la norma euclidea del vettore $\boldsymbol{\beta}$ e con $S_\varrho^* = \{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^m \colon \|\boldsymbol{\beta}\| < \varrho\}$ l'intorno sferico dell'origine dello spazio dei parametri, e con $\|\boldsymbol{q}\|$ e $\|\dot{\boldsymbol{q}}\|$ le norme euclidee dei vettori $\boldsymbol{q}$ (coordinate posizionali) e $\dot{\boldsymbol{q}}$ (velocità posizionali) rispettivamente, e con $S_q (\subset \Omega)$, $S_{\dot{q}}$ due sfere aperte con centro nell'origine dei rispettivi spazi vettoriali.

Nel presente lavoro introduciamo la funzione $W = W(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\beta})$ così definita

$$
\begin{aligned}
(1.8)\qquad W &= [-R_0(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{c}) + R_0(t, \mathbf{0}, \boldsymbol{c})]_{c=\bar{c}+\beta} \\
&= \Pi(t, \boldsymbol{q}) - \Pi(t, \mathbf{0}) + \tfrac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{f})^T C^{-1}(\bar{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{f}) - \tfrac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{f}_0)^T C_0^{-1}(\bar{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{f}_0) \\
&\quad + \boldsymbol{\beta}^T[C^{-1}(\bar{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{f}) - C_0^{-1}(\bar{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{f}_0)] + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^T[C^{-1} - C_0^{-1}]\,\boldsymbol{\beta}\,,
\end{aligned}
$$

la quale differisce dalla funzione $\mathscr{W}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\beta}) = [-R_0(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{c}) + R_0(t, \mathbf{0}, \bar{\boldsymbol{c}})]_{c=\bar{c}+\beta}$ considerata nei lavori [**1**]$_{1,2}$, ed ha il grande vantaggio su quest'ultima di non contenere termini lineari nelle variabili $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\beta}$ (come si riconosce dal suo sviluppo, cfr. la (2.4) del prossimo paragrafo). Su questa osservazione è basato il metodo (n. **2**) per determinare un'opportuna funzione scalare $\lambda = \lambda(t)$ soddisfacente alla condizione (iv) del seguente teorema

Teorema. *Se sono soddisfatte le seguenti condizioni*

(i) *la forma quadratica* $R_2(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ *è definita positiva in* $\dot{\boldsymbol{q}}$ $(\forall \boldsymbol{q} \in S_q)$,

(ii) *le derivate parziali* $(\partial/\partial\boldsymbol{\beta}) W(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\beta})$ *sono limitate in* $I \times S_q \times S_\varrho^*$,

(iii) *la funzione* $W(t, \boldsymbol{q}, \mathbf{0})$ *è definita positiva in* $\boldsymbol{q}$,

(iv) $\exists$ *una funzione scalare* $\lambda = \lambda(t) \geqslant 0$, $\forall t \in I$, *e una costante* $k > 0$, *tale che nell'insieme* $I \times S_q \times S_{\dot{q}} \times S_\varrho^*$ *si abbia*

$$
(1.9)\qquad Q^T \dot{\boldsymbol{q}} - \frac{\partial}{\partial t}(R_2 + R_1) + \frac{\partial W}{\partial t}(t, \boldsymbol{q}\ \boldsymbol{\beta}) + \lambda(t)\,[R_2 + W(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\beta}) - k\|\boldsymbol{\beta}\|^2] \leqslant 0,
$$

il moto merostatico generalizzato (1.7) *è stabile rispetto alle* $\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ (coordinate e velocità posizionali). *Se inoltre sono soddisfatte le ulteriori condizioni*

(v) *i coefficienti della forma quadratica* $R_2(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ *sono funzioni limitate in* $I \times S_q$, *e le derivate parziali* $(\partial/\partial \boldsymbol{q})W(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{0})$ *sono limitate in* $I \times S_q$,

(vi) *gli integrali primi* (1.2) *sono uniformemente continui rispetto a* $t \in I$, *in corrispondenza alla* (1.7), *e se la funzione* (1.3) *è uniformemente continua rispetto a* $t \in I$, *in corrispondenza alla* (1.6),

allora il moto merostatico generalizzato (1.7) *è uniformemente stabile rispetto a tutte le variabili* $\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{z}}$.

