Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 241-251

RODOLFO SALVI (*)

Soluzioni periodiche delle equazioni dei fluidi viscosi incomprimibili non omogenei (**)

1 - Introduzione

La risolubilità in grande del problema misto (secondo Hadamard) per il sistema

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
&\varrho\Big(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u}(t)+\big(\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla\big)\boldsymbol{u}(t)\Big)-\mu\Delta\boldsymbol{u}(t)=\varrho\boldsymbol{f}-\nabla p\,,\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{u}(t)=0\,,\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial t}+\big(\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla\varrho\big)=0\,,
\end{aligned}
$$

in un cilindro $Q=\Omega\times(0,T)$ (Ω aperto limitato in R^3, $T<\infty$) è stata dimostrata da S. N. Antonzev e A. V. Kajikov [**1**].

Successivamente l'esistenza ed unicità di una soluzione classica del sistema (1) è stata dimostrata da O. A. Ladyzhenskaya e V. A. Solonnikov in [**4**] e da A. V. Kajikov in [**2**] nel caso bidimensionale. In questi lavori la densità ϱ viene considerata strettamente positiva. Un teorema di esistenza del sistema (1) con densità $0\leqslant\varrho\leqslant\beta$ è stato dimostrato da J. Simon in [**7**]. Inoltre in [**6**] sono state studiate disequazioni variazionali connesse al sistema (1) con $0\leqslant\varrho\leqslant\beta$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Politecnico, Via Bonardi 9, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 21-X-1981.

In questa nota si dimostra l'esistenza di una soluzione periodica del sistema (1) con densità strettamente positiva.

In **2** si dà il quadro funzionale e si formula il problema.

In **3** si dimostra l'esistenza di una soluzione periodica di un sistema di equazioni ausiliarie.

In **4** si dimostra l'esistenza di una soluzione periodica del sistema (1).

2 - Formulazione del problema

Sia Ω un insieme aperto limitato di R^3 con contorno Γ. Nel cilindro $Q = \Omega\times(0, T)$, $T < \infty$ si considera il sistema di equazioni per $\boldsymbol{u}(t) = \{u_i(t), 1\leqslant i\leqslant 3\}$ e ϱ (la velocità e la densità) e per p (la pressione)

$$\varrho\Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}(t)}{\partial t} + (\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla(\boldsymbol{u}(t)) - \mu\Delta\boldsymbol{u}(t) = \varrho\boldsymbol{f} - \nabla p\,, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}(t) = 0\,, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \big(\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla\varrho\big) = 0, \tag{2.3}$$

con le condizioni iniziali

$$\boldsymbol{u}(x, 0) = u_0(x)\,, \tag{2.4}$$

$$\varrho(x, 0) = \varrho_0(x)\,, \tag{2.5}$$

e le condizioni al contorno

$$\boldsymbol{u}(x, t) = 0 \quad \text{su } \Sigma, \qquad \Sigma = \Gamma\times(0, T)\,. \tag{2.6}$$

In (2.1) si è posto $\big(\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla(\boldsymbol{u}(t)\big) = u_j(t)(\partial/\partial x_j)\boldsymbol{u}(t)$, (si usa la convenzione della somma rispetto agli indici ripetuti). Si considera il sistema (2.1) in una forma equivalente, ovvero se si moltiplica (2.3) per $\boldsymbol{u}(t)$ ed il risultato viene sommato a (2.1), si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\varrho\boldsymbol{u}(t)\big) + \varrho\big(\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla\big)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}(t)\big(\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla\big)\varrho - \mu\Delta\boldsymbol{u}(t) = \varrho\boldsymbol{f} - \nabla p\,,$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\big(\varrho\boldsymbol{u}(t)\big) + \frac{\partial}{\partial x_j}\big(u_j\varrho\,\boldsymbol{u}(t)\big) - \mu\Delta\boldsymbol{u}(t) = \varrho\,\boldsymbol{f} - \nabla p\,. \tag{2.7}$$

Si introducono i seguenti classici spazi funzionali $\mathscr{V} = \{v \mid v \in (\mathscr{D}(\Omega))^3,$ $\operatorname{div} v = 0\}$, $V = \{$chiusura in $(H^1(\Omega))^3$ di $\mathscr{V}\}$, $H = \{$chiusura in $(L^2(\Omega))^3$ di $\mathscr{V}\}$, ove $\mathscr{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$ spazio di Sobolev di ordine uno su $L^2(\Omega)$.

