Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 113-120

ALBERTA SUPPA MODENA (*)

Involuzioni su anelli costruite con "funzioni" di Jordan (**)

Introduzione

In [2] sono stati studiati i quasi-anelli N con involuzione j e si è visto che la j può essere sempre costruita con una funzione φ soddisfacente ad opportune condizioni. Nel caso particolare in cui N sia un anello, si è stabilito che sotto certe ipotesi φ risulta essere un omomorfismo di Jordan. Inoltre si può osservare che in un anello anticommutativo la funzione $j(x) = -x$ è una involuzione costruita con la funzione $\varphi(x) = -2x$ che risulta essere una derivazione di Jordan dell'anello. Queste considerazioni hanno suggerito di studiare più a fondo le involuzioni su anelli costruite con omomorfismi o derivazioni di Jordan.

In questo contesto si vede che una involuzione j su un anello R è costruita con una derivazione di Jordan φ se e solo se l'insieme degli elementi emisimmetrici K è un ideale di Jordan di R (Teorema 2).

Si esaminano poi gli anelli R una cui involuzione j è costruita con un omomorfismo di Jordan φ e si prova che in essi K è contenuto nell'anticentro e che K e S risultano entrambi ideali di Jordan di R (Teorema 4). Si dimostra quindi (Teorema 5) che un anello R in cui una involuzione j è costruita con una derivazione o un omomorfismo φ di Jordan è tale che $R/J(R)$, ove $J(R)$ indica il radicale di Jacobson di R, è commutativo.

Come caso particolare si danno infine le condizioni perchè un omomorfismo (antiomomorfismo) φ di R sia tale che la $j(x) = x + \varphi(x)$ sia un automorfismo involutorio (involuzione) di R (Teorema 6 e 7).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Via Università 12, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 28-IV-1981.

1 - Generalità

Sia R un anello; una *involuzione* su R è un automorfismo j di ordine due di R^+ tale che $\forall x, y \in R$ si abbia $j(xy) = j(y)j(x)$. Per le notazioni e le definizioni sugli anelli con involuzione ci riferiamo a [**4**]$_3$. Ricordiamo solo che indichiamo qui (come in [**4**]$_3$) con $S = \{x \in R \mid j(x) = x\}$ e $K = \{x \in R \mid j(x) = -x\}$ gli insiemi degli elementi simmetrici ed emisimmetrici di R; chiamiamo inoltre *anticentro* l'insieme $AC(R) = \{x \in R \mid xy = -yx \ \forall y \in R\}$ e *annullatore* l'insieme $A(R) = \{x \in R \mid xy = yx = 0 \ \forall y \in R\}$. *In tutto il lavoro R indica un anello privo di torsione due.* Come in [**2**] (cfr. th. 2) diciamo che in un anello R esiste una involuzione j se e solo se esiste un omomorfismo additivo $\varphi\colon R \to A \subseteq R$ tale che

$$\varphi(x) = -2x \quad \text{se e solo se } x \in A, \tag{1}$$

$$\varphi(xy) = -xy + yx + y\varphi(x) + \varphi(y)x + \varphi(y)\varphi(x)\,. \tag{2}$$

Anzi le involuzioni j su R sono tutte e sole le funzioni definite dalla $j(x) = x + \varphi(x)$. In questo senso diremo che j è costruita con la funzione φ.

Data una funzione φ, come sopra, si può considerare la funzione $\bar{\varphi}\colon R \to R$ definita dalla $\bar{\varphi}(x) = 2x + \varphi(x)$; questa risulta un omomorfismo additivo di R ed è tale che $\bar{\varphi}(\bar{\varphi}(x)) = 2\bar{\varphi}(x)$. Ebbene se $j(x) = x + \varphi(x)$ è una involuzione su R, la $\bar{j}(x) = -x + \bar{\varphi}(x)$ è una involuzione su R che coincide con j se e solo se $\bar{\varphi}(x) = 2x + \varphi(x)$. Si osservi infine che se R è un anello con involuzione j e φ, $\bar{\varphi}$ sono le funzioni di cui sopra, si ha $\varphi(R) \subseteq K$, $\bar{\varphi}(R) \subseteq S$, $\varphi(x) = 0$ se e solo se $x \in S$ e $\bar{\varphi}(x) = 0$ se e solo se $x \in K$.

2 - Omomorfismi e derivazioni di Jordan in un anello R

Dato un anello R si definisce *anello di Jordan* ad esso associato la struttura $R_J = [R; +, \circ]$, ove $x \circ y = xy + yx \ \forall x, y \in R$. I sottoanelli e gli ideali di R_J si dicono rispettivamente *sottoanelli* e *ideali di Jordan* di R.

