Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 1-7

GIORDANO GALLINA e RAFFAELE SCAPELLATO (*)

Estensioni di anelloidi (**)

Introduzione

In questo lavoro, che porta ad un risultato numerativo, continuiamo le ricerche di [**3**] e [**8**]$_1$, dando una caratterizzazione di una classe di estensioni di anelloidi.

Studiamo inoltre la possibilità di costruire anelloidi di Steiner su prodotti liberi di certi gruppi.

Per una discussione sull'origine ed il significato della ricerca, nonchè per le definizioni qui non ricordate, si vedano [**2**], [**8**]$_{1,2}$.

1 - Estensioni

1.1 – Indichiamo l'esagono associato alla coppia (x, y) con $E(x, y)$. Siano A, C due anelloidi di Steiner. Diremo *estensione di* A *con* C ogni anelloide B contenente A, tale che esista un omomorfismo suriettivo $\pi\colon B \to C$ avente nucleo A. Indichiamo con $\overline{A, C}$ la totalità delle estensioni suddette. Useremo tali lettere nel senso predetto; con α, α' si indicheranno le funzioni di Steiner associate rispettivamente ad A e a C; con $\bar{\alpha}$ la funzione di Steiner associata a B. Inoltre, *supporremo* α' *priva di traiettorie fini*. Per X anelloide di Steiner, X^+ indicherà il gruppo additivo di X.

Il problema di determinare esplicitamente $\overline{A, C}$ si riduce al seguente: per ogni gruppo G, tale che $\pi\colon G \to C^+$ sia un omomorfismo di nucleo A^+, determinare tutte le funzioni di Steiner $\bar{\alpha}$ su G tali che $\pi\circ\bar{\alpha} = \alpha'\circ\pi$ ed $\bar{\alpha}$ ristretta ad A^+ sia α.

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A.(C.N.R.). – Ricevuto: 15-XII-1980.

1.2 – Iniziamo con il

Lemma 1. *Posto* $T' = E(\pi(b), \pi(b'))$ $[b \in B,\ b' = \bar{\alpha}(b)]$, *esiste una biiezione* $h_{\bar{\alpha}}$ *di* A *in sè, tale che* $h_{\bar{\alpha}} - 1$ (¹) *è ancora una biiezione di* A *in sè, e tale che le traiettorie di* $\bar{\alpha}$ *contenute in* $\pi^{-1}(T')$ *siano tutti e soli gli esagoni* $E(b + x, b' + h_{\bar{\alpha}}(x))$, *per* $x \in A$.

Dato $x \in A$, sia T la traiettoria di $\bar{\alpha}$ individuata da $b + x$. Ovviamente, $(\pi \circ \alpha)(b + x) = (\alpha' \circ \pi)(b) = \pi(b')$, da cui $\bar{\alpha}(b + x) \in A + b'$. Perciò esiste uno ed uno solo $y \in A$ tale che $\bar{\alpha}(b + x) = b' + y$. Sia $h_{\bar{\alpha}}$ la funzione che manda x nell'elemento y di cui sopra: chiaramente, $b' + h_{\bar{\alpha}}(x) \in T \cap (A + b')$. Inoltre, poichè $\bar{\alpha}$ fa corrispondere ad ogni elemento di $b' + A$ un elemento di $b + A$ e viceversa, la $h_{\bar{\alpha}}$ è biiettiva.

Teorema 2. *Sia* $B \in \overline{A, C}$. *Per ogni traiettoria non banale* T' *di* α' *scegliamo una coppia* (b, b') *di elementi di* B, *tale che* $\alpha'(\pi(b)) = \pi(b') \in T'$. *L'insieme di tali coppie verrà indicato con* R. *Esiste una funzione* $g\colon R \times A \to A$, *tale che*

(1) *per ogni* $r \in R$, *la* $g_r\colon x \to g(r, x)$ *e la* $x \to g_r(x) - x$ *sono biiezioni di* A *in sè;*

(2) *il prodotto in* B *è dedotto da una funzione di Steiner* α_g, *la quale, per* $r = (b, b') \in R$ *e* $x \in A$, *scambia* $b + x$ *con* $b' + g_r(x)$, $-x - b$ *con* $b' + g_r(x) - x - b$, $-g_r(x) - b'$ *con* $b + x - g_r(x) - b'$ *e per la quale* $\alpha_g(x) = \alpha(x)$.