Si pone $((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = \int_\Omega (\partial u_i/\partial x_j)(\partial v_i/\partial x_j)\, \mathrm{d}x$, $\|\boldsymbol{u}\| = ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}))$, $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \mu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}))$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega u_i v_i\, \mathrm{d}x$, $|\boldsymbol{u}| = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$. Si considera, inoltre

$$\Phi = \left\{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in L^2(0, T; V);\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^{6/5}(\Omega));\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_j} \in L^\infty(0, T; L^{3/2}(\Omega))\right\}.$$

Moltiplichiamo (2.7) per $\boldsymbol{v} \in \Phi$, integriamo su Q ed otteniamo

$$\text{(2.8)} \qquad -\int_0^T \left\{\left(\varrho\, \boldsymbol{u}(t), \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right) - \int_\Omega u_j(t)\, \varrho\, u_i(t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x + a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - (\varrho\, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})\right\} \mathrm{d}t$$

$$= \left(\varrho_0 \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}(0)\right) - \left(\varrho(T)\, \boldsymbol{u}(T), \boldsymbol{v}(T)\right),$$

(dal teorema di immersione di Sobolev si ha $V \subset (L^6(\Omega))^3$, così $u_j \varrho u_i \in L^1(0, T;$ $L^3(\Omega))$ ed il secondo integrale in (2.8) ha senso se $\partial \boldsymbol{v}/\partial x_j \in L^\infty(0, T; L^{3/2}(\Omega))$).

Diamo, ora, la definizione di soluzione debole. $\{\boldsymbol{u}, \varrho\}$ è *soluzione debole* del sistema (2.1), (2.2), (2.3) se verifica (2.8), (2.5), (2.6) e $\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; V)$, $\varrho \in L^\infty(Q)$. Si osserva che se $\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; V)$, $\varrho \in L^\infty(Q)$, allora

$$\operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{u}) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \qquad H^{-1}(\Omega) = \text{duale di } H_0^1(\Omega),$$

così se è verificata la (2.3), allora $\partial\varrho/\partial t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ e la (2.5) ha senso.

Infine, se $\boldsymbol{u}$ è una soluzione debole della (2.8) appartiene a $L^\infty(0, T; H)$ e si ha $u_i \in L_4(0, T; L^3(\Omega))$; ne consegue $\varrho u_i u \in L^2(0, T; (L^{3/2}(\Omega))^3)$ e $\partial(\varrho \boldsymbol{u})/\partial t$ $\in L^2(0, T; V^{-\sigma})$ ($\sigma > 0$ abbastanza grande per cui si può definire $(\varrho \boldsymbol{u})_{t=0}$ e si ha $(\varrho \boldsymbol{u})_0 = \varrho_0 \boldsymbol{u}_0$). Il risultato principale del lavoro consiste nella determinazione di una soluzione debole del problema tale che $\{\boldsymbol{u}_0, \varrho_0\} = \{\boldsymbol{u}(T), \varrho(T)\}$, ovvero si dimostra il seguente

Teorema 2.1. *Sia*

$$\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; H) \text{ (periodica di periodo } T < \infty), \quad \varrho_0 \in L^\infty(\Omega), \quad 0 < \alpha \leqslant \varrho_0 \leqslant \beta \leqslant 1.$$

Allora esiste almeno una soluzione debole $\{\boldsymbol{u}, \varrho\}$ *tale che*

$$\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H); \quad \varrho \in L^\infty(Q), \quad \{\boldsymbol{u}_0, \varrho_0\} = \{\boldsymbol{u}(T), \varrho(T)\}.$$

Per dimostrare il Teorema 2.1 si studia un sistema ausiliario e si dimostra in **4** il Teorema 2.1.