Ricordiamo (cfr. ad es. [**4**]$_1$) che un *omomorfismo di Jordan* Φ di un anello R in un anello R' è un omomorfismo additivo di R in R' tale che $\Phi(x \circ y) = \Phi(x) \circ \Phi(y) \ \forall x, y \in R$, cioè è un omomorfismo di R_J in R'_J.

In [**4**]$_2$ si definisce *derivazione di Jordan* ψ di un anello R una derivazione dell'anello di Jordan R_J, cioè un omomorfismo additivo $\psi\colon R \to R$ tale che $\psi(x \circ y) = \psi(x) \circ y + x \circ \psi(y) \ \forall x, y \in R$. Ovviamente una derivazione o una antiderivazione di un anello R sono derivazioni di Jordan di R.

Ci proponiamo ora di stabilire un collegamento fra l'esistenza di una derivazione di Jordan e quella di un omomorfismo di Jordan di un anello R.

Allo scopo premettiamo il seguente

Lemma 1. *Sia R un anello e φ una derivazione di R in sè tale che $\varphi(\varphi(x)) = -2\varphi(x)$; allora*

(1) *$\varphi(R)$ è anticommutativo,*

(2) *la funzione $j(x) = x + \varphi(x)$ $(x \in R)$ è un automorfismo involutorio di R_J.*

(1) Sia $\varphi\colon R \to R$ una derivazione di Jordan con $\varphi(\varphi(x)) = -2\varphi(x)$. Applicando φ ad ambo i membri della $\varphi(x \circ y) = \varphi(x)\circ y + x \circ \varphi(y)$ risulta

$$-2\varphi(x\circ y) = \varphi(\varphi(x)\circ y) + \varphi(x\circ\varphi(y)) = \varphi(\varphi(x))\circ y + \varphi(x)\circ\varphi(y) + \varphi(x)\circ\varphi(y)$$

$$+ x\circ\varphi(\varphi(y)) = -2\varphi(x\circ y) + 2\varphi(x)\circ\varphi(y);$$

ne segue $\varphi(x)\circ\varphi(y) = 0$ e l'asserto.

(2) Sia φ una derivazione di Jordan di R con $\varphi(\varphi(x)) = -2\varphi(x)$; si ha $j(x\circ y) = x\circ y + \varphi(x\circ y)$. D'altra parte, calcolando $j(x)\circ j(y) = (x + \varphi(x))\circ(y + \varphi(y))$ e tenendo presente il punto (1), risulta $j(x)\circ j(y) = x\circ y + \varphi(x\circ y)$, onde j è un endomorfismo di R_J.

Infine j è involutorio perchè $\varphi(\varphi(x)) = -2\varphi(x)$ e quindi è un automorfismo.

Ricordando che si chiama insieme delle emitracce di un automorfismo α di un gruppo $[G; +]$ l'insieme $T_0 = \{-x + \alpha(x) \mid x \in G\}$ (cfr. [4]$_3$), si ha il

Teorema 1. *Sia R un anello e φ una funzione da R ad R. La funzione $j(x) = x + \varphi(x)$ $(x \in R)$ è un automorfismo involutorio di R_J con l'insieme delle emitracce anticommutativo se e solo se φ è una derivazione di Jordan di R tale che $\varphi(\varphi(x)) = -2\varphi(x)$.*

Sia j un automorfismo involutorio di R_J con l'insieme delle emitracce anticommutativo; la funzione $\varphi(x) = -x + j(x)$ è per definizione un omomorfismo additivo di R in sè tale che $\varphi(\varphi(x)) = -2\varphi(x)$ e $\varphi(x)\circ\varphi(y) = 0$. Inoltre risulta

$$\varphi(x\circ y) = -x\circ y + j(x)\circ j(y)$$

$$= -x\circ y + (x + \varphi(x))\circ(y + \varphi(y)) = \varphi(x)\circ y + x\circ\varphi(y)\,.$$

L'inverso segue dal Lemma 1.

3 - Derivazioni di Jordan e involuzioni di un anello R

Passiamo ora a caratterizzare le involuzioni di un anello R costruite con una derivazione di Jordan φ di R.

Lemma 2. *Sia R un anello con involuzione j; la funzione $\varphi(x) = -x + j(x)$ $(x \in R)$ è una derivazione di Jordan di R se e solo se K è un sottoanello di R.*

Sia $\varphi\colon R \to K$ una derivazione di Jordan; essendo j un'involuzione si ha $\varphi(x)\varphi(y) = -\varphi(y)\varphi(x)$ e, in particolare, per $x, y \in K$ risulta $4xy = -4yx$, da cui segue che K è anticommutativo in quanto R è privo di torsione due e quindi $j(xy) = yx = -xy$ per cui K è un sottoanello di R.