Il teorema si dimostra prendendo come funzione di Liapunov max $\{R_2(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + W(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\beta}),\ k\|\boldsymbol{\beta}\|^2\}$, e verificando che sono soddisfatte tutte le ipotesi del Corollario 5.1 [**1**]$_1$. In particolare, essendo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[R_2(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + W(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\beta})] = \boldsymbol{Q}^T \dot{\boldsymbol{q}} - \frac{\partial}{\partial t}(R_2 + R_1) + \frac{\partial W}{\partial t}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\beta}), \tag{1.10}$$

si riconosce che se è soddisfatta la condizione (iv) del nostro teorema, dalla (1.9) segue che la derivata della funzione ausiliaria $R_2 + W$ è semi-definita negativa nel sottoinsieme di $I \times S_q \times S_{\dot{q}} \times S_\varrho^*$ dove si ha $R_2 + W \geqslant k\|\boldsymbol{\beta}\|^2$, che coincide proprio con la condizione (iii) del corollario 5.1 (cfr. [**1**]$_1$, p. 74).

La funzione $\lambda = \lambda(t)$ è un moltiplicatore di Lagrange, perchè la condizione (iv) esprime che la (1.10) possiede un *massimo vincolato* in corrispondenza all'origine ($\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$). Ricordiamo che la condizione (iv) sulla derivata della funzione ausiliaria, facente intervenire il moltiplicatore $\lambda = \lambda(t)$, è stata introdotta per la prima volta in [**1**]$_2$.

2 - Metodo per determinare il moltiplicatore $\lambda = \lambda(t)$

La difficoltà maggiore che si incontra nell'utilizzare il Teorema stabilito nel precedente n. **1**, consiste nel verificare la condizione (iv) sulla derivata della funzione ausiliaria $R_2 + W$. Nel presente paragrafo forniamo un metodo che permette di determinare il moltiplicatore $\lambda = \lambda(t)$ soddisfacente alla condizione (1.9) del Teorema, partendo da ipotesi « minimali » sulla derivata della funzione ausiliaria (atte ad assicurare soltanto la stabilità *condizionata* della soluzione « statica » (1.6) del sistema di Routh, precisamente la stabilità rispetto alle *sole* perturbazioni che lascino inalterato il valore $\bar{\boldsymbol{c}}$ delle costanti degli integrali dei momenti), limitandoci a considerare il caso in cui il carattere di definitezza (o semi-definitezza) in segno sia *riconoscibile sulle derivate seconde.* È quindi opportuno stabilire un lemma che valga per il caso più generale di funzioni dipendenti esplicitamente dal tempo.

Consideriamo ad esempio una funzione scalare $V(t, \boldsymbol{x})$ definita e continua in $I \times S_\varrho$, dove $S_\varrho = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| < \varrho\}$, con $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, il cui sviluppo inizia con una forma quadratica

$$V(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \mathscr{R}(t, \boldsymbol{x}) \,, \tag{2.1}$$

dove $\mathscr{R}(t, \boldsymbol{x})$ è il resto, e la matrice $\boldsymbol{A}(t)$ della forma quadratica è simmetrica e continua $\forall t \in I$. Per riconoscere la definitezza in segno di $V(t, \boldsymbol{x})$ non basta limitarsi a considerare il segno della forma quadratica $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$, perchè, al variare del tempo, il resto $\mathscr{R}(t, \boldsymbol{x})$ potrebbe assumere valori tanto grandi da predominare sulla forma quadratica (anche se, $\forall t \in I$ fissato, l'ordine di infinitesimo di $\mathscr{R}(t, \boldsymbol{x})$ per $\|\boldsymbol{x}\| \to 0$ è superiore al secondo). Il seguente lemma fornisce delle condizioni sufficienti affinchè la funzione (2.1) sia definita positiva (o sia semplicemente positiva).