3 - Sistema ausiliario

Si considera una famiglia di approssimazioni interne $V_m \subset V$. Si assume che V_m *è un sottospazio di* V *di dimensione* m, $\forall v \in V$ *esiste una successione* $\boldsymbol{v}_m \in V_m$ *tale che* $\boldsymbol{v}_m \to \boldsymbol{v}$ *in* V *come* $m \to \infty$; *tutte le componenti di* $\boldsymbol{v}$ *in* V_m *sono funzioni sufficientemente regolari.*

Si indica con P_m l'operatore di proiezione definito in V e a valore in V_m e con W lo spazio delle funzioni $\psi \in H^2(\Omega)$ per cui $\partial\psi/\partial n|_\Gamma = 0$ (n = normale esterna ad Ω).

Si considera il seguente sistema

$$\varrho^m \frac{\partial \boldsymbol{u}^m}{\partial t} + (\varrho^m P_m \boldsymbol{u}^{m-1} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}^m - \mu \Delta \boldsymbol{u}^m = \varrho^m \boldsymbol{f} - \frac{1}{2m} \Delta \varrho^m \boldsymbol{u}^m , \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \varrho^m}{\partial t} + (P_m \boldsymbol{u}^{m-1} \cdot \nabla)\varrho^m = \frac{1}{m} \Delta \varrho^m , \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{u}^m = 0 , \tag{3.2}$$

($m \geqslant 1$, $\boldsymbol{u}^0$ è una funzione assegnata di V) con le condizioni iniziali

$$\boldsymbol{u}^m(x, 0) = \boldsymbol{u}_0^m , \tag{3.3}$$ $$\varrho^m(x, 0) = \varrho_0^m , \tag{3.4}$$

e le condizioni al contorno

$$\boldsymbol{u}^m(x, t) = 0 \quad \text{su } \Sigma, \qquad \Sigma = \Gamma \times (0, T) .$$

Le funzioni $\boldsymbol{u}^m$, ϱ^m sono una soluzione debole del problema (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) se

(a) $\boldsymbol{u}^m \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$,
$\varrho^m \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; W) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$,

(b) l'equazione (3.2) è soddisfatta quasi-ovunque in Q,

(c) la seguente identità integrale vale per ogni $\boldsymbol{v} \in L^2(0, T; V)$

$$\int_0^T \Big\{\Big(\frac{\partial \varrho^m \boldsymbol{u}^m}{\partial t}, \boldsymbol{v}\Big) + \big((\varrho^m P_m \boldsymbol{u}^{m-1}, (\boldsymbol{u}^m \cdot \nabla)\boldsymbol{v}\big) + a(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}) - (\varrho^m \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) + \frac{1}{2m} (\Delta \varrho^m \boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v})\Big\} \, dt = 0 . \tag{3.5}$$

Teorema 3.1. *Sia* $f \in L^2(0, T; H)$ (periodica di periodo T), $u_0^m \in H$, $\varrho_0^m \in H^1(\Omega)$, $0 < \alpha \leqslant \varrho_0^m \leqslant \beta \leqslant 1$. *Allora esiste una ed una sola soluzione debole del problema* (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) *tale che*

$$u^m \in C(0, T; H)\,, \frac{\partial \varrho^m u^m}{\partial t} \in L^2(0, T; V') \text{ [1]}, \quad u_0^m = u^m(T), \quad \varrho_0^m = \varrho^m(T)\,.$$

Con procedimenti standard (cfr. [3]) si mostra che esiste una soluzione ϱ^m dell'equazione (3.2) tale che, per ogni m,

$$0 < \alpha \leqslant \varrho^m \leqslant \beta\,, \quad \frac{1}{m}\int_0^T \|\varrho^m\|_{H^1}^2 \mathrm{d}t \leqslant C_1\,, \qquad \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|\varrho^m\|_{H^1} + \frac{1}{m}\int_0^T \|\varrho\|_W^2 \,\mathrm{d}t \leqslant C_2\,.$$

