Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 333-337

NORMA ZAGAGLIA SALVI (*)

Sull'indice cromatico dei grafi di permutazione (**)

1 - Introduzione

Ricordiamo che l'indice cromatico, $\chi'(G)$, di un grafo G è il minimo valore di k per cui l'insieme $E(G)$ degli spigoli può essere ripartito in k classi, ciascuna formata da spigoli a due a due non adiacenti. Ogni classe è chiamata colore.

Il teorema di Vizing [4], stabilisce che l'indice cromatico di un grafo G con valenza massima ϱ è uguale a ϱ oppure a $\varrho + 1$ e dà la possibilità di distinguere i grafi di classe $\mathscr{C}_1$, se $\chi'(G) = \varrho$, e di classe $\mathscr{C}_2$, se $\chi'(G) = \varrho + 1$. Un circuito C_n di lunghezza n è di classe $\mathscr{C}_1$ per n pari, di classe $\mathscr{C}_2$ per n dispari.

In [2] è definito il grafo di permutazione $P_\alpha(G)$ nel seguente modo. Sia G un grafo finito non orientato, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ l'insieme dei suoi vertici, α una permutazione sull'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$; il grafo di permutazione $P_\alpha(G)$ consiste in due copie disgiunte, identicamente indiciate, di G, diciamo G e G' connesse tra loro da n spigoli — che diremo aggiunti — $x_i = (v_i, v_{\alpha(i)})$, ove v_i è un vertice di G e $v_{\alpha(i)}$ è un vertice di G'. Per evitare confusione i vertici di G' saranno indicati con v'_i, invece che con v_i. In [3] viene posto il problema di caratterizzare quelle permutazioni α per cui $P_\alpha(C_n)$ è di classe $\mathscr{C}_1$ e in [5] B. Zelinka ottiene interessanti risultati in relazione a tale problema.

In questo lavoro si estendono a $P_\alpha(G)$, con G grafo finito qualsiasi, risultati di B. Zelinka. Tale estensione viene ottenuta utilizzando metodi del tutto indipendenti da quelli usati da B. Zelinka.

2 – Il problema della classificazione di $P_\alpha(G)$ si presenta (e appare complicato) quando $G \in \mathscr{C}_2$. Infatti, nel caso in cui $G \in \mathscr{C}_1$, sussiste il seguente teorema, ove con S_n si intende l'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica del Politecnico, Piazza L. da Vinci 32, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 23-II-1982.

Teorema 2.1. *Se $G \in \mathscr{C}_1$, allora $P_\alpha(G) \in \mathscr{C}_1$ per ogni $\alpha \in S_n$.*

Infatti, se ϱ è il grado massimo di G, si ha $\chi'(G) = \chi'(G') = \varrho$. Colorando gli spigoli aggiunti x_i di $P_\alpha(G)$ con un $(\varrho + 1)$-esimo colore, ne segue che $P_\alpha(G) \in \mathscr{C}_1$.

Pertanto, d'ora in poi, si intende $G \in \mathscr{C}_2$ e si ottengono i seguenti teoremi, in cui $\Gamma(G)$ rappresenta il gruppo degli automorfismi di G.

Teorema 2.2. *Se $\alpha \in \Gamma(G)$, allora $P_\alpha(G) \in \mathscr{C}_1$.*

Poichè, per ogni $\alpha \in \Gamma(G)$, $P_\alpha(G)$ risulta isomorfo a $P_i(G)$ con i permutazione identica [**1**], si possono prendere come spigoli aggiunti $x_i = (v_i, v_i')$. Adottando una stessa $(\varrho + 1)$-colorazione K per gli spigoli di G e G', si ha che se a è un colore di K che manca nella colorazione degli spigoli incidenti a v_i, lo stesso colore mancherà anche in v_i'. Colorando con a lo spigolo x_i, si ottiene una colorazione propria degli spigoli di $P_\alpha(G)$ con un numero di colori uguale al grado massimo.