Lemma. *Se la funzione* (2.1) *soddisfa alle seguenti condizioni in* $I \times S_\varrho$

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \geqslant \alpha(t)\|\boldsymbol{x}\|^2 \ \text{(1)}, \qquad |\mathscr{R}(t, \boldsymbol{x})| \leqslant h(t)\|\boldsymbol{x}\|^2, \tag{2.2}$$

unitamente ad una delle due

(i) $\alpha(t) > h(t)$ $\forall t \in I$,

(i)′ $\alpha(t) > 0$ $\forall t \in I$; $\alpha(t) \to 0$, $h(t) \to 0$ *per* $t \to \infty$, *e l'ordine di infinitesimo di* $\alpha(t)$ *è inferiore di quello di* $h(t)$ (oppure uguale, ma con $\lim_{t\to\infty} h(t)/\alpha(t) < 1$), *allora la funzione* $V(t, \boldsymbol{x})$ *è semi-definita positiva.*

Se invece sono soddisfatte le seguenti condizioni

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x} \geqslant \alpha^* \|\boldsymbol{x}\|^2 \quad \text{in } I \times \mathbb{R}^n, \text{ con } \alpha^* = \text{cost.} > 0\,, \\ &\lim_{\boldsymbol{x}\to 0} \frac{\mathscr{R}(t, \boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2} = 0 \quad \text{uniformemente rispetto a } t \in I, \end{aligned} \tag{2.3}$$

la funzione $V(t, \boldsymbol{x})$ *è definita positiva.*

Infatti dalla (2.2) segue che $V(t, \boldsymbol{x}) \geqslant \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} - |\mathscr{R}(t, \boldsymbol{x})| \geqslant [\alpha(t) - h(t)]\|\boldsymbol{x}\|^2$ in $I \times S_\varrho$ e se inoltre è soddisfatta la (i), $V(t, \boldsymbol{x})$ è *strettamente positiva* $\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, ma ciò non è sufficiente ad assicurare che $V(t, \boldsymbol{x})$ sia definita positiva (ci vuole l'ulteriore condizione $\alpha(t) - h(t) \geqslant k > 0$, dove k è una costante). Se invece

(1) La migliore stima si ottiene prendendo $\alpha(t) = \min_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$.

della (i), è soddisfatta la (i)$'$, si ha $V(t, \boldsymbol{x}) > 0$, $\forall \boldsymbol{x} \in S_\varrho - \{\boldsymbol{0}\}$, $\forall t \geqslant T$, per T sufficientemente grande, e in questo caso $V(t, \boldsymbol{x})$ è *soltanto* semi-definita positiva, poichè $\alpha(t) - h(t) \to 0$ per $t \to \infty$. Infine se è soddisfatta la (2.3), per $\varepsilon = \alpha^*/2$, $\exists \delta_* > 0$ tale che nell'insieme $I \times S_{\delta_*}$ si abbia $|\mathscr{R}(t, \boldsymbol{x})| \leqslant (\alpha^*/2)\|\boldsymbol{x}\|^2$ e quindi $V(t, \boldsymbol{x}) \geqslant (\alpha^*/2)\|\boldsymbol{x}\|^2$. Osserviamo che la condizione $(2.3)_2$ risulta soddisfatta se la funzione $V(t, \boldsymbol{x})$ possiede le derivate terze rispetto ad $x_1, \ldots, x_n$, continue e limitate in $I \times S_\varrho$, essendo in tal caso $|\mathscr{R}(t, \boldsymbol{x})| \leqslant L\|\boldsymbol{x}\|^3$, con $L = \text{cost.} > 0$, per la forma del resto di Lagrange.

Supponiamo che la funzione W, definita mediante la (1.8), possegga le derivate seconde rispetto alle coordinate posizionali $\boldsymbol{q}$, continue, ed indichiamo con $\boldsymbol{F}(t) = \frac{1}{2}\|(\partial^2 W/\partial q_i \partial q_j)_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0},\, \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}}\|$ la matrice simmetrica $n \times n$, e con $\boldsymbol{G}(t) = \left(\partial(\bar{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{f})^T C^{-1}/\partial \boldsymbol{q}\right)_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}}$ la matrice rettangolare $n \times m$. Allora lo sviluppo della W, arrestato ai termini del secondo ordine, è il seguente

$$W(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{F}(t) \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{G}(t) \boldsymbol{\beta} + [> 2]\,, \tag{2.4}$$

dove col simbolo $[> 2]$ abbiamo indicato i termini d'ordine superiore al secondo in $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\beta}$. Limitiamoci, per semplicità, a considerare il caso in cui si abbia $\boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{q}) \equiv \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{q}) \equiv \boldsymbol{0}$. Si ha quindi $R_1 \equiv 0$, e la forma quadratica R_2 diventa $R_2 = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$. Supponiamo che si abbia

