Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 105-112

GIOVANNI MATARAZZO e ANTONIO SCALIA (*)

Sull'unicità del moto di un fluido viscoso e incomprimibile (**)

1 - Introduzione

Al problema dell'unicità del moto di un fluido viscoso e incomprimibile in un dominio illimitato di R^3 dopo l'importante memoria di Graffi [**3**] in cui si determina l'unicità in una nuova ampia classe di soluzioni, sono state dedicate anche recentemente numerose ricerche [**1**], $[\mathbf{4}]_{1,2}$.

In particolare in [**1**] si dimostrano due teoremi di unicità nell'insieme delle soluzioni regolari; nel primo si stabilisce l'unicità tra le $\boldsymbol{v}$ limitate e tali che la differenza di due soluzioni $(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) \in L^s(Q)$, $s > 1$; nel secondo si dà per la pressione una condizione del tipo $(p - p_0) \in L^s(Q)$, $s > 1$, mentre si richiede la velocità limitata ma non il gradiente.

Nella prima parte di questa nota il primo teorema di [**1**] viene esteso ad un particolare insieme di soluzioni deboli, si suppone cioè $\boldsymbol{v} \in L^\infty(Q)$ senza la condizione di appartenenza a $C^2(Q)$.

Con metodo identico a quello da noi utilizzato è possibile generalizzare anche il secondo teorema di [**1**].

Nella seconda parte studieremo l'unicità supponendo verificata al contorno una condizione dissipativa proposta da Serrin [**5**], che descrive lo scorrimento del fluido sulla parete in presenza di attrito.

Stabiliremo per tale problema due teoremi di unicità sotto le stesse condizioni richieste da Fabrizio in [**1**], ma in una classe più «piccola» rispetto

---

(*) Indirizzi: G. Matarazzo, Istituto di Meccanica Razionale, Facoltà di Ingegneria, Via Claudio, 80125 Napoli, Italy; A. Scalia, Istituto di Meccanica Razionale e di Matematiche Applicate all'Ingegneria, V.le A. Doria 6, 95125 Catania, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 15-IV-1981.

alla corrispondente classe determinata in [**1**]; infatti ora la condizione al contorno considerata non consente di utilizzare i teoremi validi negli spazi di funzioni a supporto compatto.

Infine per stabilire il terzo teorema abbiamo utilizzato un lemma provato da Rionero e Galdi in [**4**]$_2$, che in questo caso specifico risulta molto utile.

2 – Com'è noto il moto di un fluido viscoso e incomprimibile in un dominio illimitato Ω di R^3 è descritto dalle equazioni di Navier-Stokes

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla p - \nabla^2\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(x,t) \qquad (x,t)\in Q = \Omega\times(0,T)\,,\\ &\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0\,,\end{aligned}$$

dove $t\in(0,T)$ è la variabile temporale, $\boldsymbol{u}(x,t)$ e $p(x,t)$ designano rispettivamente la velocità e la pressione della particella di fluido che occupa la posizione $x\equiv(x_1,x^2,x^3)$ all'istante t e $\boldsymbol{f}(x,t)$ rappresenta le forze esterne; inoltre se supponiamo che il fluido aderisca alla parete $\partial\Omega$, che riteniamo fissa (1), alle (1) associamo la condizione al contorno

$$(2)\qquad \boldsymbol{u}(x,t) = 0 \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T)$$

e la condizione iniziale

$$(3)\qquad \boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_0(x) \qquad x\in\Omega\,.$$

In questo lavoro studieremo il problema dell'unicità di (1), (2), (3) in un sottoinsieme della classe di soluzioni deboli precisata nella seguente definizione.

Definizione 1. Una *soluzione debole* del problema (1), (2), (3) con $\boldsymbol{u}_0(x)\in L^\infty(\Omega)$ e $\boldsymbol{f}(x,t)\in L^\infty(Q)$ è una funzione vettoriale $\boldsymbol{u}\in L^\infty(Q)$ che soddisfa l'equazione integrale

$$(4)\qquad \int_0^T\!\!\int_\Omega(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}_t + \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla^2\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_\Omega \boldsymbol{u}_0(x)\cdot\boldsymbol{\varphi}(x,0)\,\mathrm{d}x$$

per ogni vettore $\boldsymbol{\varphi}$ di $F(Q)=\{\boldsymbol{\varphi}\in C_0^\infty(Q),\ \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}=0,\ \boldsymbol{\varphi}(x,t)_{\partial\Omega}=0,\ \boldsymbol{\varphi}(x,T)=0\}$.

Dimostreremo il seguente teorema di unicità.

