Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 253-258

Maria Federica Rinaldi (*)

Sugli Ω-gruppi a Ω-sottogruppi propri nilpotenti (**)

Introduzione

In questo lavoro ci occupiamo del problema duale di quello studiato in [**3**] generalizzando agli Ω-gruppi i lavori [**5**], [**8**] relativi ai gruppi e [**1**] relativo agli anelli. Più precisamente si studiano gli Ω-gruppi a Ω-sottogruppi propri nilpotenti, che costituiscono una particolare classe di Ω-gruppi cocritici.

Si prova che un Ω-gruppo distributivo non nilpotente di classe k a Ω-sottogruppi nilpotenti di classe al più k e non perfetto è risolubile di grado $k+1$.

Si vede anche che gli Ω-anelli soddisfacenti alle precedenti condizioni sono finitamente generati, e si trovano condizioni per riconoscere i sistemi di generatori.

1 - Generalità

Un Ω-gruppo G, nel senso di Higgins, è una struttura $[G; +; \Omega]$ ove $[G; +]$ è un gruppo (non necessariamente abeliano) di elemento neutro 0, e Ω un insieme di operazioni n-arie su G, tali che $\forall \omega \in \Omega$ si abbia $0 \dots 0\omega = 0$.

Un Ω-gruppo si dice *distributivo* se risulta

$$a_1 \dots a_{i-1}(a_i + b)a_{i+1} \dots a_n\omega = a_1 \dots a_{i-1}a_ia_{i+1} \dots a_n\omega + a_1 \dots a_{i-1}ba_{i+1} \dots a_n\omega$$

per $i = 1, \dots, n$, $a_1, \dots, a_n, b \in G$ e $\forall \omega \in \Omega$.

Si dice *Ω-anello* (cfr. [**9**]) un Ω-gruppo distributivo in cui $[G; +]$ sia abeliano.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 4-XII-1981.

Con Ω^* indicheremo l'insieme delle operazioni di Ω di arietà diversa da 1 e, detto N l'insieme delle arietà delle operazioni di Ω, N^* indicherà l'insieme delle arietà delle operazioni di Ω^*. In tutto il lavoro chiameremo *Ω^r-gruppo* un Ω-gruppo in cui N ammette un massimo, finito, r; diremo che un Ω-gruppo è *n-generato* se possiede un sistema di generatori costituito da n elementi, e *propriamente n-generato* (*Pn-generato*) se è n-generato ma non $(n-1)$-generato.

In analogia con [**3**], detto M un sottogruppo di G, porremo $\bar{M}_1 = M$, $\bar{M}_2 = \{M^n\omega / \omega \in \Omega^*,\ n \in N^*\}$, ove $M^n\omega = \{x_1 \dots x_n\omega / x_i \in M,\quad i = 1, \dots, n\}$ e tenendo presente la definizione di k-prodotto data da Micale ([1]), $\bar{M}_k$ $(k \geqslant 3)$ indicherà l'insieme di tutti i k-prodotti di elementi di M, al variare comunque delle $k-1$ operazioni in Ω^* e degli r_k elementi di M che compaiono nei k-prodotti stessi, ed M_k indicherà il sottogruppo di G generato da $\bar{M}_k$. Inoltre, detto r_k il numero di elementi che compaiono in un k-prodotto, indicheremo con $\bar{r}$ il massimo dell'insieme degli r_k (ovviamente se r è finito anche $\bar{r}$ è finito) e quindi, in particolare, $M_{\bar{k}}$ indicherà l'insieme di tutti i k-prodotti costruiti con $\bar{r}$ elementi di M.

Infine, come al solito, porremo $\tilde{M}_1 = M_1 = M$, per $k > 1$, $\tilde{M}_k = \{g_1 \dots g_i \dots g_n\omega / g_i \in \tilde{M}_{k-1},\ g_j \in M,\ j = 1 \dots n,\ j \neq i\}$ e indicheremo con $[\tilde{M}_k]$ il sottogruppo di G generato da $\tilde{M}_k$.

