Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 387-390

PIER IVAN PASTRO (*)

Caratterizzazione analitica della funzione q-gamma (**)

Introduzione

R. Askey dimostrò in « The q-gamma and q-beta functions » (v. [2]$_1$) numerose proprietà della funzione q-gamma simili a quelle della funzione gamma di Eulero. In particolare verificò gli equivalenti del teorema di Bohr-Mollerup e della formula di moltiplicazione di Gauss. In « The gamma function » [1] Artin diede, tra le altre, la seguente caratterizzazione della funzione gamma (v. Teorema 6.3): la funzione gamma è la sola funzione continua $f(x)$ che è positiva per valori positivi di x, e che soddisfa le equazioni

$$f(x+1) = xf(x)\,,$$

$$f(x)f(x+1/p)\dots f(x+(p-1)/p) = f(px)(2\pi)^{p/2-\frac{1}{2}}/p^{px-\frac{1}{2}}\,,$$

per ogni valore intero positivo di p.

Inoltre Artin provò $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin \pi x$.

In analogia con ciò si può dimostrare che la funzione q-gamma è definita mediante delle condizioni simili a quelle poste da Artin per gamma. Inoltre si verifica che il prodotto $\Gamma_q(x)\Gamma_q(1-x)$ è sostanzialmente il reciproco di una funzione theta.

1 – La funzione q-gamma è definita come

$$\Gamma_q(x) = (q;\,q)_\infty(1-q)^{1-x}/(q^x;\,q)_\infty\,, \qquad \text{dove } (a;\,q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty}(1-aq^n)\,.$$

(*) Indirizzo: Via Silvello 39, 31020 Fontane di Villorba (Treviso), Italy.
(**) Ricevuto: 26-IV-1982.

Si ponga $Q(x)=(q^x; q)_\infty$. Si dimostra facilmente che: (i) $(1-q^x)Q(x+1) = Q(x)$, (ii) $Q(x+\alpha)=Q(x)$ dove $\alpha = 2i\pi/\log q$, (iii) per ogni intero n: $Q(nx) = \prod_{j,k=0}^{n-1} Q(x+j/n+\alpha k/n)$, e in particolare (iv) $Q(2x) = Q(x)Q(x+\frac{1}{2})Q(x+\alpha/2) \cdot Q(x+\frac{1}{2}+\alpha/2)$.

Si osservi l'analogia tra le formule di Gauss e di Legendre per la funzione gamma di Eulero e le proprietà di $Q(x)$ appena descritte.

Teorema 1. *La funzione $Q(x)$ è l'unica funzione complessa intera che soddisfa le equazioni* (i) *e* (ii) *e che vale* $(q; q)_\infty$ *in* 1.

Dim. Sia $f(x)$ una funzione che soddisfi alle condizioni del teorema, e si indichi con $P(x)$ il rapporto $f(x)/Q(x)$. Risulta che $f(x)$ si annulla negli zeri di $Q(x)$. Perciò $P(x)$ è una funzione intera in quanto gli zeri di $Q(x)$ sono semplici. Quindi $P(x)$ è una funzione ellittica di periodo 1 e α. Per il teorema di Liouville $P(x)$ risulta la funzione costante 1 e ciò dimostra il teorema.

Teorema 2. *La funzione $Q(x)$ è l'unica funzione complessa intera che soddisfa le equazioni* (i), (iv), *che assume in* 1 *il valore* $(q; q)_\infty$ *e che risulta reale per x reale.*

Dim. Sia s un numero complesso. Se $f(x)$ indica una funzione che soddisfa le ipotesi risulta

$$f(s) = f(s/2)f(s/2+\tfrac{1}{2})f(s/2+\alpha/2)\, f(s/2+\alpha/2+\tfrac{1}{2}),$$

$$f(\bar{s}) = f(\bar{s}/2)f(\bar{s}/2+\tfrac{1}{2})f(\bar{s}/2-\alpha/2)\, f(\bar{s}/2-\alpha/2+\tfrac{1}{2}) = f(\bar{s}-\alpha),$$

per il principio di rifrazione e per la equazione (iv).