L'inverso segue ricordando le proprietà della φ (cfr. th. 2 di [**2**]) e che, essendo K un sottoanello di R, risulta, per $x, y \in K$, $j(xy) = -xy = j(y) \cdot j(x) = yx$.

Teorema 2. *Sia R un anello con involuzione j; la funzione $\varphi(x) = -x + j(x)$ $(x \in R)$ è una derivazione di Jordan di R se e solo se K è un ideale di Jordan di R.*

Sia $\varphi\colon R \to K$ una derivazione di Jordan di R; allora K è anticommutativo (Lemma 2) e quindi $\forall k \in K$, $\forall x \in R$ si ha $\varphi(k\circ x) = -2(k\circ x) + k\circ\varphi(x) = -2(k\circ x)$, per cui $k\circ x \in K$ (per il th. 2 di [**2**]). Viceversa se K è un ideale di Jordan di R si ha $\forall x \in R$, $\forall k \in K$ $k\circ x \in K$ per cui

$$\varphi(k\circ x) = -2(k\circ x)\,. \tag{1}$$

D'altra parte, poichè j è una involuzione (cfr. th. 2 di [**2**]),

$$\varphi(k\circ x) = -kx + xk + x\varphi(k) + \varphi(x)k + \varphi(x)\varphi(k) - xk + kx + k\varphi(x) + \varphi(k)x + \varphi(k)\varphi(x) = -2(k\circ x) - \varphi(x)\circ k. \tag{2}$$

Confrontando (1) con (2) si ha $\varphi(x)\circ k = 0$ e quindi, per $x \in K$, $xk = -kx$ per cui K è anticommutativo e, per il Lemma 2, φ è una derivazione di Jordan di R.

4 - Omomorfismi di Jordan e involuzioni in un anello R

Il teorema che segue collega l'esistenza di omomorfismi di Jordan su un anello R con l'esistenza di involuzioni su R.

Teorema 3. *Un omomorfismo additivo* φ *di un anello* R *in sè tale che* $\varphi(\varphi(x)) = -2\varphi(x)$ *e la funzione* $j(x) = x + \varphi(x)$ $(x \in R)$ *sono omomorfismi di Jordan di* R *in sè se e solo se* $\varphi(R) \subseteq AC(R)$ *e* $\varphi(R \circ R) = 0$.

Sia $\varphi\colon R \to R$ un omomorfismo di Jordan di R con $\varphi(\varphi(x)) = -2\varphi(x)$. Dall'ipotesi che j è un omomorfismo di Jordan di R, calcolando

$$j(x\circ y) = x\circ y + \varphi(x\circ y) = j(x)\circ j(y) = (x + \varphi(x))\circ(y + \varphi(y))$$

$$= x\circ y + x\circ\varphi(y) + \varphi(x)\circ y + \varphi(x)\circ\varphi(y) = x\circ y + x\circ\varphi(y) + \varphi(x)\circ y + \varphi(x\circ y)$$

segue

$$x\circ\varphi(y) = -\varphi(x)\circ y\ . \tag{1}$$

Applicando φ ad ambo i membri della (1), per le ipotesi fatte, risulta $4\varphi(x)\varphi(y) = -4\varphi(y)\varphi(x)$, da cui, essendo R privo di torsione due, segue $\varphi(x)\varphi(y) = -\varphi(y)\varphi(x)$ e dunque $\varphi(x\circ y) = 0$ $\forall x, y \in R$. Consideriamo ora la funzione $\bar{\varphi}(x) = 2x + \varphi(x)$; si ha

$$\bar{\varphi}(x\circ y) = 2(x\circ y)\ . \tag{2}$$

D'altra parte tenendo conto della (1), della anticommutatività di $\varphi(R)$ e della (2), si ha

$$\bar{\varphi}(x)\circ\bar{\varphi}(y) = 4xy + 2x\varphi(y) + 2\varphi(x)y + \varphi(x)\varphi(y) + 4yx + 2y\varphi(x) \tag{3}$$

$$+ 2\varphi(y)x + \varphi(y)\varphi(x) = 4(x\circ y) = 2\bar{\varphi}(x\circ y)\ .$$

Poichè $\bar{\varphi}(\varphi(x)) = 0$ da (2) e (3) per $y = \varphi(t)$ si ha $2\bar{\varphi}(x\circ\varphi(t)) = 0 = 4(x\circ\varphi(t))$ e quindi $x\circ\varphi(t) = 0$ $\forall x, t \in R$ per cui $\varphi(R) \subseteq AC(R)$. L'inverso è analogo.