Riportiamo (cfr. [**6**]) per comodità del lettore, alcune definizioni: se A, B sono Ω-sottogruppi di G, indichiamo con $[A, B]$ l'ideale dell'Ω-sottogruppo $A \cup B$ generato dagli elementi $[a, b] = -a - b + a + b$ $(a \in A,\ b \in B)$ e $[a_1, \dots, a_n;\ b_1, \dots, b_n;\ \omega] = -a_1 \dots a_n\omega - b_1 \dots b_n\omega + (a_1 + b_1) \dots (a_n + b_n)\omega$ $(\omega \in \Omega,\ a_i \in A,\ b_i \in B)$. Posto allora $G^1 = G$ e $G^n = [G^{n-1}, G]$ $(n > 1)$, un Ω-gruppo G si dice nilpotente di classe n se $G^n = 0$ e $G^{n-1} \neq 0$. Posto invece $G^0 = G$ e $G^{(n+1)} = [G^n, G^n]$ $(n > 1)$, un Ω-gruppo si dice risolubile di grado n se $G^{(n)} = 0$ ma $G^{(n-1)} \neq 0$.

Oss. 1. *Sia G un Ω^r-gruppo distributivo Pn-generato, allora $\tilde{G}_k = 0$ (per qualche k) se e solo se sono nulli tutti i k-prodotti di $\tilde{G}_k$ costruiti su un sistema di generatori.*

Banalmente, se sono nulli tutti i k-prodotti di $\tilde{G}_k$, lo sono in particolare anche quelli costruiti sui generatori di G. Viceversa, se i k-prodotti di $\tilde{G}_k$ sono

---

([1]) Sia G un Ω^*-gruppo e siano $\omega_1 \dots \omega_{k-1}$ elementi di Ω^* (non necessariamente distinti) di arietà $n_1, \dots, n_k$ rispettivamente, posto $r_k = 1 + \sum_{1=t}^{k-1} (n_t - 1)$, si definisce k-prodotto individuato dalla r_k-pla ordinata di elementi $g_1 \dots g_{r_k}$ di G e dalle operazioni $\omega_1 \dots \omega_{k-1}$, l'insieme degli elementi di G ottenuti applicando le operazioni $\omega_1 \dots \omega_{k-1}$, in ordine qualsiasi, alla r_k-pla ordinata $g_1 \dots g_{r_k}$ (cfr. [7]).

nulli su un sistema di generatori, segue l'asserto dopo aver osservato che, in virtù della distributività, si può riscrivere ogni k-prodotto come somma di h-prodotti ($h \geqslant k$) costruiti sui generatori.

2 - Caso generale

Dualizzando il concetto di Ω-gruppo critico introdotto in [**3**], e in analogia con i gruppi e con gli anelli, diciamo che un *Ω-gruppo è cocritico se possiede Ω-sottogruppi propri ma non appartiene alla varietà da essi generata.*

Dato che (cfr. [**3**], Teor. 1) gli Ω-gruppi nilpotenti di classe al più k costituiscono una varietà, si ha che *gli Ω-gruppi non nilpotenti di classe k, a Ω-sottogruppi nilpotenti di classe al più k, sono cocritici.*

Vale il seguente

Teorema 1. *Un Ω-gruppo G distributivo non nilpotente di classe k, a Ω-sottogruppi nilpotenti di classe al più k è risolubile di grado $k+1$ oppure è perfetto* (2).

Consideriamo il derivato G^2 di G: o G è perfetto oppure $G^2 \neq G$. Sia $G^2 \neq G$; allora esso è un Ω-sottogruppo proprio di G, e come tale nilpotente di classe al più k; allora anche $(G^{(2)})^k = 0$, e quindi, posto per comodità $G^{(2)} = \bar{G}$, si ha $\bar{G}^{(k)} = 0$. Mostriamo ora, per induzione su k, che $\bar{G}^{(k)} = G^{(k+1)}$. La cosa è banale per $k = 1$; supponiamo che $\bar{G}^{(k-1)} = G^{(k)}$ e consideriamo $\bar{G}^{(k)}$: per definizione si ha che $\bar{G}^{(k)} = [\bar{G}^{(k-1)}, \bar{G}^{(k-1)}] = [G^{(k)}, G^{(k)}] = G^{(k+1)}$ e quindi, in definitiva, $0 = \bar{G}^{(k)} = G^{(k+1)}$.

3 - Caso degli Ω-anelli

Passando agli Ω-anelli, abbiamo

Oss. 2. *In un Ω-anello si ha $[\tilde{G}_k] = G^k$ per ogni intero k.*

È noto (cfr. [**3**], Oss. 2) che, nelle nostre ipotesi, $\tilde{G}_k \subset G^k$; proviamo l'inclusione opposta ragionando per induzione su k. Dalla definizione stessa di $\tilde{G}_k$ si ha che $[\tilde{G}_1] = G^1$. Supponiamo che $[\tilde{G}_{k-1}] = G^{k-1}$ e consideriamo G^k: essendo $[G; +]$ abeliano, G^k è generato da elementi $[g_1^{k-1}, \ldots, g_n^{k-1}; g_1, \ldots, g_n; \omega]$

(2) In analogia con la teoria dei gruppi diciamo che un Ω-gruppo G è *perfetto* quando coincide con il suo derivato.