Una funzione g con le proprietà (1) e (2) sarà chiamata *funzione policompleta* (²).

Sia $\bar{\alpha}$ la funzione di Steiner associata a B. Dato $r = (b, b') \in R$, sia T' la traiettoria di α' individuata da $\pi(b)$. Allora (Lemma 1) le traiettorie di $\bar{\alpha}$ contenute in $\pi^{-1}(T')$ sono del tipo $E(b + x, b' + h_r(x))$, dove $h_r\colon A \to A$ è una biiezione tale che $h_r - 1$ sia una biiezione.

Posto $g_r(x) = h_r(x)$, per $r \in R$ e $x \in A$, è chiaro che $g\colon (r, x) \to g_r(x)$ è una funzione policompleta. Inoltre, si verifica subito che, per ogni traiettoria T' di α', la α_g opera come la $\bar{\alpha}$ sulle traiettorie di $\bar{\alpha}$ contenute in $\pi^{-1}(T')$.

Poichè $B \in \overline{A, C}$, la $\bar{\alpha}$ opera come α_g anche sugli elementi di A, quindi $\bar{\alpha} = \alpha_g$. Segue la tesi.

(¹) Cioè la funzione che manda $x \in A$ in $h_{\bar{\alpha}}(x) - x$.

(²) In base alla definizione di funzione policompleta, la determinazione delle funzioni policomplete si riconduce alla determinazione delle biiezioni h di A in sè, tali che la $x \to h(x) - x$ sia ancora una biiezione di A in sè. Osserviamo che, se G è un gruppo e $\varphi\colon G \to G$ è una funzione, la φ è una funzione completa (si veda [**5**]) se e solo se la f definita dall'uguaglianza $f(x) = -\varphi(x)$ è una biiezione tale che la funzione $x \to f(x) - x$ è una biiezione. Di qui segue subito l'esistenza di funzioni policomplete.

Corollario 3. *Ad ogni elemento B di $\overline{A, C}$ si può associare una quaterna (α, α', R, g) in cui g è una funzione policompleta su $R \times A$ (R costruito come nel Teorema 2).*

Sia $\bar{B}$ un anelloide su B^+, estensione di un anelloide $\bar{A}$ su A^+ con un anelloide $\bar{C}$ su C^+, per mezzo dello stesso omomorfismo π. All'anelloide $\bar{B}$ corrisponde la quaterna $(\alpha_1, \alpha_1', \bar{R}, g_1)$. Supponiamo che sia $\{b \in B \mid \exists b' \in B$ con $(b, b') \in R\} = \{b \in B \mid \exists b' \in B$ con $(b, b') \in \bar{R}\}$.

Dimostriamo che, se $(\alpha_1, \alpha_1', g_1) \neq (\alpha, \alpha', g)$, l'anelloide B è diverso da $\bar{B}$. Siano $\bar{\alpha}$ e $\bar{\alpha}_1$ le funzioni di Steiner associate rispettivamente a B e $\bar{B}$. Se $g \neq g_1$, allora, per qualche $r = (b, b') \in R$ e per qualche $x \in A^+$, si ha $g_r(x) \neq g_{1_r}(x)$, sicchè $\bar{\alpha}(b + x) = b' + g(x) \neq \bar{\alpha}_1(b + x)$, e quindi $\bar{\alpha} \neq \bar{\alpha}_1$. Il resto è ovvio.

1.3 – Sia ora $\tilde{\pi}$ un omomorfismo di B^+ su C^+ con nucleo A^+. Per ogni traiettoria non banale T' di α' consideriamo una coppia $(\tilde{b}, \tilde{b}')$ di elementi di B tale che $\alpha'(\tilde{\pi}(\tilde{b})) = \tilde{\pi}(\tilde{b}') \in T'$. Indichiamo con $\tilde{R}$ l'insieme di tali coppie, e con $\tilde{g}\colon \tilde{R} \times A \to A$ una funzione policompleta di dominio $\tilde{R} \times A$.