Nel caso che R sia un anello con involuzione j sussiste il

Teorema 4. *Sia* R *un anello con involuzione* j; *la funzione* $\varphi(x) = -x + j(x)$ $(x \in R)$ *è un omomorfismo di Jordan di* R *se e solo se* S, K *sono ideali di Jordan di* R.

Sia R un anello con involuzione j; se la funzione $\varphi(x) = -x + j(x)$ è un omomorfismo di Jordan di R in sè, S e K risultano ideali di Jordan di R in quanto S è nucleo di φ e $K \subseteq AC(R)$: infatti per il Teorema 3 è $\varphi(R) \subseteq AC(R)$, da cui per $x \in K$, $y \in R$ si ha $-2xy = 2yx$ e quindi $-xy = yx$ essendo R privo di torsione due. Viceversa siano S, K ideali di Jordan di R; dal fatto che K è un ideale di Jordan di R segue (Teorema 2) che φ è una derivazione di Jordan di R, cioè

$$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ y + x \circ \varphi(y) . \tag{1}$$

Poichè S è un ideale di Jordan si ha $\varphi(s \circ x) = 0$ $\forall s \in S$, $\forall x \in R$. D'altra parte, poichè j è un'involuzione di R (th. 2 di [**2**]) è

$$\varphi(s \circ x) = -sx + xs + x\varphi(s) + \varphi(x)s + \varphi(x)\varphi(s) - xs + sx + s\varphi(x) + \varphi(s)x + \varphi(s)\varphi(x) = \varphi(x) \circ s$$

e quindi

$$\varphi(x) \circ s = 0 . \tag{2}$$

Poichè $2R = S + K$ si ha $2x = s + k$, $s \in S$, $k \in K$. Allora

$$2x \circ \varphi(y) = 2\big(x \circ \varphi(y)\big) = (s + k) \circ \varphi(y) = s\varphi(y) + k\varphi(y) + \varphi(y)s + \varphi(y)k$$

e, per la (2) e per il Lemma 2, è $2\big(x \circ \varphi(y)\big) = 0$ e quindi $x \circ \varphi(y) = 0$ perchè R è privo di torsione due. Dalla (1) si trae pertanto $\varphi(x \circ y) = 0 = \varphi(x) \circ \varphi(y)$.

Dai teoremi 2 e 4 segue il

Corollario 1. *Sia R un anello semplice con involuzione j; la funzione $\varphi(x) = -x + j(x)$ $(x \in R)$ è una derivazione (omomorfismo) di Jordan di R se e solo se R è un campo.*

Sia R un anello semplice con involuzione j e $\varphi(x) = -x + j(x)$ una derivazione (omomorfismo) di Jordan di R. Poichè R è semplice risulta semplice anche R_J (cfr. th. 2.1.1. di [**4**]$_3$) e quindi è $K = R$ oppure $K = 0$. Se $K = R$ si ha che R è anticommutativo (Lemma 2) e quindi (th. 6 di [**3**]) è un campo di caratteristica due, il che è escluso per ipotesi. Se $K = 0$, essendo R privo di torsione due, risulta $R = S$ e j è l'identità; l'anello R è perciò commutativo e quindi un campo.

Viceversa sia R un campo; allora K è costituito da elementi invertibili (il solo zero è nilpotente) e per il th. 2.3.4. di [**4**]$_3$ j è l'identità e φ una derivazione (omomorfismo) di Jordan di R.

Si stabilisce inoltre il seguente

Teorema 5. *Sia R un anello con involuzione j e $J(R)$ il suo radicale; se la funzione $\varphi(x) = -x + j(x)$ $(x \in R)$ è una derivazione (omomorfismo) di Jordan di R allora l'anello $R' = R/J(R)$ è commutativo.*

Sia R un anello con involuzione j; se φ è una derivazione (omomorfismo) di Jordan di R, K è anticommutativo per il Lemma 2 e quindi, per $x \in K$, $x^2 = 0$ in quanto R è privo di torsione due per cui (cfr. lemma 2.3.1 di [**4**]$_3$) è $J(R) \neq 0$.