Teorema 2.3. *Se $\alpha \in \Gamma(G)$ e $\beta \in S_n$, ne segue che $P_{\beta\circ\alpha}(G)$ e $P_\beta(G)$ sono isomorfi e quindi appartengono alla stessa classe.*

Osserviamo che nel grafo di permutazione $P_{\beta\circ\alpha}(G)$ gli spigoli aggiunti sono $x_i = (v_i, v'_{\beta\circ\alpha(i)})$; si ha allora che la corrispondenza σ tra i vertici di $P_{\beta\circ\alpha}(G)$ e $P_\beta(G)$ definita dalle relazioni $\sigma(v_i) = v_{\alpha(i)}$, $\sigma(v'_{\beta(\alpha(i))}) = v'_{\beta(\alpha(i))}$ è evidentemente biunivoca e, inoltre, mantiene le adiacenze. Infatti, essendo $\alpha \in \Gamma(G)$, se G contiene lo spigolo (v_i, v_j), esso contiene anche lo spigolo $(v_{\alpha(i)}, v_{\alpha(j)})$ e viceversa. Tale corrispondenza è quindi associata ad un isomorfismo tra i due grafi.

Teorema 2.4. *Se $\alpha \in \Gamma(G)$ e $\beta \in S_n$, ne segue che $P_{\alpha\circ\beta}(G)$ e $P_\beta(G)$ sono isomorfi e quindi appartengono alla stessa classe.*

Procedendo in modo analogo a quello sequito per il Teorema 2.3, si ha che la corrispondenza φ tra i vertici di $P_\beta(G)$ e $P_{\alpha\circ\beta}(G)$ definita dalle relazioni $\varphi(v_i) = v_i$, $\varphi(v'_{\beta(i)}) = v'_{\alpha(\beta(i))}$ è associata ad un isomorfismo tra i due grafi.

Dai teoremi 2.3 e 2.4 deriva immediatamente il seguente

Corollario 2.1. *Se $\alpha, \gamma \in \Gamma(G)$ e $\beta \in S_n$, ne segue che $P_\beta(G)$ e $P_{\alpha\circ\beta\circ\gamma}(G)$ sono isomorfi e quindi appartengono alla stessa classe.*

Una permutazione α sull'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ è chiamata *trasposizione* se risulta $\alpha(i) = j$ e $\alpha(j) = i$, per una coppia i e j con $i \neq j$ e $\alpha(k) = k$ per ogni $k \neq i, j$.

Teorema 2.5. *Se α è una trasposizione, allora $P_\alpha(G) \in \mathscr{C}_1$.*

Sia α una trasposizione ed i e j i due indici scambiati tra loro. Adottiamo per gli spigoli di G e G' la stessa $(\varrho + 1)$-colorazione e indichiamo con a [risp. b] un colore che manca nella colorazione degli spigoli incidenti a v_i [risp. v_j]; ne segue che anche in v'_i e v'_j mancano, rispettivamente, i colori a e b. Se risulta $a = b$, il teorema è dimostrato: coloriamo con a gli spigoli x_i, x_j e con un colore che manca in v_k e quindi in v'_k, gli spigoli x_k $(k \neq i, j)$; si ottiene una colorazione propria degli spigoli di $P_\alpha(G)$ con lo stesso numero di colori usati per G, cioè $P_\alpha(G) \in \mathscr{C}_1$.

Sia $a \neq b$. Esiste uno spigolo, chiamiamolo $e_1 = (v_j, v_{j_1})$, incidente a v_j colorato con a; sia $e_1, e_2, \ldots, e_r$, con $e_h = (v_{j_{h-1}}, v_{j_h})$ per $1 \leqslant h \leqslant r$ e $v_{j_0} = v_j$, la successione di spigoli colorati alternativamente con a e con b, a partire da v_j. Per tale successione, che forma un cammino elementare Q, si presentano due casi:

(I) $v_{j_r} = v_i$; (II) v_{j_r} è incidente allo spigolo e_r colorato con a [opp. b], ma a nessuno spigolo colorato con $b[a]$.