Teorema 1. *Esiste al più una soluzione debole* $\boldsymbol{u}\in L^\infty(Q)$ *del problema* (1), (2), (3) *fra tutte le* $\boldsymbol{v}\in L^\infty(Q)$ *e tali che* $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\in L^2(Q)$.

---

(1) La frontiera $\partial\Omega$ è una varietà a due dimensioni differenziabile con continuità.

Dim. Si suppone che esistono due soluzioni $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in L^\infty(Q)$, tali che $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) \in L^2(Q)$, del problema (1), (2), (3); risulta allora

$$\int_0^T \int_\Omega [(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot \boldsymbol{\varphi}_t + (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}):\nabla\boldsymbol{\varphi} + (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot\nabla^2\boldsymbol{\varphi}]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0$$

per tutti i vettori $\boldsymbol{\varphi} \in F(Q)$.

Se $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ è il tensore del terzo ordine di componenti $B_{ijh} = \delta_{ij}(u_h + v_h) + \delta_{jh}(u_i + v_i)$, [1], tale che $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}$, possiamo esprimere tale eguaglianza nel modo seguente per tutti i $\boldsymbol{\varphi} \in F(Q)$

$$\int_0^T \int_\Omega (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot[\boldsymbol{\varphi}_t + \boldsymbol{B}:\nabla\boldsymbol{\varphi} + \nabla^2\boldsymbol{\varphi}]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0\,. \tag{5}$$

Poichè le funzioni $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in L^\infty(Q)$, il tensore $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ non è in generale una funzione regolare in Q, pertanto consideriamo una successione di funzioni $w_m(r) \in C^\infty$, $r^2 = x^2 + t^2$, $(x, t) \in R^3 \times R$, $m \in N$, per cui si abbia

$$\text{(a)}\quad w_m(r) > 0 \quad \text{per } r < \frac{1}{m}, \qquad \text{(b)}\quad w_m(r) = 0 \quad \text{per } r \geqslant \frac{1}{m}, \qquad \text{(c)}\ \iint_{r<1/m} w_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 1\,.$$

Definiamo le funzioni $\boldsymbol{u}_m$, $\boldsymbol{v}_m$ come prodotti di convoluzione rispettivamente di $\boldsymbol{u}$ e w_m e $\boldsymbol{v}$ e w_m; le funzioni così ottenute sono elementi di C^∞ e convergono al divergere di m rispettivamente a $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ nella norma di $L^2(Q)$. Ponendo quindi per ogni m $\boldsymbol{B}_m(x,t) = \boldsymbol{B}\big(\boldsymbol{u}_m(x,t), \boldsymbol{v}_m(x,t)\big)$ e tenendo conto che $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ dipende linearmente da $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, anche la successione $\boldsymbol{B}_m(x,t)$ converge a $\boldsymbol{B}(x,t)$ per $m \to \infty$ nella norma di $L^2(Q)$.

Consideriamo ora il seguente problema

$$\begin{aligned}
&(6)_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_t^m + \boldsymbol{B}_m(x,t):\nabla\boldsymbol{\varphi}^m + \nabla^2\boldsymbol{\varphi}^m - \nabla q^m = \boldsymbol{g}(x,t) && \\
&(6)_2 \quad \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}^m = 0\,, && (x,t) \in \Omega\times(0,T)\,,\\
&(6)_3 \quad \boldsymbol{\varphi}^m(x,T) = 0 \quad x \in \Omega\,, \qquad \boldsymbol{\varphi}^m(x,t) = 0 && (x,t) \in \partial\Omega\times(0,T)\,,
\end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{g}(x,t)$ é funzioni di $C_0^\infty(Q)$.

Tale problema con il cambiamento di variabile $\tau = T - t$ si riconduce al seguente sistema di equazioni con condizioni ai limiti omogenee

$$\begin{aligned}
&(7)_1 \quad \boldsymbol{\psi}_\tau^m - \widetilde{\boldsymbol{B}}_m:\nabla\boldsymbol{\psi}^m - \nabla^2\boldsymbol{\psi}^m + \nabla q^{*m} = \boldsymbol{g}^*(x,\tau) && \\
&(7)_2 \quad \nabla\cdot\boldsymbol{\psi}^m = 0\,, && (x,\tau) \in \Omega\times(0,T)\,,\\
&(7)_3 \quad \boldsymbol{\psi}^m(x,0) = 0 \quad x \in \Omega\,, \qquad \boldsymbol{\psi}^m(x,\tau) = 0 && (x,\tau) \in \partial\Omega\times(0,T)\,,
\end{aligned}$$

ove $\quad \psi^m(x,\tau) = \varphi^m(x, T-\tau)\,, \qquad \widetilde{B}_m(x,\tau) = B_m(x, T-\tau)\,,$

$$q^{*m}(x,\tau) = q^m(x, T-\tau) \quad \text{e} \quad g^*(x,\tau) = -g(x, T-\tau)\,.$$

Per il sistema lineare di Navier-Stokes (7) a coefficienti regolari e limitati esiste per ogni m almeno una soluzione appartenente allo spazio $W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega))$; ammette allora almeno una soluzione di tale spazio anche il problema (6) ([1], [2]).