$$c_2\|\dot{\boldsymbol{q}}\|^2 \geqslant \tfrac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{A}_0(t)\dot{\boldsymbol{q}} \geqslant c_1\|\dot{\boldsymbol{q}}\|^2\,, \qquad c_4\|\boldsymbol{q}\|^2 \geqslant \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{q} \geqslant c_3\|\boldsymbol{q}\|^2\,, \tag{2.5}$$

dove abbiamo posto $\boldsymbol{A}_0(t) = \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{0})$ e c_1, c_2, c_3, c_4 sono delle costanti > 0, e che inoltre sia

$$\tfrac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T[\boldsymbol{D}(t) - \dot{\boldsymbol{A}}_0(t)]\dot{\boldsymbol{q}} \leqslant -\mu(t)\|\dot{\boldsymbol{q}}\|^2\,, \qquad \boldsymbol{q}^T \dot{\boldsymbol{F}}(t)\boldsymbol{q} \leqslant -\nu(t)\|\boldsymbol{q}\|^2 \text{ (2)}\,, \tag{2.6}$$

essendo $\mu(t) > 0$, $\nu(t) > 0$, $\forall t \in I$, ed avendo indicato con $\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{D}(t)\dot{\boldsymbol{q}}$ la forma quadratica con cui inizia lo sviluppo della potenza dissipativa. La (2.6) esprime la condizione che la parte quadratica della derivata della funzione ausiliaria $R_2 + W$, *calcolata per* $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$, è strettamente negativa $\forall(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \neq \boldsymbol{0}$. Il problema consiste nel trovare un'opportuna funzione $\lambda = \lambda(t) \geqslant 0$ soddisfacente alla condizione (1.9) del Teorema (per qualsiasi valore di $\boldsymbol{\beta}$).

Mediante le (2.5), (2.6) ed utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, è possibile maggiorare i termini del secondo ordine della funzione che compare

---

(2) Per il significato delle funzioni $\mu(t)$, $\nu(t)$ si veda la nota (1).

al primo membro della (1.9) nel seguente modo

$$\begin{aligned}(2.7)\qquad & \tfrac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T[\boldsymbol{D}(t)-\dot{\boldsymbol{A}}_0(t)]\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{q}^T\dot{\boldsymbol{F}}(t)\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}^T\dot{\boldsymbol{G}}(t)\boldsymbol{\beta}+\lambda(t)\{\tfrac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{A}_0(t)\dot{\boldsymbol{q}}\\ & +\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{\beta}-k\|\boldsymbol{\beta}\|^2\}\leqslant-\|\dot{\boldsymbol{q}}\|^2[\mu(t)-c_2\lambda(t)]\\ & -\|\boldsymbol{q}\|^2[\nu(t)-c_4\lambda(t)]+\|\boldsymbol{q}\|\|\boldsymbol{\beta}\|[\|\dot{\boldsymbol{G}}(t)\|+\lambda(t)\|\boldsymbol{G}(t)\|]-\lambda(t)k\|\boldsymbol{\beta}\|^2,\end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con $\|\boldsymbol{G}\|$, $\|\dot{\boldsymbol{G}}\|$ le norme delle matrici rettangolari $\boldsymbol{G}$, $\dot{\boldsymbol{G}}$, rispettivamente $\left(\|\cdot\|=\sqrt{\sum_{h,k}\alpha_{hk}^2}\right)$. Condizione necessaria affinchè la forma quadratica maggiorante sia, $\forall t\in I$ fissato, definita negativa, è che si abbia $\mu(t)>c_2\lambda(t)$ e $\nu(t)>c_4\lambda(t)$. Scegliamo dunque la funzione $\lambda(t)$ così definita

$$(2.8)\qquad \bar{\lambda}(t)=\varepsilon\min_{t\in I}\left\{\frac{\mu(t)}{c_2},\frac{\nu(t)}{c_4}\right\},$$

dove ε, $(1>\varepsilon>0)$, è una costante, e sostituiamola nella (2.7). Si riconosce che se è soddisfatta la seguente condizione

$$(2.9)\qquad \frac{[\|\dot{\boldsymbol{G}}(t)\|+\bar{\lambda}(t)\|\boldsymbol{G}(t)\|]^2}{4\bar{\lambda}(t)[\nu(t)-c_4\bar{\lambda}(t)]}\leqslant L<\infty,\qquad \forall t\in I,$$

con $L=\text{cost.}>0$, allora la forma quadratica (2.7) è definita negativa in $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\forall t\in I$ fissato, pur di scegliere la costante $k>L$. Rimane infine da verificare, utilizzando il Lemma, che la funzione che compare al primo membro della (1.9) è semi-definita negativa tenendo conto anche dei termini d'ordine superiore al secondo, come viene illustrato nell'applicazione che segue.

