Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 153-160

MARIA GRAZIA DELFRATE (*)

I 2-grafi orientati ed una loro generalizzazione alla dimensione n (**)

Introduzione

I grafi orientati sono talvolta presi in considerazione, in teoria delle categorie, perchè a ciascuna categoria piccola resta associato il grafo orientato sottogiacente, ottenuto dimenticando la composizione e le identità. Passando dalle categorie alle 2-categorie, si suggerisce per analogia un concetto di « grafo due-dimensionale » o « 2-grafo » (1); tale concetto costituisce il punto di partenza per la presente indagine. Dopo una definizione che fa uso degli insiemi Hom, si esaminano alcune proprietà dei 2-grafi omogenei, regolari e bipartiti. Analogamente a quanto accade per i grafi orientati, si osserva che i 2-grafi si possono introdurre anche con le operazioni di dominio e codominio; questa nuova presentazione offre il vantaggio di prestarsi a una generalizzazione alla dimensione n. Detto in breve, un n-grafo ha un insieme di k-frecce, ciascuna avente come dominio e codominio due $(k-1)$-frecce in parallelo. Dopo aver osservato che gli n-grafi possono essere considerati come strutture del primo ordine per un opportuno linguaggio, si fornisce un insieme di enunciati (di tale linguaggio) che li caratterizzi. Sebbene gli n-grafi costituiscano, dunque, una classe assiomatica di strutture, il teorema conclusivo della nostra indagine mostra che tale classe non è chiusa rispetto alle più comuni costruzioni, come ad esempio i prodotti diretti. Si suggerisce, perciò, l'opportunità di proseguire

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Ricevuto: 4-VI-1981.
(1) Si osservi che la locuzione n-grafo è stata utilizzata altrove (cfr. ad es. [4]) per indicare delle strutture che, per $n \geqslant 2$, non sono confrontabili con le nostre.

l'indagine considerando gli n-grafi da un punto di vista diverso, e precisamente come strutture algebriche a più sorte.

1 - Richiami

Def. Siano V ed F due insiemi disgiunti, $F \neq \emptyset$, e Hom: $V^2 \to P(F)$ tale che $\bigcup_{a,b \in V} \mathrm{Hom}(a, b) = F$. La coppia (V, Hom) è detta *grafo orientato* quando per ogni (a, b), $(c, d) \in V^2$ se $(a, b) \neq (c, d)$ allora $\mathrm{Hom}(a, b) \cap \mathrm{Hom}(c, d) = \emptyset$. Gli elementi di V e di F sono detti rispettivamente *vertici* e *frecce*. Un elemento di $\mathrm{Hom}(a, a)$ è detto *cappio*. È noto che esistono altre presentazioni del concetto di grafo orientato. È utile richiamarne una, anche se non ci soffermeremo sulla dimostrazione della sostanziale equivalenza fra le due definizioni.

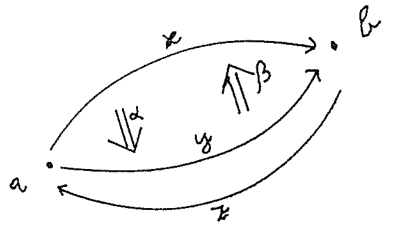
Dicesi *grafo orientato* una quaterna $(V, F, \partial_0, \partial_1)$ in cui V ed F sono due insiemi disgiunti $(F \neq \emptyset)$, i cui elementi prendono il nome di *vertici* e *frecce* rispettivamente, ∂_0, ∂_1 sono due applicazioni di F in V dette rispettivamente *dominio* e *codominio*. Gli elementi $f \in F$ per cui $\partial_0(f) = \partial_1(f)$ si diranno *cappi*. Un grafo orientato in cui l'insieme dei vertici sia vuoto, è detto *grafo-vuoto*, e si indicherà ancora con $\emptyset$.