Si è provato quindi che $f(x)$ è periodica di periodo α. Il teorema è perciò dimostrato per quanto previsto dal Teorema 1.

2 – Sia $f(x)$ una funzione meromorfa che assume valori reali per x reale e che soddisfa le condizioni

$$\text{(i)}\ (1-q^x)f(x+1) = f(x), \quad \text{(iv)}\ f(2x) = f(x)f(x+\tfrac{1}{2})f(x+\alpha/2)f(x+\tfrac{1}{2}\alpha/2).$$

Allora $f(x)$ è una funzione intera per Re $(x) > 0$. Infatti se esiste per f un polo x_0 con Re $(x_0) > 0$, allora per (iv) esiste pure un polo per f nella striscia $|\text{Im}\,(x)| < 2\alpha$ e per il principio di rifrazione e per la condizione (iv) nella striscia $0 < \text{Im}\,(x) < \alpha$. Siccome f soddisfa anche (i), si può affermare che l'esistenza del polo x_0 equivale all'esistenza di un polo nella regione R determinata da $0 < \operatorname{Re}(x) < 1$ e $0 < \operatorname{Im}(x) < \alpha$. Tale supposizione non è possibile in quanto risulterebbe che f ha infiniti poli nella regione limitata R per via della condizione (iv). Perciò

Def. 1. La funzione $Q(x)$ è l'unica funzione meromorfa che soddisfa le equazioni (i) e (iv), che vale $(q;\, q)_\infty$ 1 e che assume valori reali per x reale.

Similmente

Def. 2. La funzione $1/Q(x)$ è l'unica funzione $f(x)$ meromorfa che soddisfa l'equazione (iv) e tale che $f(x)(1-q^x) = f(x+1)$, $f(1) = 1/(q;\, q)_\infty$, e che assume valori reali per x reale.

Come conseguenza della Def. 2 si ha

Def. 3. La funzione q-gamma è l'unica funzione $f(x)$ meromorfa che assume valori reali per x reale e che soddisfa le equazioni

$$(1-q)f(x+1) = (1-q^x)f(x)\,,$$
$$(q;\, q)_\infty^3 (1-q)^{2-2x-\alpha} f(2x) = f(x)f(x+\tfrac{1}{2})f(x+\alpha/2)f(x+\tfrac{1}{2}+\alpha/2)\,,$$
$$f(1) = 1$$

3 – Conformemente a Whittaker e Watson [**4**] si indica

$$\theta_4(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{i2nz}, \qquad \text{dove } q = e^{2it\pi}\,.$$

In [**2**]$_2$ Askey verifica che

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{n^2} x^n = (q^2;\, q^2)_\infty (qx;\, q^2)_\infty (qx^{-1};\, q^2)_\infty\,,$$

e perciò se $x = e^{2iz}$ allora

$$\theta_4(z,t) = (q^2;\, q^2)_\infty (q e^{2iz};\, q^2)_\infty (q e^{-2iz};\, q^2)_\infty\,.$$

Perciò non appena $2iz = (2s-1)\log q$

$$\Gamma_{q^2}(s)\Gamma_{q^2}(1-s) = (q^2;\, q^2)_\infty (1-q^2)/\theta_4(z,t)\,.$$

Si può quindi affermare che le q-gamma sono una naturale estensione sul piano della gamma di Eulero in quanto le funzioni ellittiche, definite dalle funzioni theta, sono periodiche in due direzioni. Si può dimostrare inoltre la validità di un q analogo del teorema di Holder [**3**] e ciò permette di concludere, in analogia con la funzione q-gamma di Eulero, che, mentre q-gamma non è soluzione di equazioni differenziali, il prodotto $\Gamma_q(x)\Gamma_q(1-x)$ è soluzione di una equazione differenziale.

Bibliografia

[**1**] Artin, *The gamma function*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1964.

[**2**] R. Askey: [•]$_1$ *The q-gamma and q-beta functions*, Applicable Anal. **8** (1978), 125-141; [•]$_2$ *Ramanujan's extensions of the gamma and beta functions*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), 346-358.

[**3**] P. I. Pastro, *A q-analogous of the Holder's theorem for the gamma function*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **70** (1983).

[**4**] Whittaker and Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press 1935.

* * *