$= -g_1^{k-1} \dots g_n^{k-1}\omega - g_1 \dots g_n\omega + (g_1^{k-1} + g_1) \dots (g_n^{k-1} + g_n)\omega$, ove $g_1, \dots, g_n \in G$, e $g_1^{k-1}, \dots, g_n^{k-1} \in G^{k-1}$. Per la distributività e la commutatività di $[G; +]$ si ha $[g_1^{k-1}, \dots, g_n^{k-1}; g_1, \dots, g_n; \omega] = -g_1^{k-1}g_2 \dots g_n\omega + g_1^{k-1}g_2^{k-1}g_3 \dots g_n\omega + \dots + g_1^{k-1} \dots g_{n-1}^{k-1} g_n \omega + g_1 g_2^{k-1} \dots g_n^{k-1}\omega + g_1 g_2 g_3^{k-1} \dots g_n^{k-1}\omega + \dots + g_1 g_2 \dots g_{n-1} g_n^{k-1}\omega$, ma, per l'ipotesi induttiva, $g_i^{k-1} \in \tilde{G}_{k-1}$ $(\forall i = 1 \dots n)$, e quindi ogni addendo di $[g_1^{k-1}, \dots, g_n^{k-1}; g_1, \dots, g_n; \omega]$ è un elemento di $\tilde{G}_k$, ossia $G^k \subset [\tilde{G}_k]$.

Teorema 2. *Sia G un Ω^r-anello non nilpotente di classe k a Ω-sottoanelli nilpotenti di classe al più k, allora G non può essere Pn-generato per $n > \bar{r}$* [3].

Se G fosse Pn-generato con $n > \bar{r}$, allora ogni k-prodotto di $\tilde{G}_k$ sarebbe costruito con elementi di un Ω-sottoanello proprio $\bar{G}$ di G; ma per ipotesi $\bar{G}^k = 0$, ossia $\tilde{\bar{G}}_k = 0$, e quindi ogni k-prodotto di $\tilde{G}_k$ costruito sui generatori risulterebbe nullo. Ciò equivale a dire (Oss. 1) che $G^k = 0$, il che è assurdo.

Il Teorema 2 assicura che gli Ω^r-anelli non nilpotenti di classe k a Ω-sottoanelli nilpotenti di classe al più k sono finitamente generati e, nello stesso tempo, fornisce il massimo numero dei generatori, il quale coincide con il massimo numero di elementi che possono comparire in un k-prodotto.

In seguito considereremo Ω^r-anelli $P\bar{r}$-generati.

Oss. 3. *Sia G un Ω^r-anello $P\bar{r}$-generato, non nilpotente di classe k a Ω-sottoanelli nilpotenti di classe al più k, allora risulta $\tilde{G}_k = \tilde{G}_{\bar{k}}$.*

Sia $A = (a_1, \dots, a_{\bar{r}})$ un sistema di generatori di G e sia $K_{a_1, \dots, a_{r_k}, \omega_1, \dots, \omega_{k-1}}$ un k-prodotto di $\tilde{G}_k$ costruito sugli elementi $a_1, \dots, a_{r_k} \in A$, con $r_k < \bar{r}$, allora $K_{a_1, \dots, a_{r_k}, \omega_1, \dots, \omega_{k-1}} = 0$; infatti gli elementi $a_1, \dots, a_{r_k}$ generano un Ω-sottogruppo proprio $\bar{G}$ di G, e per ipotesi si ha $\tilde{\bar{G}}_k = 0$. Segue che ogni k-prodotto di $\tilde{G}_k$ costruito su r_k elementi con $r_k < \bar{r}$ risulta nullo, cioè l'asserto.

Oss. 4. *Sia G un Ω^r-anello $P\bar{r}$-generato, non nilpotente di classe k a Ω-sottoanelli nilpotenti di classe al più k; un sottoinsieme $\{a_1, \dots, a_{\bar{r}}\}$ di elementi di G costituisce un sistema di generatori di G se e solo se esiste un k-prodotto di $\tilde{G}_k$ non nullo costruito su tali elementi.*

Banalmente, se ogni k-prodotto costruito su $a_1, \dots, a_{\bar{r}}$ fosse nullo, allora si avrebbe $\tilde{G}_k = 0$ e quindi anche $G^k = 0$, il che è escluso. Supponiamo ora che esista un k-prodotto $K_{a_1, \dots, a_{\bar{r}}, \omega_1, \dots, \omega_{k-1}}$ di $\tilde{G}_k$, che sia diverso da zero; se $\{a_1, \dots, a_{\bar{r}}\}$ non fosse un sistema di generatori di G, allora genererebbe un

---

[3] Ricordiamo ancora che, detto r_k il numero degli elementi che compaiono in un k-prodotto, $\bar{r}$ indica il massimo dell'insieme degli r_k.