2 - 2-grafi e qualche proprietà

Diamo ora una generalizzazione della prima definizione di grafo orientato al caso bidimensionale. Come è già stato osservato, il concetto è suggerito dal seguente esempio. Se si considera una 2-categoria piccola, e si dimenticano le composizioni e le identità, si ottiene un 2-grafo nel senso della seguente

Def. Sia $G_1 = (V_0, \mathrm{Hom})$ un grafo orientato; si ponga $F_1 = \bigcup_{a,b \in V_0} \mathrm{Hom}(a, b)$, e sia F_2 un insieme non vuoto disgiunto da V_0 e da F_1, i cui elementi verranno detti 2-*frecce*. Posto $V_1 = F_1$, sia $A_1 = \bigcup_{a,b \in V_0} [\mathrm{Hom}(a, b)]^2$ e sia $\mathrm{Hom}'\colon A_1 \to P(F_2)$ tale che $\bigcup_{(x,y) \in A_1} \mathrm{Hom}'(x, y) = F_2$. La quaterna $G_2 = (V_0, V_1, \mathrm{Hom}, \mathrm{Hom}')$ si dirà 2-*grafo* (*orientato*) quando per ogni (x, y), $(u, v) \in V_1^2$ se $(x, y) \neq (u, v)$ allora $\mathrm{Hom}'(x, y) \cap \mathrm{Hom}'(u, v) = \emptyset$. Dicesi 2-*grafo-vuoto* un 2-grafo il cui insieme di vertici sia vuoto.

Con ovvio significato dei simboli, la figura seguente descrive un 2-grafo $G = (V_0, V_1, \mathrm{Hom}, \mathrm{Hom}')$, dove $V_0 = \{a, b\}$, $V_1 = \{x, y, z\}$, e i valori diversi da $\emptyset$ di Hom e Hom$'$ sono $\mathrm{Hom}(a, b) = \{x, y\}$, $\mathrm{Hom}(b, a) = \{z\}$, $\mathrm{Hom}'(x, y) = \{\alpha\}$, $\mathrm{Hom}'(y, x) = \{\beta\}$.



Def. Due grafi orientati $\boldsymbol{G} = (V, \mathrm{Hom})$ e $\overline{\boldsymbol{G}} = (\overline{V}, \overline{\mathrm{Hom}})$ si dicono *disgiunti* se gli insiemi V, $\overline{V}$, F, $\overline{F}$ sono a due a due disgiunti, essendo F l'insieme delle frecce di $\boldsymbol{G}$, $\overline{F}$ l'insieme delle frecce di $\overline{\boldsymbol{G}}$. Una *famiglia* di grafi orientati si dice *disgiunta* se i grafi che la compongono sono a due a due disgiunti.

Dato un 2-grafo $\boldsymbol{G} = (V_0, V_1, \mathrm{Hom}, \mathrm{Hom}')$ per ogni $x, y \in V_0$ si ponga $\mathbf{Hom}(x, y) = \big(\mathrm{Hom}(x, y),\ \mathrm{Hom}' \restriction (\mathrm{Hom}(x, y))^2\big)$. È facile constatare che $\big(\mathbf{Hom}(x, y)\big)_{x,y \in V_0}$ è una famiglia disgiunta di grafi orientati. Essa sarà detta *sottogiacente* al 2-grafo $\boldsymbol{G}$.

Teorema. *Ogni famiglia disgiunta di grafi orientati è sottogiacente ad almeno un 2-grafo.*

Dim. Sia $(\boldsymbol{G}_i)_{i \in I_0}$, con $\boldsymbol{G}_i = (V_i, \mathrm{Hom}_i)$, una famiglia disgiunta di grafi orientati. Sia I un insieme disgiunto da ogni V_i, tale che card $I_0 \leqslant$ card I^2, con $h\colon I_0 \to I^2$ iniettiva; si definisca una nuova famiglia di grafi orientati $(\overline{\boldsymbol{G}}_{i,j})_{i,j \in I}$ ponendo $\overline{\boldsymbol{G}}_{i,j} = \boldsymbol{G}_{h^{-1}(i,j)}$ se $(i, j) \in \mathrm{Im}\, h$, $\overline{\boldsymbol{G}}_{i,j} = \emptyset$ altrimenti. Si osservi che la nuova famiglia coincide sostanzialmente con quella data, a meno di grafi vuoti. Si ha così il 2-grafo $\boldsymbol{G} = (I, F, \mathrm{Hom}, \mathrm{Hom}')$ in cui