Inoltre dalla teoria della regolarità per l'equazione del calore e dalla relazione

$$\|\nabla \varrho^m\|_{L^4(\Omega)} \leqslant |\Delta \varrho^m|^{1/2} \|\varrho^m\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/2}$$

si ha che

$$\Delta \varrho^m \in L^4(Q), \quad \frac{\partial \varrho^m}{\partial t} \in L^h(Q)\,.$$

Dimostriamo, ora, l'esistenza di una soluzione del sistema (3.5). Si usa il metodo di Faedo-Galerkin. Sia $w_1, w_2, w_3 \dots w_n, \dots$ una base di V data da $((w_j, v)) = \lambda_j(w_j, v)$ $\forall v \in V$, e si considera il seguente problema di Cauchy

$$(3.6) \qquad \Big(\varrho^m \frac{\partial u_n^m}{\partial t}, w_j\Big) + \int_\Omega \varrho^m (P_m u^{m-1})_i \frac{\partial u_{n,k}^m}{\partial x_i} w_{j,k} \mathrm{d}x + a(u_n^m, w_j)$$

$$- (\varrho^m f, w_j) + \frac{1}{2m}(\Delta \varrho^m u^m, w_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \dots n)\,,$$

con le condizioni iniziali $u_n^m(x, 0) = u_{0n}^m$, (si osserva che in (3.6) $u_n^m = \sum_1^n {}_j\, g_{nj}^m(t) w_j$).

Dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie si ottiene un numero $0 < t_n^m \leqslant T$ e funzioni $g_{nj}^m(t)$ assolutamente continue su $(0, t_n^m)$ che soddisfano (3.6) per quasi ogni $t \in (0, t_n^m)$.

---

[1] $V' =$ duale di V.

Mediante stime a priori standard si mostra che $\boldsymbol{u}_n^m$ esiste in tutto $(0, T)$. A tale proposito, moltiplichiamo (3.6) per $g_{nj}^m(t)$ e sommiamo su j da 1 a n, si ha

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \varrho^m \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{u}_n^m)^2\,dx + \int_\Omega \varrho^m (P_m\,\boldsymbol{u}^{m-1})_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_{nj}^m}{\partial x_i}\right)\boldsymbol{u}_{nj}^m\,dx \tag{3.7}$$

$$+ a(\boldsymbol{u}_n^m, \boldsymbol{u}_n^m) - (\varrho^m \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_n^m) + \frac{1}{2m}(\Delta\varrho^m \boldsymbol{u}_n^m, \boldsymbol{u}_n^m) = 0$$

(con $(\boldsymbol{u}_n^m)^2$ si indica $\boldsymbol{u}_n^m \cdot \boldsymbol{u}_n^m$).

Moltiplichiamo per $(\boldsymbol{u}_n^m)^2/2$ l'equazione (3.2) ed integriamo rispetto ad x, si ottiene

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial \varrho^m}{\partial t}(\boldsymbol{u}_n^m)^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial \varrho^m (P_m \boldsymbol{u}^{m-1})_i}{\partial x_i}(\boldsymbol{u}_n^m)^2\,dx - \frac{1}{2m}\int_\Omega \Delta\varrho^m (\boldsymbol{u}_n^m)^2\,dx = 0\,. \tag{3.8}$$

Sommando (3.7) e (3.8) si ottiene

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho^m (\boldsymbol{u}_n^m)^2\right)dx + a(\boldsymbol{u}_n^m, \boldsymbol{u}_n^m) - (\varrho^m \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_n^m) = 0\,,$$

da cui si deduce che

(3.9) $\boldsymbol{u}_n^m$ appartiene ad un insieme limitato di $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ indipendente da m, n,

(3.10) $(\partial/\partial t)(\varrho^m \boldsymbol{u}_n^m)$ appartiene ad un insieme limitato di $L^2(0, T; V')$ indipendente da n ma dipendente da m.