3 - Esempio

Consideriamo due aste rigide, di uguale lunghezza l e di uguale massa M, collegate in O (sovrapposto ad un punto fisso del riferimento terrestre) mediante una cerniera cilindrica ad asse orizzontale, girevole attorno alla verticale per O (asse Oz in figura). Supponiamo che durante il moto la bisettrice dell'angolo $\widehat{AOB}$ formato dalle due aste sia costantemente sovrapposta all'asse Oz, ed inoltre che la semiapertura α sia una funzione assegnata del tempo, soddisfacente alle seguenti limitazioni $0<\alpha_0\leqslant\alpha(t)\leqslant\alpha_1<\pi/2$, $\forall t\geqslant 0$, dove α_0 ed α_1 sono delle costanti. Inoltre due elementi materiali P e Q, di uguale massa m, sono vincolati bilateralmente alle aste (P all'asta AO; Q all'asta BO) senza attrito, e sono collegati tra di loro mediante un filo perfettamente flessibile ed inestendibile di lunghezza l e di massa trascurabile, scorrevole su una carrucolina posta in O. Le forze attive agenti sul sistema sono costituite, oltre ai pesi delle due aste e dei due elementi, da due forze elastiche di uguale costante elastica k (> 0), con centri negli estremi A e B delle due aste, precisamente la forza $-k\,\overrightarrow{AP}$ agente sull'elemento P, e la forza $-k\,\overrightarrow{BQ}$ agente su Q.

Il sistema S costituito dalle due aste AO, OB, incernierate in O, e dai due elementi materiali P e Q, costituisce un sistema olonomo reonomo a due gradi di libertà. Scegliamo come coordinate lagrangiane l'angolo orientato φ formato dal piano verticale girevole, contenente S, con un piano verticale fisso passante per Oz, e la distanza x ($l \geqslant x \geqslant 0$) dell'elemento Q dal punto O (cfr. la figura).

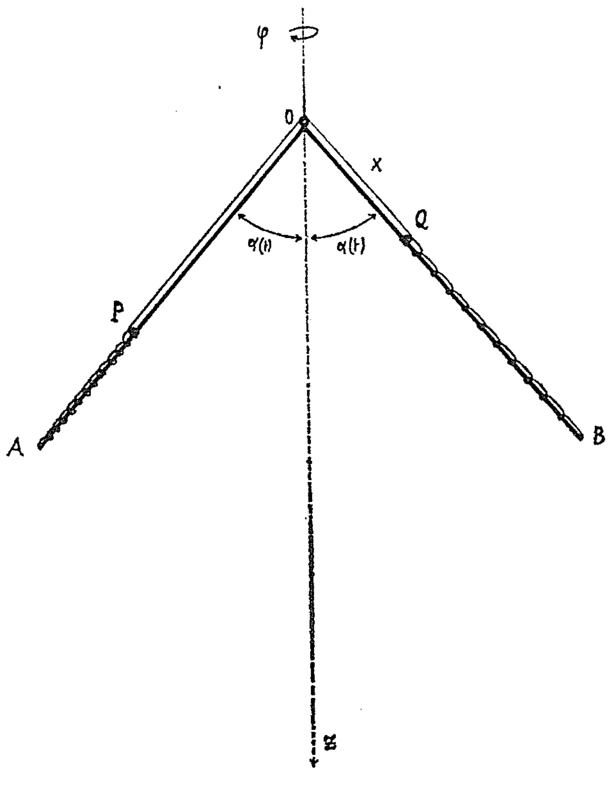

Figura 1

La lagrangiana del sistema S, a meno di termini inessenziali dipendenti soltanto dal tempo, ha la seguente espressione