$$F = \bigcup_{i,j \in I} \overline{V}_{i,j}\,, \qquad \mathrm{Hom}(i, j) = \overline{V}_{i,j} \qquad \text{per ogni } i, j \in I\,,$$

$$\mathrm{Hom}'(x, y) = \mathrm{Hom}_{h^{-1}(i,j)}(x, y) \qquad \text{dove } x, y \in \overline{V}_{i,j}\,.$$

È immediato verificare che la famiglia $(\overline{\boldsymbol{G}}_{i,j})_{i,j \in I}$ è sottogiacente al 2-grafo $\boldsymbol{G}$.

Si osservi che fissata una famiglia di grafi orientati il 2-grafo cui essa è sottogiacente dipende dalla scelta dell'insieme I, e dell'applicazione h.

Vediamo ora alcune proprietà specifiche dei 2-grafi limitatamente al caso finito.

Def. Dato un 2-grafo finito $(V_0, V_1, \mathrm{Hom}, \mathrm{Hom}')$, dicesi *grado di entrata* di un elemento $a \in V_0$ il numero $\mathrm{gr}\,(a) = \sum_{b \in V_0} \mathrm{card\,Hom}\,(b, a)$; dicesi *grado di uscita* di $a \in V_0$ il numero $\mathrm{gr}^*\,(a) = \sum_{b \in V_0} \mathrm{card\,Hom}\,(a, b)$. In modo analogo si definiscono i gradi di entrata e di uscita di $x \in V_1$: $\mathrm{gr}\,(x) = \sum_{y \in V_1} \mathrm{card\,Hom}'(y, x)$, $\mathrm{gr}^*\,(x) = \sum_{y \in V_1} \mathrm{card\,Hom}'\,(x, y)$.

Def. Un 2-grafo finito $\boldsymbol{G}$ si dirà *regolare* quando $\mathrm{gr}\,(x) = \mathrm{gr}^*\,(x)$ per ogni $x \in V_i$ $(i = 0, 1)$. Quando esistono due numeri naturali r_0, r_1 tali che $\mathrm{gr}\,(x) = \mathrm{gr}^*\,(x) = r_i$, per ogni $x \in V_i$, allora si dirà che $\boldsymbol{G}$ è *regolare di grado* (r_0, r_1).

Si ha banalmente che se un 2-grafo è regolare di grado (u, v) allora esso è regolare; ovviamente non vale il viceversa.

Def. Un 2-grafo $\boldsymbol{G}$ si dirà *omogeneo* quando per ogni $x, y, u, v \in V_0$, $\mathbf{Hom}\,(x, y)$ è isomorfo a $\mathbf{Hom}\,(u, v)$. Posto inoltre $\mathrm{card}\,(\mathrm{Hom}\,(x, y)) = r$, $\boldsymbol{G}$ si dice *omogeneo di grado* (r, s) se $\mathrm{card}\,(\mathrm{Hom}'\,(x, y)) = s$, per ogni $x, y \in V_1$.

Ovviamente se $\boldsymbol{G}$ è omogeneo di grado (u, v) allora esso è omogeneo. Contrariamente a quanto accade per i grafi orientati, esistono esempi di 2-grafi omogenei ma non regolari. Tuttavia si ha

Teorema. *Se $\boldsymbol{G} = (V_0, V_1, \mathrm{Hom}, \mathrm{Hom}')$ è un 2-grafo finito omogeneo di grado (u, v), allora esso è regolare di grado (nu, uv) essendo n la cardinalità di V_0.*