Moltiplicando la $(6)_1$ per $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) \in L^2(Q)$ e integrando su Q si ottiene

$$\int_0^T \int_\Omega (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot[\boldsymbol{\varphi}_t^m + \boldsymbol{B}_m : \nabla\boldsymbol{\varphi}^m + \nabla^2\boldsymbol{\varphi}^m]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,. \tag{8}$$

Osserviamo ora che per la Proposizione 1 di [1] è possibile porre nella (5) $\boldsymbol{\varphi}(x,t) = \boldsymbol{\varphi}^m(x,t)$ (*); in tale ipotesi dalla (5) e dalla (8) si ha

$$\int_0^T \int_\Omega (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{B}_m - \boldsymbol{B}) : \nabla\boldsymbol{\varphi}^m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,. \tag{9}$$

Proveremo la validità del teorema mostrando che

$$\int_0^T \int_\Omega (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \forall \boldsymbol{g} \in C_0^\infty(Q)\,. \tag{10}$$

Applicando infatti la diseguaglianza di Schwartz alla (9) riesce

$$\left|\int_0^T \int_\Omega (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{B}_m - \boldsymbol{B})\|_{L^2(Q)} \|\nabla\boldsymbol{\varphi}^m\|_{L^2(Q)}\,;$$

poichè, al divergere di m, $\boldsymbol{B}_m$ tende a $\boldsymbol{B}$ in $L^2(Q)$ e la norma $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|_{L^\infty(Q)}$ è limitata per ipotesi, per verificare la (10) basta provare che $\|\nabla\boldsymbol{\varphi}^m\|_{L^2(Q)}$ si mantiene limitata per $m \to \infty$; tale comportamento è stabilito dal seguente

Lemma 1. *Se $k > 0$ è una costante indipendente da m e $\boldsymbol{\psi}^m$ è una soluzione del problema* (7), *allora*

$$\|\nabla\boldsymbol{\psi}^m\|_{L^2(Q)} \leqslant k\,.$$

Dim. Moltiplicando la $(7)_1$ per $\boldsymbol{\psi}_\tau^m$, integrando su Ω e applicando il teorema della divergenza si ha

$$2\int_\Omega (\boldsymbol{\psi}_\tau^m)^2\,\mathrm{d}x + \partial_\tau \int_\Omega (\nabla\boldsymbol{\psi}^m)^2\,\mathrm{d}x = 2\int_\Omega \boldsymbol{g}^*\cdot\boldsymbol{\psi}_\tau^m\,\mathrm{d}x + 2\int_\Omega \boldsymbol{\psi}_\tau^m \cdot \widetilde{\boldsymbol{B}}_m : \nabla\boldsymbol{\psi}^m\,\mathrm{d}x\,; \tag{10$'$}$$

(*) Infatti, quando $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) \in L^2(Q)$ l'uguaglianza (5) continua a valere, in base alla Proposizione 1 di [1], anche $\forall \boldsymbol{\varphi}(x,t) \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega))$.

poichè è $2\int\limits_{\Omega}\psi_\tau^m\cdot\widetilde{\boldsymbol{B}}_m:\nabla\psi^m\,dx\leqslant\int\limits_{\Omega}(\Psi_\tau^m)^2\,dx+k_1\int\limits_{\Omega}(\nabla\psi^m)^2\,dx$, con $k_1=\operatorname{esssup}_Q|\widetilde{\boldsymbol{B}}|^2$ e $\widetilde{\boldsymbol{B}}(x,\tau)=\boldsymbol{B}(x,T-t)$, da (10)′ si ottiene

$$\partial_\tau\|\nabla\psi^m\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant\|\boldsymbol{g}^*\|^2_{L^2(\Omega)}+k_1\|\nabla\psi^m\|^2_{L^2(\Omega)},$$

integrando in $(0,\tau)$, $\tau\in(0,T)$ e ponendo $h(t)=\int\limits_0^t\|\boldsymbol{g}^*\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\tau$, per la diseguaglianza di Gronwall risulta

$$\|\nabla\psi^m\|^2_{L^2(Q)}\leqslant k_1\int\limits_0^\tau h(t)\,e^{k_1t}\,dt+h(\tau)\,, \tag{10″}$$

dalla (10)″ segue infine il risultato del Lemma.