Osservazione 4. *Per $\tilde{r} = (\tilde{b}, \tilde{b}') \in \tilde{R}$, $x \in A$, la coppia $(\tilde{b}+x, \tilde{b}'+\tilde{g}_{\tilde{r}}(x))$ individua un esagono.* Indicheremo tale esagono con $T(\tilde{r}, x)$.

I due elementi $\tilde{b} + x$, $\tilde{b}' + \tilde{g}_{\tilde{r}}(x)$ sono ovviamente distinti, e non opposti, perchè la α' è priva di traiettorie fini. Inoltre, $2(\tilde{b} + x) \neq \tilde{b}' + \tilde{g}_{\tilde{r}}(x)$, altrimenti $2\tilde{\pi}(\tilde{b}) = \tilde{\pi}(\tilde{b}')$, contro il fatto che $(\tilde{\pi}(\tilde{b}), \tilde{\pi}(\tilde{b}'))$ individua un esagono in C^+. Per ragioni analoghe $2(\tilde{b}' + \tilde{g}_{\tilde{r}}(x)) \neq \tilde{b} + x$.

Lemma 5. *L'insieme dei $T(\tilde{r}, x)$ costituisce una partizione di $B \setminus A$.*

Sia $y \in B \setminus A$. Sia T' la traiettoria di α' cui appartiene $\tilde{\pi}(y)$. Sia $\tilde{r} = (\tilde{b}, \tilde{b}')$ l'elemento di $\tilde{R}$ tale che $\alpha'(\tilde{\pi}(\tilde{b})) = \tilde{\pi}(\tilde{b}') \in T'$ (che esiste ed è unico per quanto sopra).

Dimostriamo che y appartiene ad un solo $T(\tilde{r}, x)$.

Se $\tilde{\pi}(y) = \tilde{\pi}(\tilde{b})$, allora $y = \tilde{b} + x$ per un $x \in A$, ed y appartiene a $T(\tilde{r}, x)$.

Se $\tilde{\pi}(y) = \tilde{\pi}(-\tilde{b})$, allora $y = -x - \tilde{b}$, con $x \in A$, e pertanto $y \in T(\tilde{r}, x)$.

Se $\tilde{\pi}(y) = \tilde{\pi}(-\tilde{b}')$, si ha $y = -z - \tilde{b}'$, con $z \in A$. Poichè la $x \to \tilde{g}_{\tilde{r}}(x)$ è una biiezione, esiste un $x \in A$, tale che $z = \tilde{g}_{\tilde{r}}(x)$, e quindi $y = -\tilde{g}_{\tilde{r}}(x) - \tilde{b}'$, da cui $y \in T(\tilde{r}, x)$.

Se $\tilde{\pi}(y) = \tilde{\pi}(\tilde{b}) - \tilde{\pi}(\tilde{b}')$, si ha $y = \tilde{b} - z - \tilde{b}'$, per un opportuno $z \in A$. Poichè $x \to \tilde{g}_{\tilde{r}}(x) - x$ è una biiezione, esiste un solo $x \in A$, tale che $z = \tilde{g}_{\tilde{r}}(x) - x$ e quindi $y = \tilde{b} + x - \tilde{g}_{\tilde{r}}(x) - \tilde{b}'$, da cui $y \in T(\tilde{r}, x)$.

Se $\tilde{\pi}(y) = \tilde{\pi}(\tilde{b}')$, allora $y = \tilde{b}' + z$ con $z \in A$. Poichè $x \to \tilde{g}_{\tilde{r}}(x)$ è una biiezione, esiste un unico $x \in A$ tale che $z = \tilde{g}_{\tilde{r}}(x)$, sicchè $y = b' + \tilde{g}_{\tilde{r}}(x)$, da cui $y \in T(\tilde{r}, x)$. In ciascuno dei casi, l'elemento x esiste ed è unico. Poichè i laterali di A formano una partizione di B, l'elemento y appartiene ad uno ed un solo $T(\tilde{r}, x)$. Segue la tesi.