Dim. Sia $x \in V_0$; per ogni $y \in V_0$ si ha che $\mathrm{card}\,(\mathrm{Hom}\,(x, y)) = u$, cioè esistono u elementi di V_1 uscenti da x, per ogni $y \in V_0$. Essendo $\mathrm{card}\, V_0 = n$, si ha $\mathrm{gr}^*\,(x) = nu$. Analogamente, $\mathrm{gr}\,(x) = nu$. Sia ora $\alpha \in V_1$; precisamente siano $x, y \in V_0$ tali che $\alpha \in \mathrm{Hom}\,(x, y)$. Per ogni $\beta \in \mathrm{Hom}\,(x, y)$, $\mathrm{card\,Hom}'\,(\alpha, \beta) = v$, da cui $\mathrm{gr}^*\,(\alpha) = uv$, essendo $u = \mathrm{card\,Hom}\,(x, y)$. Analoga verifica per $\mathrm{gr}\,(\alpha) = uv$.

Il teorema non è invertibile; precisamente esistono tre numeri naturali n, u, v ed un 2-grafo $\boldsymbol{G} = (V_0, V_1, \mathrm{Hom}, \mathrm{Hom}')$ con $\mathrm{card}\, V_0 = n$, e $\boldsymbol{G}$ regolare di grado (nu, uv) ma non omogeneo di grado (u, v). Ad esempio, siano $n = 1$, $u = 2$, $v = 1$; il 2-grafo avente un solo vertice a, due cappi x, y, e tale che $\mathrm{Hom}'\,(x, y) = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{Hom}'\,(y, x) = \{\gamma, \delta\}$, $\mathrm{Hom}'\,(x, x) = \mathrm{Hom}'\,(y, y) = \emptyset$, è regolare di grado $(2, 2)$ ma non è omogeneo di grado $(2, 1)$.

Sia $\boldsymbol{G} = (V, \mathrm{Hom})$ un grafo orientato. Ricordiamo (cfr. anche [**1**]) che esso si dice bipartito quando V è unione di due suoi sottoinsiemi disgiunti B_1, B_2 tali che per ogni $a, b \in V$, se $\mathrm{Hom}\,(a, b) \neq \emptyset$ allora si ha $a \in B_1 \Leftrightarrow b \in B_2$.

Def. Un 2-grafo $G = (V_0, V_1, \mathrm{Hom}, \mathrm{Hom}')$ si dice *bipartito* quando per ogni $i = 0, 1$, V_i è unione di due suoi sottoinsiemi disgiunti $B_{i,1}$, $B_{i,2}$, tali che per ogni $a, b \in V_0$, se $\mathrm{Hom}(a, b) \neq \emptyset$ allora si ha $a \in B_{0,1} \Leftrightarrow b \in B_{0,2}$, e per ogni $u, v \in V_1$, se $\mathrm{Hom}'(u, v) \neq \emptyset$ allora $u \in B_{1,1} \Leftrightarrow v \in B_{1,2}$.

Si osservi che ogni grafo orientato bipartito è privo di cappi, essendo B_1, B_2 disgiunti.

Teorema. *Sia* $G = (V_0, V_1, \mathrm{Hom}, \mathrm{Hom}')$ *un 2-grafo. Se* G *è bipartito allora ogni ogni* $\mathbf{Hom}(x, y) \neq \emptyset$ *è bipartito.*

Dim. Fissati $x, y \in V_0$, con $\mathrm{Hom}(x, y) \neq \emptyset$, si ponga $B_1 = \mathrm{Hom}(x, y) \cap B_{1,1}$, $B_2 = \mathrm{Hom}(x, y) \cap B_{1,2}$, dove $B_{i,k}$ è una bipartizione di G. Si prova facilmente che $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ e $B_1 \cup B_2 = V_{x,y}$. Inoltre presi $a, b \in V_{x,y}$ con $\mathrm{Hom}'(a, b) \neq \emptyset$, si ha per ipotesi che $a \in B_{1,1} \Leftrightarrow b \in B_{1,2}$ che, in virtù del fatto che $a, b \in V_{x,y}$, equivale ad $a \in B_1 \Leftrightarrow b \in B_2$.