Nel primo caso, poichè in v_i mancava il colore a, si ha che lo spigolo e_r è colorato con b.

Scambiamo in Q i colori a e b; ne segue che, ora, nel vertice v_i manca il colore b. Lasciando inalterata la colorazione degli spigoli di G', possiamo colorare lo spigolo $x_i = (v_i, v_{\alpha(i)}) = (v_i, v'_j)$ con b, lo spigolo $x_j = (v_j, v_{\alpha(j)}) = (v_j, v'_i)$ con a, mentre per tutti gli altri spigoli x_k $(k \neq i, j)$ si può usare un colore che manca in v_k e quindi in v'_k.

Osserviamo che per tutti i vertici della successione Q, esclusi il primo e l'ultimo, non vi sono stati cambiamenti nell'insieme dei colori usati per gli spigoli ad essi incidenti perchè per ognuno di essi si sono scambiati i colori a e b, entrambi presenti.

Nel secondo caso, ripetiamo per G', a partire da v'_j, lo stesso procedimento seguito per G. Otterremo che in v'_j manca il colore a e in v'_{j_r} il colore a [opp. b]. Possiamo allora colorare gli spigoli x_i e x_{j_r} con a, x_j con a [opp. b], mentre per tutti gli altri spigoli x_k $(k \neq i, j, j_r)$ valgono le considerazioni fatte nel primo caso.

In entrambi i casi abbiamo ottenuto una colorazione degli spigoli di $P_\alpha(G)$ con lo stesso numero di colori usati per G, cioè $P_\alpha(G) \in \mathscr{C}_1$.

Poichè le trasposizioni formano un sistema completo di generatori di S_n, in base al Teorema 2.5 otteniamo il seguente

Teorema 2.6. *L'insieme delle permutazioni α tali che $P_\alpha(G) \in \mathscr{C}_1$ coincide col gruppo simmetrico S_n oppure non è un gruppo.*

Ricordiamo che, in relazione alla colorazione, un grafo semplice G è *critico per gli spigoli* (o semplicemente *critico* se non c'è possibilità di confusione) quando G è connesso, di classe $\mathscr{C}_2$ e se la rimozione di uno spigolo qualsiasi di G diminuisce l'indice cromatico. Se la valenza massima di G è ϱ, si dice che G è *ϱ-critico.* In [**5**] è stato dimostrato che per n dispari ogni permutazione α su $\{1, 2, ..., n\}$ tale che $P_\alpha(C_n) \in \mathscr{C}_2$ corrisponde ad un isomorfismo di C_n con un sottografo del complementare. Ricordando che C_n, per n dispari, è critico, generalizziamo ora tale risultato col seguente

Teorema 2.7. *Se G è un grafo critico ed α è una permutazione tale che $P_\alpha(G) \in \mathscr{C}_2$, allora α è associata ad un isomorfismo di G con un sottografo del complementare.*

Sia G un grafo ϱ-critico ed α una permutazione sull'insieme $\{1, 2, ..., n\}$ che non è associata ad un isomorfismo di G con un sottografo del complementare. Questo significa che esiste almeno uno spigolo $e = (v_i, v_j)$ di G che è trasformato dalla α in uno spigolo $\alpha(e) = (v_{\alpha(i)}, v_{\alpha(j)})$ di G.

Consideriamo il grafo $P_\alpha(G)$; poichè G è ϱ-critico, si ha che $G \setminus e$ è colorabile con ϱ colori: $a_1, a_2, ..., a_\varrho$.

Poichè nel grafo $G \setminus e$ i vertici v_i e v_j hanno al massimo valenza $\varrho - 1$, ne segue che esiste almeno un colore, a_i, mancante in v_i e almeno un colore a_j, con $a_j \neq a_i$, mancante in v_j.