Dalle (3.9), (3.10) si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{u}_n^m \underset{L^2(0,T;V)}{=} \boldsymbol{u} \qquad \text{nella topologia debole}\,, \tag{3.11}$$

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{u}_n^m \underset{L^\infty(0,T;H)}{=} \boldsymbol{u}^m \qquad \text{nella topologia debole}\,^*, \tag{3.12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial t}(\varrho^m\,\boldsymbol{u}_n^m) \underset{L^2(0,T;V')}{=} \frac{\partial}{\partial t}(\varrho^m \boldsymbol{u}^m) \qquad \text{nella topologia debole}\,, \tag{3.13}$$

Con procedimenti standard si mostra che $\boldsymbol{u}^m$ è soluzione della (3.5), è unica e verifica (3.3). Mostriamo che $\boldsymbol{u}^m \in C(0, T; H)$. Procedendo nello stesso modo come in [**6**] si ottiene che $\boldsymbol{u}^m$ verifica la relazione

$$\begin{aligned}(3.14)\qquad &\int_0^t \Big\{\Big(\varrho^m \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^m\Big) + \int_\Omega \varrho^m (P_m \boldsymbol{u}^{m-1})_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^m)_i \,\mathrm{d}x + a(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^m)\\ &-(\varrho^m \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^m) + \frac{1}{2m}(\Delta\varrho^m \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^m) + \frac{1}{m}(\Delta\varrho^m \boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^m)\Big\}\,\mathrm{d}t\\ &\geqslant \frac{1}{2}\,\big|\sqrt{\varrho^m}\,(t)\big(\boldsymbol{u}^m(t)-\boldsymbol{v}(t)\big)\big|^2 - \frac{1}{2}\,\big|\sqrt{\varrho_0^m}\,(\boldsymbol{u}^m(0)-\boldsymbol{v}(0)\big|^2\end{aligned}$$

per quasi ogni $t \in (0, T)$ e $\forall \boldsymbol{v} \in L^2(0, T; V)$ tale che $\partial \boldsymbol{v}/\partial t \in L^2(Q)$.

Sia, ora, $\boldsymbol{u}_\eta^m$ soluzione dell'equazione

$$\eta \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u}_\eta^m + \boldsymbol{u}_\eta^m = \boldsymbol{u}^m, \qquad \boldsymbol{u}_\eta^m(0) = \boldsymbol{u}_0^m$$

e ponendo nella (3.14) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_\eta^m$ si ha

$$\begin{aligned}&-\eta\int_0^t \Big|\sqrt{\varrho^m}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u}^m\Big|^2 \mathrm{d}t + \int_0^t \Big\{\int_\Omega \varrho^m (P_m \boldsymbol{u}^{m-1})_j \frac{\partial \boldsymbol{u}_{\eta i}^m}{\partial x_j}(\boldsymbol{u}_\eta^m - \boldsymbol{u}^m)_i \,\mathrm{d}x + a(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{u}_\eta^m - \boldsymbol{u}^m)\\ &-(\varrho^m \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\eta^m - \boldsymbol{u}^m) + \frac{1}{2m}(\Delta\varrho^m \boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{u}_\eta^m - \boldsymbol{u}^m) + \frac{1}{m}(\Delta\varrho^m \boldsymbol{u}_\eta^m, \boldsymbol{u}_\eta^m - \boldsymbol{u}^m)\Big\}\\ &\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\,\big|\sqrt{\varrho^n}\,(t)\big(\boldsymbol{u}_\eta^m(t) - \boldsymbol{u}^m(t)\big)\big|^2\end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned}(3.15)\qquad &|\boldsymbol{u}_\eta^m(t) - \boldsymbol{u}^m(t)|^2 \leqslant c\int_0^t \Big\{\int_\Omega \varrho^m (P_m \boldsymbol{u}^{m-1})_j \frac{\partial \boldsymbol{u}_{\eta i}^m}{\partial x_j}(\boldsymbol{u}_\eta^m - \boldsymbol{u}^m)_i \,\mathrm{d}x\\ &+ a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\eta^m - \boldsymbol{u}^m) - (\varrho^m \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\eta^m - \boldsymbol{u}^m) + \frac{1}{2m}\big(\Delta\varrho^m(\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}_\eta^m, \boldsymbol{u}_\eta^m - \boldsymbol{u}^m)\big\}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Il secondo membro della (3.15) tende a zero per $\eta \to 0$ uniformemente rispetto a t per cui $\boldsymbol{u}^m(t)$ è continua da $(0, T)$ in H.