$$L(t, x, \dot{x}, \dot{\varphi}) = \sin^2\alpha(t)\{\frac{Ml^2}{3} + \frac{ml^2}{2} + mx^2 - mlx\}\dot{\varphi}^2 + m\dot{x}^2 \tag{3.1}$$
$$+ [m\dot{\alpha}^2(t) - k]\cdot(x^2 - lx),$$

da cui si deduce che la coordinata φ è ciclica. Calcolando la funzione di Routh $R = R_2 + R_1 + R_0$, si ottiene

$$\begin{gathered} R_2 = m\dot{x}^2, \qquad R_1 = 0 \\ R_0 = [m\dot{\alpha}^2(t) - k](x^2 - lx) - \frac{c^2}{4\sin^2\alpha(t)\{Ml^2/3 + ml^2/2 + mx^2 - mlx\}}, \end{gathered} \tag{3.2}$$

da cui si riconosce che le soluzioni « statiche » dell'equazione scalare di Routh sono tutte e sole $x(t) \equiv l/2$, $\dot{x}(t) \equiv 0$, $\forall c \in \mathbb{R}^1$, alle quali corrispondono i moti merostatici generalizzati (soluzioni delle equazioni di Lagrange del sistema S)

$$x(t) \equiv \frac{l}{2}, \qquad \dot{x}(t) \equiv 0, \qquad \dot{\varphi}(t) \equiv \frac{c}{2I\sin^2\alpha(t)}, \tag{3.3}$$

avendo posto $I = Ml^2/3 + ml^2/4$.

Lo studio della stabilità *ridotta* (cioè rispetto alle variabili $x, \dot{x}, \dot{\varphi}$) di un qualunque moto merostatico della famiglia (3.3), caratterizzato dal valore $\bar{c} \gtreqless 0$ della costante dell'integrale del momento, si effettua mediante il metodo illustrato nel precedente n. 2. Eseguendo il cambiamento di variabili $s = x - l/2$, $\dot{s} = \dot{x}$, $\beta = c - \bar{c}$, la funzione ausiliaria $W = W(t, s, \beta)$ assume la seguente forma

$$W(t, s, \beta) = [k - m\dot{\alpha}^2(t)]s^2 + \frac{(\bar{c} + \beta)^2}{4\sin^2\alpha(t)}\left[\frac{1}{I + ms^2} - \frac{1}{I}\right]. \tag{3.4}$$

Supponiamo che sia $|\dot{\alpha}(t)| \leqslant L < \infty$, $\forall t \geqslant 0$, dove L è una costante. Si riconosce allora che le derivate parziali $(\partial/\partial s)W(t, s, \beta)$, $(\partial/\partial\beta)W(t, s, \beta)$ sono limitate ed essendo inoltre $R_2 = m\dot{x}^2$ (con $m = \text{cost.} > 0$), le prime due condizioni del Teorema, unitamente alla (v), sono soddisfatte. La terza condizione, invece, è soddisfatta se si ha $k > mL^2$ e $\bar{c}^2 < 4I^2(k - mL^2)\sin^2\alpha_0/m$, essendo

$$(3.5)\qquad W(t,s,0) = \{k - m\dot{\alpha}^2(t) - \frac{m\bar{c}^2}{4I^2\sin^2\alpha(t)}\}s^2 + [>2]$$

$$\geqslant (\frac{4I^2\sin^2\alpha_0(k - mL^2) - m\bar{c}^2}{4I^2\sin^2\alpha_1})s^2 + [>2],$$

come si riconosce in base alla condizione (2.3) del Lemma (n. **2**) (la condizione sul resto, che qui abbiamo indicato col simbolo $[>2]$, è verificata essendo limitata la derivata $(\partial^3/\partial s^3)W(t,s,0)$).

La determinazione del moltiplicatore $\lambda = \lambda(t)$, mediante il metodo indicato nel n. **2**, risulta particolarmente semplice in questo esempio essendo identicamente nulla la matrice $\boldsymbol{G}(t)$. Supponiamo che sul sistema S agisca una dissipazione ridotta alla sola coordinata posizionale s, di componenti lagrangiane $Q_\varphi \equiv 0$, $Q_s = -a(t,s)\dot{s}$, con $a(t,s)$ funzione continua in (t,s) e soddisfacente alla seguente condizione

$$(3.6)\qquad a(t,s) \geqslant \gamma|\dot{\alpha}(t)|, \qquad \text{con } \gamma = \text{cost.} > 0,$$

ed inoltre si abbia

$$(3.7)\qquad \dot{\alpha}(t) < 0, \qquad \forall t \geqslant 0, \qquad \lim_{t\to\infty}\ddot{\alpha}(t) = 0.$$