In virtù del Lemma 5, possiamo definire una funzione $\tilde{\alpha}_{\tilde{g}}: B^+ \to B^+$, dicendo che, per $\tilde{r} = (\tilde{b}, \tilde{b}') \in \tilde{R}$ e $x \in A$, $\alpha_{\tilde{g}}$ scambia $\tilde{b} + x$ con $\tilde{b}' + \tilde{g}_{\tilde{r}}(x)$, $-x - \tilde{b}$ con $\tilde{b}' + \tilde{g}_{\tilde{r}}(x) - x - \tilde{b}$, $-\tilde{g}_{\tilde{r}}(x) - \tilde{b}'$ con $\tilde{b} + x - \tilde{g}_{\tilde{r}}(x) - \tilde{b}'$ e che $\alpha_{\tilde{g}}(x) = \alpha(x)$.

Si verifica subito che $\alpha_{\tilde{g}}$ è una funzione di Steiner.

Teorema 6. *Se la funzione di Steiner associata a C non ha traiettorie fini, gli elementi $\overline{A, C}$ sono tutti e soli gli anelloidi il cui gruppo additivo è estensione di A^+ con C^+ e il cui prodotto è dedotto da una $\alpha_{\tilde{g}}$, essendo $\tilde{g}$ una funzione policompleta costruita come sopra.*

Tenuto conto del Teorema 2, occorre solo mostrare che una $\alpha_{\tilde{g}}$ individua un elemento di $\overline{A, C}$. La $\alpha_{\tilde{g}}$ opera come α sugli elementi di A e, inoltre, $\tilde{\pi} \circ \alpha_{\sim} = \alpha' \circ \tilde{\pi}$. Segue la tesi.

L'ipotesi che la funzione di Steiner associata a C sia priva di traiettorie fini è *essenziale*: infatti siano A, C anelloidi di ordine 3, sia B il loro prodotto diretto e sia $\bar{\alpha}$ la funzione di Steiner associata a B. Le traiettorie fini della α_g del Teorema 2 sono tutte contenute in A: pertanto non può mai essere $\bar{\alpha} = \alpha_g$. Ciò prova che in questo caso gli anelloidi associati alle funzioni α_g (per g funzione *policompleta*) *non* esauriscono gli elementi di $\overline{A, C}$.

Osservazione 7. *Sia C^+ di ordine $6m+1$, supporto di r anelloidi di Steiner, sia A^+ finito, supporto di t anelloidi di Steiner. Se l è la cardinalità dell'insieme delle funzioni complete su A, gli anelloidi su B^+ estensioni di qualche anelloide su A^+ con qualche anelloide su C^+ sono r.t.l^m.*

Notiamo che nella quaterna (α, α', R, g) del Corollario 3, α e α' possono essere fissate indipendentemente l'una dall'altra. Fissate queste, nonchè R, la g può essere scelta in l^m modi, perchè tale è il numero delle funzioni dall'insieme delle traiettorie non banali di α' all'insieme delle funzioni complete su A^+ e detto numero (nota (2) in calce a pag. 3) uguaglia quello delle funzioni policomplete di dominio $R \times A$. Poichè, come si è visto dopo il Corollario 3, anelloidi individuati da quaterne diverse (con lo stesso R) sono distinti, gli anelloidi che ci interessano sono almeno r.t.l^m. Dal Teorema 6 e dalle osservazioni precedenti, discende quasi immediatamente l'enunciato.

2 - Sui prodotti liberi

2.1 – Iniziamo con il

Lemma 8. *Sia $G = G_1 * G_2$, siano $g_1 \neq g_2$ due forme normali di G (3). Supponiamo che il primo e l'ultimo addendo di ciascun g_i non appartengano allo stesso G_j. Se $kg_1 = rg_2$, con k, $r \neq 0$, almeno uno degli elementi g_1, g_2 appartiene ad un sottogruppo ciclico di cui non è generatore.*

Non è restrittivo supporre che k ed r siano positivi. Posto $g_1 = a_1 + \ldots + a_n$, $g_2 = \bar{a}_1 + \ldots + \bar{a}_m$, ($a_i$ e $\bar{a}_j \in G_1 \cup G_2$ $\forall i, j$), kg_1 e rg_2 sono forme normali. Posto $m = n$ dal Teorema e dalla forma normale (4) si deduce che $g_1 = g_2$, contro l'ipotesi.