Mostriamo, ora, che esiste una soluzione della (3.5) tale che $\boldsymbol{u}_n^m(0) = \boldsymbol{u}_n^m(T)$. Supponiamo che $\varrho^m(t)$ sia tale che $\varrho_{(0)}^m = \varrho^m(T)$. Si considera l'applicazione $S: \sqrt{\varrho_0^m}\,\boldsymbol{u}_0^m \to \sqrt{\varrho_0^m}\,\boldsymbol{u}^m(T)$. Mostriamo che S è continua in G e trasforma opportuni insiemi limitati di G in sè $(G = \{v \mid v \in (L^2(\Omega))^3;\ v = \sqrt{\varrho_0^m}\,\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u} \in V_n =$ spazio generato da $w_1, w_2 \ldots w_n\})$. Per la continuità di S basta considerare due soluzioni $\boldsymbol{u}_n^m = \sum_1^n{}_j\, g_{nj}(t)\boldsymbol{w}_j$ e $\tilde{\boldsymbol{u}}_n^m = \sum \tilde{g}_{nj}(t)\boldsymbol{w}_j$ della (3.6) corrispondenti a valori iniziali $\boldsymbol{u}_{n0}^m$ e $\tilde{\boldsymbol{u}}_{n0}^m$; dalla (3.6) si ottiene

$$\left(\varrho^m \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{u}_n^m - \boldsymbol{u}_n^m), \boldsymbol{w}_j\right) + \int_\Omega \varrho^m (P_m \boldsymbol{u}^{m-1}) \cdot (\boldsymbol{u}_n^m - \tilde{\boldsymbol{u}}_n^m)_k \frac{\partial \boldsymbol{w}_{jk}}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x$$
$$+ a(\boldsymbol{u}_n^m - \tilde{\boldsymbol{u}}_n^m, \boldsymbol{w}_j) + \frac{1}{2m}\left(\Delta\varrho^m(\boldsymbol{u}_n^m - \tilde{\boldsymbol{u}}_n^m), \boldsymbol{w}_j\right) = 0\,. \tag{3.16}$$

Moltiplichiamo (3.16) per $g_{nj}(t) - \tilde{g}_{nj}(t)$, sommiamo su j da 1 a n e si ottiene

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \varrho^m \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{u}_n^m - \tilde{\boldsymbol{u}}_n^m)^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \varrho^m (P_m \boldsymbol{u}^{m-1})_i (\boldsymbol{u}_n^m - \tilde{\boldsymbol{u}}_n^m)_k \frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{u}_n^m - \tilde{\boldsymbol{u}}_n^m)_k\,\mathrm{d}x$$
$$+ a(\boldsymbol{u}_n^m - \tilde{\boldsymbol{u}}_n^m, \boldsymbol{u}_n^m - \tilde{\boldsymbol{u}}_n^m) + \frac{1}{2m}\left(\Delta\varrho^m(\boldsymbol{u}_n^m - \tilde{\boldsymbol{u}}_n^m), \boldsymbol{u}_n^m - \tilde{\boldsymbol{u}}_n^m\right) = 0\,. \tag{3.17}$$

Moltiplichiamo (3.2) per $(\boldsymbol{u}_n^m - \tilde{\boldsymbol{u}}_n^m)^2/2$ ed integriamo su Q, sommiamo il risultato alla (3.17), così si ottiene

$$\left|\sqrt{\varrho_0^m}\left(\boldsymbol{u}_n^m(T) - \tilde{\boldsymbol{u}}_n^m(T)\right)\right| \leqslant C\left|\sqrt{\varrho_0^m}\left(\boldsymbol{u}_n^m(0) - \tilde{\boldsymbol{u}}_n^m(0)\right)\right|,$$

e la continuità di S è dimostrata.