Allora la derivata totale, rispetto al tempo, della funzione $m\dot{s}^2 + W(t,s,\beta)$, calcolata per $\beta = 0$, può essere maggiorata nel seguente modo

$$\{\frac{d}{dt}[m\dot{s}^2 + W]\}_{\beta=0} = -a(t,s)\dot{s}^2 + \dot{\alpha}(t)\{(\frac{m\bar{c}^2\sin 2\alpha(t)}{4I^2\sin^4\alpha(t)} - 2m\ddot{\alpha}(t))s^2 + [>2]\}$$

$$(3.8)\qquad \leqslant \dot{\alpha}(t)\{\gamma\dot{s}^2 + (\frac{m\bar{c}^2\sin(2\alpha_0)}{8I^2\sin^4\alpha_1})s^2 + [>2]\},$$

restringendo l'intervallo temporale $\mathbb{R}^+$ a $[T,\infty)$, dove il numero reale T, sufficientemente grande, dipende dal particolare valore $\bar{c}$ del moto merostatico considerato (sfruttando la seconda condizione della (3.7)). Con riferimento alla (2.6) (dove va posto $\dot{A}_0(t) \equiv 0$, perchè $R_2 = m\dot{s}^2$ con $m = \text{cost.}$), si ottiene

$$\mu(t) = \gamma|\dot{\alpha}(t)| \qquad \text{e} \qquad \nu(t) = \frac{m\bar{c}^2\sin(2\alpha_0)}{8I^2\sin^4\alpha_1}|\dot{\alpha}(t)|,$$

cioè nell'esempio considerato entrambe le funzioni $\mu(t)$, $\nu(t)$ sono proporzionali alla funzione $|\dot\alpha(t)|$ e quindi lo è pure (per la (2.8)) il moltiplicatore cercato $\bar\lambda(t) = -K\dot\alpha(t) > 0$, dove $K = \text{cost.} > 0$ è sufficientemente piccola. Infine, nell'insieme $[T, \infty) \times S_s \times S_{\dot s} \times S_\varrho^*$ risulta

$$\frac{d}{dt}[m\dot s^2 + W(t, s, \beta)] - K\dot\alpha(t)\,[m\dot s^2 + W(t, s, \beta) - \beta^2] \leqslant 0\,, \tag{3.9}$$

perchè, per ogni t fissato ($t \geqslant T$), la forma quadratica con cui inizia lo sviluppo della (3.9) è definita negativa in s, $\dot s$, β, ed inoltre il resto soddisfa alla condizione (2.3) del Lemma (riconoscibile sulle derivate terze rispetto alle variabili s e β, che sono limitate).

In conclusione, se sono soddisfatte le condizioni (3.6), (3.7) insieme alla seguente

$$\bar c^2 < \frac{4I^2(k - mL^2)\sin^2\alpha_0}{m} \qquad \text{con } k > mL^2, \tag{3.10}$$

il moto merostatico generalizzato

$$x(t) \equiv \frac{l}{2}\,, \qquad \dot x(t) \equiv 0\,, \qquad \dot\varphi(t) \equiv \frac{\bar c}{2I\sin^2\alpha(t)} \tag{3.11}$$

è uniformemente stabile (secondo Liapunov) rispetto alle variabili $x, \dot x, \dot\varphi$.

Bibliografia

[1] C. Risito: [•]$_1$ *Metodi per lo studio della stabilità di sistemi con integrali primi noti*, Ann. Mat. Pura Appl. **107** (1975), 49-94; [•]$_2$ *New stability criteria for the steady motions of rheonomic holonomic systems with ignorable coordinates*, Proc. « EQUADIFF 82 », Würzburg (Germany), August 23-28 (1982).

Summary

In this paper a method for the stability study of the steady motions of mechanical rheonomic holonomic systems with ignorable coordinates is given. This method consists in the construction of a scalar function $\lambda = \lambda(t) \geqslant 0$, *playing the rôle of a Lagrange multiplier, which satisfies the condition* (1.9) *of the theorem. An illustrative example of a mechanical system with two degrees of freedom and one ignorable coordinate is given.*

* * *