Ω-sottoanello proprio $\bar{G}$ di G, ed essendo $\tilde{\bar{G}}_k = 0$ per ipotesi, allora sarebbe nullo ogni k-prodotto costruito su $a_1, \dots, a_{\bar{r}}$, il che è assurdo.

Teorema 3. *Sia G un Ω^r-anello associativo* [4] *$P\bar{r}$-generato, non nilpotente di classe k a Ω-sottoanelli nilpotenti di classe al più k, allora G è nilpotente di classe $k+1$.*

Dato che G è $P\bar{r}$-generato, allora ogni k-prodotto di $\tilde{G}_k$ costruito su $\bar{r}$ generatori non tutti distinti è nullo (Oss. 3). Consideriamo il generico $(k+1)$-prodotto di $\tilde{G}_{k+1}$, che sarà del tipo $a_{i_1} \dots a_{i_{j-1}} g a_{i_{j+1}} \dots a_{i_{\bar{r}}} \omega$ con $a_{i_1}, \dots, a_{i_{\bar{r}}} \in \{a_1 \dots a_{\bar{r}}\}$: in virtù della associatività possiamo riscrivere tale $(k+1)$-prodotto nella forma $a_{i_1} \dots a_{i_{t-1}} \bar{g} a_{i_{t+1}} \dots a_{i_{\bar{r}}} \omega$ con $t \neq j$, e $\bar{g}$ k-prodotto di G_k, costruito su $\bar{r}$ elementi di cui almeno due uguali, cioè $\bar{g} = 0$. Ma allora anche il $(k+1)$-prodotto da cui siamo partiti risulta nullo, e quindi $\tilde{G}_{k+1} = 0$, ossia $G^{k+1} = 0$ (Oss. 2).

Bibliografia

[1] C. Ferrero Cotti, *Su una classe di anelli cocritici*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **3** (1977), 203-211.

[2] C. Ferrero Cotti e S. Manara Pellegrini, *Su anelli critici e cocritici*, Le Matematiche **31** (1976), 147-155.

[3] C. Ferrero Cotti e M. F. Rinaldi, *Sugli Ω-gruppi a quozienti propri nilpotenti*, Boll. Un. Mat. Ital. (6) **1**-B (1982), 487-499.

[4] P. J. Higgins, *Groups with multiple operators*, Proc. London Mat. Soc. (1956), 366-416.

[5] K. Iwasawa, *Über die Struktur der endlichen Gruppen deren echte Untergruppen samtlich nilpotent sind*, Proc. Math. Soc. Japan **23** (1941), 1-4.

[6] A. G. Kurosh, *Algèbre Generale*, Dunod, Paris 1977.

[7] B. Micale, *Il nucleo e il centro di un Ω-gruppo distributivo*, Le Matematiche (1976), 277-296.

[8] O. Yu. Schmidt, *Groups all of whose subgroups are nilpotent*, Mat. Sb. **31** (1924), 366-372.

[9] R. Strano, *Su alcune proprietà degli Ω-anelli associativi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, **36** (1977-78).

---

[4] Un Ω-anello G è associativo (cfr. [9]) se per $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ di arietà n_1, n_2 rispettivamente, si ha $a_1 \dots a_i a_{i-1} \dots a_{i+n_1-1} \omega_1 \, a_{i+n_1} \dots a_{n_1+n_2-1} \, \omega_2 = a_1 \dots a_{n_1+n_2-1} \, \omega_1 \, \omega_2$, per ogni $a_1, \dots, a_{n_1+n_2-1} \in G$ e per ogni $i = 1, \dots, n_2$.

Summary

We proof that a distributive, non perfect Ω-group which is non nilpotent of class n, with nilpotent Ω-subgroups of class n at most, is solvable of class $n+1$. We also show that Ω-rings non nilpotent of class n, with nilpotent Ω-subrings of class n at most, are finitely generated and a method is determined to recognize the systems of generators; if moreover such Ω-rings are associative and generated by a maximum number of generators, they are nilpotent of class $n+1$.

* * *