Mostriamo che S trasforma una sfera B_R di centro l'origine e raggio R (opportuno) in sè. Si considera l'equazione

$$\left(\varrho^m \frac{\partial \boldsymbol{u}_n^m}{\partial t}, \boldsymbol{u}_n^m\right) - \int_\Omega \varrho^m (P_m \boldsymbol{u}^{m-1})_j \boldsymbol{u}_{ni}^m \frac{\partial \boldsymbol{u}_{ni}^m}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x + a(\boldsymbol{u}_n^m, \boldsymbol{u}_n^m)$$
$$+ \frac{1}{2m}(\Delta\varrho^m \boldsymbol{u}_n^m, \boldsymbol{u}_n^m) - (\varrho^m \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_n^m) = 0\,; \tag{3.18}$$

con il solito procedimento si ha

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \varrho^m(\boldsymbol{u}_n^m)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega \varrho^m(\boldsymbol{u}_n^m)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\,c|\boldsymbol{f}|^2,$$

da cui

$$\int_\Omega \varrho^m(T)(\boldsymbol{u}_n^m(T))^2\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^{-cT}\int_\Omega \varrho_0^m(\boldsymbol{u}_{n0}^m)^2\,\mathrm{d}x + c\int_0^T |\boldsymbol{f}|^2\,\mathrm{d}t,$$

Scelto R in modo tale che $R \geq C_3 \int_0^T |\boldsymbol{f}|^2 \, dt / 1 - e^{-cT}$ si ottiene che S trasforma la sfera di centro l'origine e raggio R in sè; da ciò consegue che esiste un $\sqrt{\varrho_0^m}\, \boldsymbol{u}_{n0}^m$ tale che $\sqrt{\varrho_0^m}\, \boldsymbol{u}_{n_0}^m = \sqrt{\varrho_0^m}\, \boldsymbol{u}_n^m(T)$ ed indicheremo con $\boldsymbol{u}_n^m$ la soluzione della (3.6) corrispondente a tale $\boldsymbol{u}_{n_0}^m$.

Ora, con un procedimento analogo, si dimostra che $\varrho_0^m = \varrho^m(T)$. In seguito sceglieremo R in modo tale che $|\nabla \varrho_0^m|^2 \leq c . m^3$.

4 - Dimostrazione del Teorema (2.1)

Dapprima osserviamo che, usando lo stesso procedimento seguito in [**5**] o in [**6**] si ottiene che

$$\int_0^{T-h} |\boldsymbol{u}^m(t+h) - \boldsymbol{u}^m(t)|^2 \, dt \leq ch \qquad \forall h > 0 \,, \tag{4.1}$$

ove c ed h sono indipendenti da m ed $\boldsymbol{u}^m$ è soluzione della (3.5).

Allora dalle (3.9) e (4.1) si ha che $\boldsymbol{u}^m$ appartiene ad un insieme relativamente compatto di $L^p(0, T; (L^q(\Omega))^3)$; $p \in [2, \infty)$, $q \in [2, 6)$, $1/p + 3/2q > 3/4$. Dalle (3.9) e (4.1) (dato che per $P_m \boldsymbol{u}^{m-1}$ valgono le stesse stime di $\boldsymbol{u}^{m-1}$) si deduce che

$$\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{u}^m \underset{L^2(0,T;\,V)}{=} \boldsymbol{u} \qquad \text{nella topologia debole}\,, \tag{4.2}$$

$$\lim_{m\to\infty} P_m \boldsymbol{u}^{m-1} \underset{L^2(0,T;\,V)}{=} \boldsymbol{u} \qquad \text{nella topologia debole}\,, \tag{4.3}$$