3 – I risultati dei lavori [**1**], [**3**], [**4**]$_{1,2}$ come quelli del Teorema I, sono relativi ad un fluido viscoso che aderisce completamente alle pareti; in realtà il fluido, quando pressione e tensione superficiale non sono troppo elevate, non aderisce ma scorre sulle pareti [**5**]; in tal caso il moto può essere descritto mediante il sistema di equazioni (1) con la condizione iniziale (3) e con la condizione al contorno [**5**]

$$2\,(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n})_\tau=-\,k\boldsymbol{u}\qquad(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T)\,, \tag{11}$$

dove $\boldsymbol{D}=(\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^T)/2$, $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale esterna a $\partial\Omega$, $(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n})_\tau$ è il componente tangenziale di $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}$ su $\partial\Omega$ e $k>0$ rappresenta il coefficiente di attrito dinamico della parete che supponiamo costante.

Osserviamo che se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono soluzioni regolari del problema (1), (3), (11) risulta

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=\nabla\cdot[(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})]\,.$$

Per una più precisa definizione del problema introduciamo il seguente spazio $V^r(\Omega)=\{\boldsymbol{u}:\boldsymbol{u}\in W^{2,r}(\Omega),\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, 2\,(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n})_\tau=-\,k\boldsymbol{u}\ \text{su}\ \partial\Omega\}$.

Il seguente teorema consente di dimostrare l'unicità in una sottoclasse delle funzioni limitate ed appartenenti allo spazio

$$N'=L^r(0,T;W^{2,r}_{\mathrm{loc}}(\Omega))\cap W^{1,r}(0,T;L^r_{\mathrm{loc}}(\Omega))\,.$$

Teorema 2. *Se* $\boldsymbol{u}\in N'$ *è una soluzione limitata del problema* (1), (3), (11), *allora essa è unica nella classe*

$$V^u = \{v \in N',\ \exists M : v < M,\ (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \in L^s(Q),\ s > 1,\ \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1,$$
$$\int_0^T \int_\Omega (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \cdot \Big[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) : \nabla \boldsymbol{\varphi} + \nabla^2 \boldsymbol{\varphi} \Big] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = 0,$$
$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in W^{1,r}(0, T; L^r(\Omega)) \cap L^r(0, T; V^r(\Omega))\} . \tag{12}$$

Dim. Supponiamo che esista un'altra soluzione $\boldsymbol{v}$ del problema (1), (3), (11) appartenente a V^u, allora dalla definizione di V^u si ha

$$\int_0^T \int_\Omega (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \cdot \Big[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) : \nabla \boldsymbol{\varphi} + \nabla^2 \boldsymbol{\varphi} \Big] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = 0$$
$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in W^{1,r}(0, T; L^r(\Omega)) \cap L^r(0, T; V^r(\Omega)) .$$

Consideriamo ora il seguente problema duale

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) : \nabla \boldsymbol{\varphi} + \nabla^2 \boldsymbol{\varphi} - \nabla q = \boldsymbol{g} \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0 , \end{aligned}\right\} \quad (x, t) \in Q ,$$
$$\boldsymbol{\varphi}(x, T) = 0 \qquad x \in \Omega ,$$

con condizione al contorno del tipo (11).

Poichè la condizione al contorno (11) è omogenea, è possibile provare in modo analogo al lavoro [**2**], che questo sistema ammette almeno una soluzione $\boldsymbol{\varphi} \in W^{1,r}(0, T; L^r(\Omega)) \cap L^r(0, T; W^{2,r}(\Omega))$ $\forall \boldsymbol{g}$ e $\nabla q \in L^r(Q)$. Dalla (12) e da quanto detto ne viene $\forall \boldsymbol{g} \in L^r(Q)$

$$\int_0^T \int_\Omega (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \cdot \Big[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) : \nabla \boldsymbol{\varphi} + \nabla^2 \boldsymbol{\varphi} \Big] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{g}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = 0 ;$$

quest'ultima uguaglianza implica che $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.

Questa dimostrazione risulta semplificata rispetto a quella contenuta in [**1**], in quanto la classe V^u in cui determiniamo l'unicità risulta « leggermente più piccola » rispetto a quella del Teorema 1 di [**1**], a causa della relazione integrale (12).