Si osservi che questo teorema non è invertibile; un controesempio è fornito da un 2-grafo avente tre vertici distinti x, y, z, e in cui gli unici insiemi di frecce non vuoti sono i seguenti: $\mathrm{Hom}(x, y) = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{Hom}(y, z) = \{\gamma, \delta\}$, $\mathrm{Hom}(z, x) = \{\mu, \nu\}$, $\mathrm{Hom}'(\alpha, \beta) = \{u\}$, $\mathrm{Hom}'(\gamma, \delta) = \{v\}$, $\mathrm{Hom}'(\mu, \nu) = \{w\}$.

Si osservi che, così come la prima definizione di grafo orientato è stata generalizzata al caso bidimensionale, anche la seconda definizione di grafo orientato si può estendere in modo naturale alla seguente

Def. Siano $(V_0, F_0, \partial_0, \partial_1)$, $(V_1, F_1, \partial_0', \partial_1')$ due grafi orientati tali che $V_1 = F_0$. Si dice che la 7-pla $G = (V_0, V_1, F_1, \partial_0, \partial_0', \partial_1, \partial_1')$ è un *2-grafo* (*orientato*) se $\partial_0 \partial_0' = \partial_0 \partial_1'$ e $\partial_1 \partial_0' = \partial_1 \partial_1'$.

Anche per i 2-grafi le due definizioni risultano sostanzialmente equivalenti, e la verifica procede con tecniche del tutto analoghe.

3 - Gli n-grafi come strutture relazionali

Def. Siano $A_0, A_1, \ldots, A_n$ $(n \geqslant 1)$ insiemi disgiunti a due a due, con $A_n \neq \emptyset$, e siano $\partial_0^{(1)}, \ldots, \partial_0^{(n)}, \partial_1^{(1)}, \ldots, \partial_1^{(n)}$ $2n$ applicazioni tali che $\partial_0^{(i)}, \partial_1^{(i)} \colon A_i \to A_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ e tali che valgano le seguenti uguaglianze

$$\partial_0^{(i)} \partial_0^{(i+1)} = \partial_0^{(i)} \partial_1^{(i+1)}, \qquad \partial_1^{(i)} \partial_0^{(i+1)} = \partial_1^{(i)} \partial_1^{(i+1)} \qquad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Dicesi *n-grafo*, o *grafo di dimensione* n, la $(3n+1)$-pla $G = (A_0, \ldots, A_n, \partial_0^{(1)}, \ldots, \partial_0^{(n)}, \partial_1^{(1)}, \ldots, \partial_1^{(n)})$. Gli elementi di A_k sono detti *k-frecce*, o frecce di dimensione k, se $1 \leqslant k \leqslant n$; vengono detti *vertici* gli elementi di A_0. Le applicazioni

$\partial_0^{(k)}$, $\partial_1^{(k)}$ prendono il nome di *dominio* e *codominio k-dimensionale* rispettivamente. Si osservi che per $n = 1$ si riottiene il concetto di grafo orientato, e per $n = 2$ quello di 2-grafo nel senso della seconda definizione data.

Introdurremo ora un opportuno linguaggio del primo ordine di cui gli n-grafi saranno particolari interpretazioni; si osservi che un n-grafo presentato come $(3n + 1)$-pla non ha la forma di una struttura relazionale del prim'ordine; tuttavia si può ovviare all'inconveniente considerando come unico insieme sottogiacente all'n-grafo l'unione degli insiemi $A_0, \ldots, A_n$, e introducendo dei predicati unari per esprimere l'appartenenza ai singoli insiemi A_i, e due simboli funzionali per parlare delle funzioni di dominio e codominio.