$$\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{u}^m \underset{L^\infty(0,T;\,H)}{=} \boldsymbol{u} \qquad \text{nella topologia debole}\,^*, \tag{4.4}$$

$$\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{u}^m \underset{L^p(0,T;\,(L^q(\Omega))^3)}{=} \boldsymbol{u} \qquad \text{nella topologia forte}\,, \tag{4.5}$$

$$\lim_{m\to\infty} P_m \boldsymbol{u}^{m-1} \underset{L^p(0,T;\,(L^q(\Omega))^3)}{=} \boldsymbol{u} \qquad \text{nella topologia forte}\,, \tag{4.6}$$

$$\lim_{m\to\infty} \varrho^m \underset{L^\infty(Q)}{=} \varrho \qquad \text{nella topologia debole}\,^*. \tag{4.7}$$

Dalle (4.6) e (4.7) ne consegue che

$$\lim_{m\to\infty} (P_m \boldsymbol{u}^{m-1})_i \varrho^m \underset{L^p(0,T;\,(L^q(\Omega))^3)}{=} \boldsymbol{u}_i \varrho \qquad \text{nella topologia debole}\,.$$

Considerando la (3.2) nella forma

$$\frac{\partial \varrho^m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(P_m \boldsymbol{u}^{m-1}\varrho^m) - \frac{1}{m}\Delta\varrho^m = 0 \,,$$

dato che $1/m \int_0^T \|\nabla\varrho^m\|^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}t \leqslant C_i$, si ha

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\int_0^T (\Delta\varrho^m, \varphi)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \forall\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))\,,$$

e si ottiene che

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\partial\varrho^m}{\partial t} \underset{L^2(0,T;\,H^{-1}(\Omega))}{=} \frac{\partial\varrho}{\partial t} \quad \text{nella topologia debole}\,. \tag{4.8}$$

L'equazione (3.2) dà al limite

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{u}_j\varrho) = 0 \,,$$

e dalle (4.7) e (4.8) segue che, in particolare, $\varrho^m(x, 0) \to \varrho(x, 0)$ in $H^{-1}(\Omega)$ debolmente, perciò $\varrho(x, 0) = \varrho_0(x)$.

Resta da mostrare che $\boldsymbol{u}^m$ soddisfa (2.8) per ogni $\boldsymbol{v} \in \Phi$. Ripetendo lo stesso procedimento seguito in [**5**] si ottiene che $\boldsymbol{u}^m$ soddisfa (2.8). Così è dimostrato il teorema.

Bibliografia

[**1**] S. N. Antonzev and A. V. Kajikov, *Mathematical study of flows of non homogeneous fluids*, Novosibirsk Lecture of the University 1973.

[**2**] A. V. Kajikov, *Resolution of boundary value problems for non homogeneous viscous fluids*, Dokl. Akad. Nauk. **216** (1974), 1008-1010.

[**3**] A. V. Kajikov and T. Smagulov, *The correctness of a boundary value problem for a model of non homogeneous fluid with diffusion*, Sov. Phys. Dokl. **22** (1977), 249-250.

[4] O. A. LADYZENSKAJA and V. A. SOLONNIKOV, *Unique solvability of an initial boundary value problem for viscous incompressible non-homogeneous fluids*, J. Soviet Math. **9** (1978), 697-749.

[5] J. L. LIONS, *Problems connected with Navier-Stokes equations. Non linear evolution equations*, Editor G. Crandall, Academic Press 1978.

[6] R. SALVI, *Disequazioni variazionali per le equazioni dei fluidi viscosi incomprimibili non omogenei*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **8** (1982), 453-466.

[7] J. SIMON, *Ecoulement d'un fluide non-homogene avec densité initiale s'annullant*, C. R. Acad. Sci. **287** (1978), 1009-1012.

Sunto

Si dimostra l'esistenza di una soluzione periodica del sistema di equazioni dei fluidi viscosi incomprimibili non omogenei nel caso tridimensionale.

* * *