Dimostriamo ora un secondo teorema di unicità per il problema (1), (3), (11), utilizzando un lemma simile a quello stabilito in [**4**]$_2$; a tal fine se supponiamo che Ω sia l'esterno di un insieme limitato Ω_0 di R^3 e che $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ siano due soluzioni di tale problema, abbiamo [4]$_2$

$$\frac{\mathrm{d}E^{(q)}}{\mathrm{d}t}=\int_\Omega\Big\{\frac{w^q}{q}[\partial_t g+(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u})\cdot\nabla g] \tag{13}$$

$$-gw^{q-2}[\boldsymbol{w}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}+(q-2)w^{-2}(\nabla\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})^2+\nabla p\cdot\boldsymbol{w}]-w^{q-2}\nabla g\cdot\nabla\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}\Big\}\mathrm{d}x$$

$$-\tfrac{1}{2}k\int_{\partial\Omega}gw^q\,\mathrm{d}\sigma\,,$$

dove $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$, $g(x,t)$ è una funzione scalare positiva e $E^q=1/q\int_\Omega gu^q\,\mathrm{d}x$ $q>1$.

Da (13) con considerazioni analoghe a quelle espresse in [4]$_2$ si deduce il

Lemma 2. *Se* $u\leqslant M$, $w\leqslant M\varrho^a$ $(0\leqslant a<1,\ \varrho\geqslant\bar\varrho)$, *allora per* $q>2$,

$$\boldsymbol{w}\in L^q(Q)\cap L^q(\partial\Omega\times(0,T))\,,\qquad w^{1/2(q-2)}\nabla\boldsymbol{w}\in L^2(Q)\,,$$

se è soddisfatta almeno una delle seguenti condizioni $\nabla p\in L^q(\Omega)$ *oppure* $p\in L^q(\Omega)$.

Tale lemma ci consente di stabilire il seguente

Teorema 3. *Se* $\boldsymbol{u}$ *è soluzione limitata del problema* (1), (3), (11), *allora essa è unica nella classe*

$$V_u'=\Big\{\boldsymbol{v}\in N',\ \exists M:\boldsymbol{v}\leqslant M,\ \omega\leqslant M\varrho^a,\ 0\leqslant a<1,\ \varrho\geqslant\bar\varrho,$$

$$\int_0^T\int_\Omega(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot[\boldsymbol{\varphi}_t+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}):\nabla\boldsymbol{\varphi}+\nabla^2\boldsymbol{\varphi}]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=0\,,$$

$$\forall\boldsymbol{\varphi}\in W^{1,r}(0,T;L^r(\Omega))\cap L^r(0,T;V^r(\Omega))\Big\}\,,$$

quando è soddisfatta almeno una delle seguenti condizioni $\nabla p\in L^s(Q)$ *oppure* $p\in L^s(Q)$, $s>2$ *e* $1/r+1/s=1$.

Dim. Poichè $v\leqslant M$, $w\leqslant M\varrho^a$, $0\leqslant a<1$, $\varrho\geqslant\bar\varrho$ ed è soddisfatta una delle due condizioni $p\in L^s(Q)$ oppure $\nabla p\in L^s(Q)$ con $s>2$, per il Lemma 2 abbiamo che $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\in L^s(Q)$ e ciò comporta, insieme all'ipotesi $1/r+1/s=1$ e $\boldsymbol{v}\in N'$, che le due classi V_u e V_u' coincidono.

Questo risultato permette infine di provare la validità del Teorema 3 come conseguenza del Teorema 2.

Bibliografia

[1] M. Fabrizio, *Problemi di unicità per le equazioni di Navier-Stokes in domini non limitati*, Arch. Rational Mech. Anal. **68** (1978), 171-178.

[2] C. Giorgi, *Un problema di esistenza ed unicità per un sistema linearizzato di Navier-Stokes a coefficienti non costanti*, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.) **24** (1978), 37-50.

[3] D. Graffi, *Sul teorema di unicità nella dinamica dei fluidi*, Ann. Mat. Pura Appl. **50** (1960), 379-388.

[4] S. Rionero and G. P. Galdi: $[\cdot]_1$ *On the uniqueness of viscous fluid motions*, Arch. Rational Mech. Anal. **62** (1976), 295-301; $[\cdot]_2$ *The weight functions approach to uniqueness of viscous flows in unbounded domains*, Arch. Rational Mech. Anal. **68** (1978), 37-52.

[5] J. Serrin, *Mathematical principles of classical fluid*, Handbuch der Physik, vol. 8/1, Springer-Verlag, Berlin 1957.

Abstract

We prove three uniqueness theorems for the motion equations of a viscous and incompressible fluid in unbounded domains, the first for weak solutions, the second and the third for smooth solutions; in these last two theorems we suppose that it satisfies a boundary condition describing the resistance of the wall to the fluid sliding.

* * *