A tale scopo sia $\mathscr{L}_0$ un linguaggio del prim'ordine costituito dai seguenti segni extralogici: $n + 1$ predicati unari $P_0, \ldots, P_n$, e due simboli funzionali unari f, g. Per ogni n-grafo $\mathbf{G} = (A_0, \ldots, A_n, \partial_0^{(1)}, \ldots, \partial_0^{(n)}, \partial_1^{(1)}, \ldots, \partial_1^{(n)})$ si ponga $(k = 0, 1)$

$$\partial_k(x) = \begin{cases} \partial_k^{(i)}(x) & \text{se } x \in A_i \quad (i > 0) \\ x & \text{se } x \in A_0 \,. \end{cases}$$

Si noti che ∂_0 e ∂_1 sono operazioni unarie su $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$; si consideri la seguente interpretazione $\mathscr{M}_{\mathbf{G}} = (M; \psi)$ di $\mathscr{L}_0$: $M = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$, $\psi(P_i) = A_i \subseteq M$, $\psi(f) = \partial_0 \colon M \to M$, $\psi(g) = \partial_1 \colon M \to M$. L'interpretazione $\mathscr{M}_{\mathbf{G}}$ si dirà *associata* all'n-grafo $\mathbf{G}$.

Si consideri l'insieme Δ di enunciati di $\mathscr{L}_0$ cosiffatto:

(E_0) $\quad (\exists x)(P_n(x))$

(E_1) $\quad (\forall x)(P_0(x) \vee \ldots \vee P_n(x))$

(E_2) $\quad (\forall x)(P_i(x) \to \neg P_{i+1}(x) \wedge \ldots \wedge \neg P_n(x)) \qquad (i = 0, \ldots, n-1)$

(E_3) $\quad (\forall x)(P_i(x) \to P_{i-1}(f(x)) \wedge P_{i-1}(g(x))) \qquad (i = 0, \ldots, n)$

(E_4) $\quad (\forall x)(P_0(x) \to f(x) \doteq x \wedge g(x) \doteq x)$

(E_5) $\quad (\forall x)(f(f(x)) \doteq f(g(x)) \wedge g(f(x)) \doteq g(g(x)))$

Teorema. (i) *Un'interpretazione $\mathscr{M}$ di $\mathscr{L}_0$ è modello di Δ se e solo se esiste un n-grafo $\mathbf{G}$ cui essa è associata.* (ii) *L'operatore che associa a ciascun n-grafo $\mathbf{G}$ la struttura $\mathscr{M}_{\mathbf{G}}$, è una corrispondenza biunivoca fra la classe degli n-grafi e la classe dei modelli di Δ.*

Dim. Osserviamo anzitutto che gli enunciati (E_0)-(E_5) esprimono esattamente le varie proprietà definitorie degli n-grafi. Sia ora $\boldsymbol{G}$ un n-grafo; in virtù dell'osservazione precedente, $\mathscr{M}_G$ risulta modello di Δ. Viceversa, data $\mathscr{M}$, consideriamo la $(3n+1)$-pla $\boldsymbol{G} = (P_0^{\mathscr{M}}, \ldots, P_n^{\mathscr{M}}, f^{\mathscr{M}} \upharpoonright P_1^{\mathscr{M}}, \ldots, f^{\mathscr{M}} \upharpoonright P_n^{\mathscr{M}}, g^{\mathscr{M}} \upharpoonright P_1^{\mathscr{M}}, \ldots, g^{\mathscr{M}} \upharpoonright P_n^{\mathscr{M}})$; sempre per l'osservazione precedente, se $\mathscr{M}$ è modello di Δ allora $\boldsymbol{G}$ risulta un n-grafo, ed $\mathscr{M} = \mathscr{M}_G$. Con questo, (i) resta dimostrato.

Per dimostrare (ii), è sufficiente ora osservare che interpretazioni associate a n-grafi distinti sono distinte.

In virtù di questo teorema, sarà lecito chiamare n-grafi i modelli di Δ.

Teorema. *La classe degli n-grafi non è chiusa nè per sottostrutture, nè per prodotti diretti, nè per immagini omomorfe.*

Dim. Proviamo dapprima che la classe degli n-grafi non è chiusa per sottostrutture. Sia quindi $\mathscr{M}$ un n-grafo e sia $\mathscr{N}$ una sua sottostruttura in cui $P_n^{\mathscr{N}} = \emptyset$. Ovviamente $\mathscr{N}$ non è un n-grafo poichè $\underset{\mathscr{N}}{\not\models} (\exists x)(P_n(x))$.