Sia ora $m > n$. Possiamo scrivere $g_2 = k'g_1 + a_1 + \ldots + a_t$ ($t < n$, $k' \in \boldsymbol{N}$), e dunque $kg_1 = r(k'g_1 + a_1 + \ldots + a_t)$. Di qui, per il Teorema della forma normale $a_1 + \ldots + a_n = a_1 + \ldots + a_t + a_1 + \ldots + a_{n-t}$. Inoltre, gli ultimi t addendi di g_1 sono nell'ordine $a_1, \ldots, a_t$, e dunque $g_1 = a_1 + \ldots + a_{n-t} + a_1 + \ldots + a_t$. Conseguentemente si deduce che $a_1 + \ldots + a_t$ e $a_1 + \ldots + a_{n-t}$ sono permutabili. Di qui, ragionando per induzione su n, si vede facilmente che essi sono entrambi multipli di uno stesso elemento di G. Ne segue subito l'enunciato.

Lemma 9. *Sia $G = G_1 * G_2$, siano A_1, A_2 due sottogruppi ciclici massimali di G non contenuti nè in G_1 nè in G_2, i cui generatori siano rappresentabili come forme normali, in cui il primo e l'ultimo elemento non appartengano entrambi a dei sottogruppi G_1, G_2. Allora, $A_1 \cap A_2 = E$.*

Sia A_1 generato da p, A_2 generato da q. Se per assurdo esistono due interi k, r, tali che $kp = rq$, uno dei due elementi, p e q, è contenuto in un sottogruppo ciclico di cui non è generatore (Lemma 1), contro l'ipotesi.

Lemma 10. *L'insieme M degli elementi di $G_1 * G_2$ che non appartengono a nessuno dei coniugati di G_1, G_2 ammette una partizione, ogni cui elemento è costituito dagli elementi non nulli di un sottogruppo ciclico di $G_1 * G_2$.*

Sia R l'insieme dei sottogruppi ciclici di $G = G_1 * G_2$ che soddisfano le ipotesi del Lemma 9.

Per ogni $A_i \in R$, sia g_i un generatore di A_i: scriviamolo in forma normale come $g_i = g_{i1} + h_{i1} + \ldots + g_{in_i} + h_{in_i}$, con $g_{ij} \in G_1$, $h_{ij} \in G_2$. Osserviamo subito che i sottogruppi della forma $\langle -g + g_i + g\rangle$ con $g \in G_1$ si intersecano due a due nel sottogruppo nullo di G.

Se infatti $r(-g + g_i + g) = s(-g' + g_j + g')$, dal teorema della forma normale si ha che $g = g'$.

---

(3) Nel senso di [7], salvo che qui usiamo notazione additiva.
(4) Teorema 11.34, pag. 271 di [7].

Siano ora $A_i \neq A_j$ due elementi di R, g e $g' \in G_1$; supponiamo per assurdo che esistano $r, s \in \mathbf{Z}$, tali che $r(-g+g_i+g) = s(-g'+g_j+g')$. Allora $-g+g_{i1}+\ldots+h_{in_i}+g = -g'+g_{j1}+\ldots+h_{jn_j}+g'$. Di qui, $g = g'$ e $rg_i = sg_j$, contro quanto prima mostrato: pertanto, $\langle -g+A_i+g\rangle \cap \langle -g'+A_j+g'\rangle = \{0\}$.

Analogamente i sottogruppi della forma $h+A_i-h$, con $A_i \in R$ e $h \in G_2$, $h \neq h_{in_i}$ si intersecano due a due nello zero.

Poniamo $P = \{-h+A_i+h \mid A_i \in R,\ h \in G_2,\ h \neq -h_{in_i}\}$, $Q = \{-g+A_i+g \mid A_i \in R,\ g \in G_1,\ g \neq g_{in_i}\}$.