Poichè $j(J(R)) = J(R)$ possiamo considerare nell'anello $R' = R/J(R)$ l'involuzione $j'(x + J(R)) = j(x) + J(R)$ che risulta costruita con la $\varphi'(x + J(R)) = \varphi(x) + J(R)$. Si verifica che anche φ' è una derivazione (omomorfismo) di Jordan di R' e da ciò discende che $K' = 0$ in quanto se fosse $K' \neq 0$ allora (lemma 2.3.1 di [4]$_3$ e Lemma 2) sarebbe $J(R') \neq 0$ il che contraddice il fatto che R' è semisemplice. Ne segue che R' è commutativo.

Visto che un omomorfismo (antiomomorfismo) di un anello R in sè è banalmente un omomorfismo di Jordan di R, particolari automorfismi involutori di R sono caratterizzati dal

Teorema 6. *Sia R un anello con $A(R) \neq 0$; gli automorfismi involutori j di R in sè rispetto ai quali $T_0 \subseteq A(R)$ sono tutte e sole le funzioni $j(x) = x + \varphi(x)$, ove φ è un omomorfismo (antiomomorfismo) di R in $A(R)$ con $\varphi(\varphi(x)) = -2\varphi(x)$.*

Sia $\varphi\colon R \to A(R)$ un omomorfismo con $\varphi(\varphi(x)) = -2\varphi(x)$; la funzione $j(x) = x + \varphi(x)$ è per definizione un automorfismo involutorio di R^+ ed inoltre si ha $j(x)j(y) = (x + \varphi(x))(y + \varphi(y)) = xy + x\varphi(y) + \varphi(x)y + \varphi(x)\varphi(y) = xy + \varphi(xy) = j(xy)$. Risulta poi $T_0 \subseteq A(R)$ poichè $-x + j(x) = \varphi(x)$.

L'inverso è ovvio.

Stabiliamo infine il seguente

Teorema 7. *Sia R un anello con involuzione j; la funzione $\varphi(x) = -x + j(x)$ $(x \in R)$ è un antiomomorfismo di R se e solo se $K^2 = 0$ e $R^2 \subseteq S$.*

Sia j un'involuzione su R e $\varphi(x) = -x + j(x)$ un antiomomorfismo per cui $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x) = -\varphi(yx) = -\varphi(x)\varphi(y)$ (Teorema 3); dalla $j(xy) = j(y)j(x)$ segue $xy + \varphi(xy) = yx + y\varphi(x) + \varphi(y)x + \varphi(y)\varphi(x)$ da cui

$$xy - yx = y\varphi(x) + \varphi(y)x\,. \tag{1}$$

Poichè j è un'involuzione, $\varphi(\varphi(x)) = -2\varphi(x)$ per cui, applicando φ ad ambo i membri della (1) si ha $\varphi(xy) - \varphi(yx) = -2\varphi(x)\varphi(y) - 2\varphi(x)\varphi(y)$ e quindi $2\varphi(xy) = 4\varphi(xy)$, da cui, essendo R privo di torsione due, è $\varphi(xy) = 0$ $\forall x, y \in R$. Si conclude allora che $R^2 \subseteq S$ e $K^2 = 0$.

L'inverso è ovvio.

Bibliografia

[1] C. Ferrero Cotti, *Sulle involuzioni di certi stems*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **7** (1981), 89-104.

[2] C. Ferrero Cotti e A. Modena Suppa, *Sugli stems con involuzione*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **7** (1981), 117-126.

[3] C. Ferrero Cotti e G. B. Rizza, *Anelli anticommutativi*, Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **107** (1972-73), 639-652.

[4] I. N. Herstein: $[\bullet]_1$ *Jordan homomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **8** (1956), 331-341; $[\bullet]_2$ *Jordan derivations of prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 1104-1110; $[\bullet]_3$ *Rings with involution*, Chicago Lectures in Math. Univ. of Chicago Press, Chicago 1976.

[5] N. Jacobson and C. E. Rickart: $[\bullet]_1$ *Jordan homomorphisms of rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950), 479-502; $[\bullet]_2$ *Homomorphisms of Jordan rings of self-adjoint elements*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 310-322.

[6] W. S. Martindale 3rd, *Jordan homomorphisms of the symmetric elements of a ring with involution*, J. Algebra **5** (1967), 232-249.

Summary

In this paper we study rings with involutions j construed with Jordan derivations or homomorphisms $\varphi(x) = -x + j(x)$. We prove that an involution j on a ring R is generated by a Jordan derivation φ if and only if the set K of skew elements of R is a Jordan ideal of R.

Then we prove that an involution j is construed with a Jordan homomorphism φ if and only if S and K are both Jordan ideals of R.

At last we see that if an involution j on a ring R is construed with a Jordan derivation or homomorphism φ, the ring $R/J(R)$, where $J(R)$ is Jacobson radical, is commutative.

* * *