Siano ora $\mathscr{M}$ ed $\mathscr{M}'$ due n-grafi, e poniamo $\mathscr{N} = \mathscr{M} \times \mathscr{M}'$. Detto N l'insieme sottogiacente alla struttura $\mathscr{N}$, si ha, con ovvio significato dei simboli, $N = \bigcup_{i=0}^{n} A_i \times \bigcup_{i=0}^{n} A_i'$. Siano $x \in A_h$, $y \in A_k'$, con $h \neq k$; allora $x \in \bigcup_{i=0}^{n} A_i$, $y \in \bigcup_{i=0}^{n} A_i'$ quindi $(x, y) \in N$. Essendo $P_i^{\mathscr{N}} = A_i \times A_i'$ $(i = 0, \ldots, n)$, e $A_i \cap A_j = \emptyset$, $A_i' \cap A_j' = \emptyset$ per $i \neq j$, si ha che $(x, y) \notin P_i^{\mathscr{N}}$ per ogni $i = 0, \ldots, n$. Questo basta per dire che $\underset{\mathscr{N}}{\not\models} (\forall x)(P_0(x) \vee \ldots \vee P_n(x))$, e dunque che $\mathscr{N}$ non è un n-grafo. Si consideri infine un n-grafo $\mathscr{M} = (M; A_0, \ldots, A_n, \partial_0, \partial_1)$ e, fissato $j = 1, \ldots, n$, si ponga $B_n = A_n, \ldots, B_{j+1} = A_{j+1}$, $B_j = B_{j-1} = \ldots = B_0 = \{*\}$, $N = \bigcup_{i=0}^{n} B_i$. Si definisca poi

$$\partial_0'(x) = \partial_0(x) \quad \text{e} \quad \partial_1'(x) = \partial_1(x) \qquad \text{se } x \in B_i, \; j+1 < i \leqslant n,$$

$$\partial_0'(x) = \partial_1'(x) = * \qquad \text{se } x \in B_i, \; 0 \leqslant i \leqslant j+1\,.$$

La struttura $\mathscr{N} = (N; B_0, \ldots, B_n, \partial_0', \partial_1')$ è immagine omomorfa di $\mathscr{M}$ attraverso l'omomorfismo h così definito

$$h(x) = x \qquad \text{se } x \in A_i, \; j+1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$h(x) = * \qquad \text{se } x \in A_i, \; 0 \leqslant i \leqslant j\,.$$

Tuttavia $\mathscr{N}$ non è un n-grafo in quanto gli insiemi B_i non sono a due a due disgiunti.

Il vantaggio di aver considerato gli n-grafi come strutture del primo ordine consiste nella possibilità di utilizzare i risultati generali della logica del primo ordine. Inoltre restano automaticamente individuate due classi notevoli di morfismi per gli n-grafi: gli omomorfismi e gli omomorfismi forti. Purtroppo, il teorema precedente mostra che, viceversa, i concetti di « sottografo », « grafo quoziente », « grafo prodotto » non sono ottenibili per questa via. Si osservi, però, che gli n-grafi possono essere visti anche come strutture algebriche, purchè si passi a linguaggi multisorte. Può dunque valere la pena di studiare gli n-grafi sotto questo secondo profilo, ed è quanto ci proponiamo di fare in una ricerca successiva.

Bibliografia

[1] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

[2] P. M. Cohn, *Universal algebra*, Harper and Row, New York 1965.

[3] F. Harary, *Graph theory*, Addison, Wesley Publishing Co., Reading 1972.

[4] F. Speranza, *Su alcuni singrammi che si possono associare ad un dato singramma pluridimensionale*, Studia Ghisleriana (Studi Mat.), Serie Spec. **22-31** (1967).

[5] R. J. Wilson, *Introduction to graph theory*, Oliver and Boyd, Edimburgh 1972.

Summary

A 2-graph is essentially an oriented graph enriched with 2-dimensional arrows connecting ordinary arrows. The notion can be generalized to the n^{th}-dimensional case. We prove that the n-graphs form an axiomatic class, which is not closed under the formation of direct products, substructures, homomorphic images.

* * *