Non può essere $a_j = a_i$ perchè allora si potrebbe colorare con tale colore lo spigolo e e G non sarebbe più di classe $\mathscr{C}_2$.

Anche il grafo $G' \setminus \alpha(e)$ è colorabile con i ϱ colori $a_1, a_2, ..., a_\varrho$. Colorando tale grafo in modo che in $v'_{\alpha(i)}$ manchi il colore a_i (ciò è possibile poichè in tale grafo il vertice $v'_{\alpha(i)}$ ha valenza massima $\varrho - 1$), si presentano due possibilità.

(I) In $v'_{\alpha(j)}$ manca il colore a_j. In tale caso coloriamo x_i e x_j con i colori, rispettivamente, a_i e a_j, coloriamo tutti gli altri spigoli x_k, per $k \neq i, j$, e gli spigoli e ed $\alpha(e)$ con un colore $a_{\varrho+1}$; si ottiene una $(\varrho + 1)$- colorazione degli spigoli di $P_\alpha(G)$, cioè $P_\alpha(G) \in \mathscr{C}_1$, in contraddizione con l'ipotesi fatta su tale grafo.

(II) In $v'_{\alpha(j)}$ è presente il colore a_j. Sia a_s un colore mancante in $v'_{\alpha(j)}$ ed $e_1 = (v'_{\alpha(j)}, v'_{j_1})$ lo spigolo incidente $v'_{\alpha(j)}$ colorato con a_j. Indichiamo con $e_1, e_2, ... e_r$, con $e_h = (v'_{j_{h-1}}, v'_{j_h})$ per $1 \leqslant h \leqslant r$ e $v'_{j_0} = v'_{\alpha(j)}$, la successione di spigoli colorati alternativamente con a_j e con a_s, a partire da $v'_{\alpha(j)}$. Scambiando in tale successione la colorazione degli spigoli, ne segue che ora nel vertice $v'_{\alpha(j)}$ manca il colore a_j. A questo punto si può procedere come nel caso (I).

Il Teorema 2.7 non si può invertire: per es. i grafi di Petersen generalizzati ([4] pag. 43) sono grafi di permutazione $P_\alpha(C_n)$ con n dispari ed α associato ad un isomorfismo con un sottografo del complementare, eppure, tranne il grafo di Petersen, appartengono a $\mathscr{C}_1$.

Corollario 2.2. *Se G è un grafo critico con un numero di spigoli $m > n(n-1)/4$, allora $P_\alpha(G) \in \mathscr{C}_1$ $\forall \alpha \in S_n$.*

Invero in tal caso, non esiste alcun isomorfismo tra G e un sottografo del complementare, poichè quest'ultimo possiede un numero di spigoli minore di m. Pertanto, se fosse $P_\alpha(G) \in \mathscr{C}_2$, si avrebbe una contraddizione al Teorema 2.7.

Osserviamo che, per es., il grafo ottenuto da K_4 con l'aggiunta di un vertice su un solo spigolo, verifica le condizioni del Corollario 2.2.

Bibliografia

[1] M. Borowiecki, *On chromatic number of products of two graphs*, Coll. Math. (1) **25** (1972), 49-52.

[2] G. Chartrand and F. Harary, *Planar permutation graphs*, Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. B **3** (1967), 433-438.

[3] G. Chartrand and J. B. Frechen, *On the chromatic number of permutation graphs*, in «Proof techniques in Graph Theory», New York (1969), 21-24.

[4] S. Fiorini and R. J. Wilson, *Edge-colourings of graphs*, Research Notes in Math. **16**, Pitman Publ., London 1977.

[5] B. Zelinka, *Edge-colourings of permutation graphs*, Mat. Čas. **23** (1973), 193-198.

Summary

In this paper we obtain some results on the chromatic index of permutation graphs.

* * *