Si considerino gli insiemi

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \{-h+q+h \mid h \in G_2,\ q \in Q\}\,,\\
Q_{21} &= \{-g+q_2+g \mid g \in G_1,\ q_2 \in Q_2\}\,,\\
Q_{212} &= \{-h+q_{21}+h \mid h \in G_2,\ q_{21} \in Q_{21}\}\,,\\
&\ldots\ldots\\
P_2 &= \{-g+p+g \mid g \in G_1,\ p \in P\}\,,\\
P_{21} &= \{-h+p_2+h \mid h \in G_2,\ p_2 \in P_2\}\,,\\
P_{212} &= \{-g+p_{21}+g \mid g \in G_1,\ p_{21} \in P_{21}\}\,.\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Due sottogruppi qualunque appartenenti all'unione T degli insiemi considerati si intersecano solo nello zero. Si deduce di qui la tesi.

Teorema 11. *Se G_1 e G_2 sono due gruppi, sostegni di anelloidi di Steiner, lo è anche il loro prodotto libero G.*

Se u è un sottogruppo di G appartenente a P o a Q, esiste una funzione di Steiner α_u su u, per il Corollario 4 di [**8**]$_2$. Poniamo $\alpha(x) = \alpha_u(x)$ per ogni $x \in u$. Per ogni $v \in T$, esistono un $u \in P \cup Q$ ed un $y \in G$, tali che $x = -y+x'+y$. Poniamo $\alpha(x) = -y+\alpha_u(x')+y$. In virtù dei lemmi 9 e 10, tali posizioni sono compatibili.

Siano α_1, α_2 le funzioni di Steiner associate rispettivamente agli anelloidi $\overline{G}_1$ e $\overline{G}_2$. Per ogni $h \in G_2$ ed x nullo o della forma $g_1+h_1+\ldots+g_n+h_n$, con $g_1 \in G_1 \setminus \{0\}$, poniamo $\alpha(-x+h+x) = -x+\alpha_2(h)+x$. Per ogni $x \in G_1$, ed y nullo o della forma $\overline{h}_1+\overline{g}_1+\ldots+\overline{h}_m+\overline{g}_m$, poniamo $\alpha(-y+g+y) = -y+\alpha_1(g)+y$. La α è una funzione di Steiner su G. Si deduce di qui la tesi (5).

Corollario 12. *Il prodotto libero di una famiglia di gruppi che ammettono funzioni di Steiner ammette funzioni di Steiner.*

---

(5) In particolare, il prodotto libero di una famiglia di gruppi non banali ha una partizione non banale.

Si ottiene ragionando come poco sopra.

Teorema 13. *Siano G_1, G_2 due gruppi, ampliamenti dello stesso gruppo B, tali che B e G_i/B siano gruppi additivi di anelloidi di Steiner.*

Se la α_i associata all'anelloide su G_i/B è priva di traiettorie fini, per $i = 1, 2$, il prodotto libero G di G_1 e G_2 con sottogruppo amalgamato B è sostegno di anelloidi di Steiner.

Per il Teorema 11 esiste una funzione di Steiner su G/B.

Per il Teorema 6 ne segue che esiste allora una funzione di Steiner su G. Segue la tesi.

Bibliografia

[1] P. T. Bateman, *A remark on infinite groups*, Amer. Math. Monthly **57** (1950), 623-624.

[2] G. Ferrero, *Automorfismi di neocorpi di Steiner*, Convegno sui sistemi binari e loro applicazioni, Taormina 1978.

[3] G. Gallina, *Sull'esistenza di certe funzioni di Steiner*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 215-219.

[4] M. Hall and L. J. Paige, *Complete mappings of finite groups*, Pacif. J. Math. **5** (1955), 541-549.

[5] M. Hall, *The theory of groups*, MacMillan, New York 1956.

[6] S. MacLane, *A proof of the subgroups theorem for free products*, Mathematika **5** (1958), 13-19.

[7] J. J. Rotman, *The theory of groups*, Allyn and Bacon, New York 1968.

[8] R. Scapellato: [•]$_1$ *Sull'esistenza di funzioni di Steiner*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **18**-A (1981), 127-131; [•]$_2$ *Gruppi infiniti che ammettono funzioni di Steiner*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **8** (1982), 355-360.

Summary

We characterize a class of extensions of anelloids and we construe some Steiner anelloids on free products of groups.

* * *