Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 467-473

GIUSEPPE MICELLI (*)

Pseudoconnessioni proiettive (**)

Introduzione

Le pseudoconnessioni dal punto di vista dei fibrati, introdotte da C. Di Comite in $[2]_1$ sono state studiate sempre dallo stesso autore in particolare sullo spazio fibrato dei riferimenti lineari (pseudoconnessioni lineari) e sullo spazio fibrato dei riferimenti affini (pseudoconnessioni affini) (cfr. $[2]_2$) di una varietà differenziabile M.

Seguendo quest'ordine di idee in questa nota si introduce la nozione di pseudoconnessione proiettiva come pseudoconnessione nello spazio fibrato $\mathscr{P}(M)$ dei riferimenti proiettivi di M e se ne studiano alcune proprietà; in particolare si dimostra che ogni pseudoconnessione proiettiva su M induce una pseudoconnessione lineare e viceversa.

1 - Lo spazio fibrato dei riferimenti proiettivi associato ad una varietà differenziabile M.

Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathscr{C}^\infty$ e dimensione n, se p è un punto di M, con $T_p(M)$ si denoterà lo spazio tangente in p ad M; in $T_p(M) - \{0\}$ la relazione $\mathscr{R}$ così definita

$$X_p,\ Y_p \in T_p(M) - \{0\} \qquad (X_p \boldsymbol{R} Y_p) \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathscr{R} - \{0\} \ni' \ Y_p = \lambda X_p)$$

è una relazione di equivalenza, l'insieme quoziente $D_p(M) = T_p(M) - \{0\}/\mathscr{R}$ è l'insieme delle direzioni nel punto p della varietà M; se $X_p \in T_p(M) - \{0\}$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Via Arnesano, 73100 Lecce, Italy.
(**) Ricevuto: 9-III-1981.

la classe di equivalenza da esso individuata, che si denoterà nel seguito con $D_p(X_p)$, si chiamerà la direzione nel punto p individuata dal vettore tangente X_p.

L'insieme $\tau_p(M) = T_p(M) \cup D_p(M)$ si può munire di una struttura di spazio geometrico proiettivo ad n dimensioni. A tale scopo si consideri una carta locale (U, ϕ) di M tale che $p \in U$ e sia $\{(\partial/\partial x_i)_p\}_{1<i<n}$ la base naturale di $T_p(M)$ rispetto a tale carta; indicato con $\boldsymbol{P}^n$ lo spazio numerico proiettivo ad n dimensione e con $\phi_n\colon \boldsymbol{R}^{n+1} - \{0\} \to \boldsymbol{P}^n$ la surgezione canonica, l'applicazione $\bar{K}_p\colon \tau_p(M) \to \boldsymbol{P}^n$ definita da $\bar{K}_p(X_p) = \phi_n(1, \lambda^1, \lambda^2 \dots, \lambda^n)$ per ogni $X_p \in T_p(M)$ ed $X_p = \lambda^i(\partial/\partial x_i)_p$, e da $\bar{K}_p(D_p(X_p)) = \phi_n(0, \lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n)$ per ogni $D_p(X_p) \in D_p(M)$ ed $X_p = \lambda^i(\partial/\partial x_i)_p$, è una bigezione e definisce quindi su $\tau_p(M)$ una struttura di spazio geometrico proiettivo ad n dimensioni; rispetto a tale struttura $\tau_p(M)$ si chiama *lo spazio proiettivo tangente* in p ad M e la bigezione $\bar{K}_p$ si chiama *sistema coordinato in p relativo alla carta* (U, ϕ) prefissata in M.

Si osservi che il riferimento proiettivo relativo a $\bar{K}_p$ è la $(n+2)$-pla $(\bar{O}_0, \bar{O}_1, \bar{O}_2, \dots, \bar{O}_n, \bar{U})$ essendo

$$\bar{O}_0 = O_{T_p(M)}\,, \qquad \bar{O}_1 = D_p\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big)_p\Big), \dots, \qquad \bar{O}_n = D_p\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^n}\Big)_p\Big)\,, \qquad \bar{U} = \sum_1^n \Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)_p;$$

questo riferimento si chiamerà *il riferimento proiettivo nel punto p della varietà M, relativo alla carta (U, ϕ) prefissata.*

Sia ora $\mathscr{P}(p)$ l'insieme dei riferimenti proiettivi in $p \in M$ e sia $\mathscr{P}(M) = \bigcup_{p \in M} \mathscr{P}(p)$. Questo insieme risulta lo spazio totale di uno spazio fibrato principale differenziabile avente come varietà di base la varietà M e come proiezione l'applicazione $\pi\colon \mathscr{P}(M) \to M$ che al riferimento proiettivo u_p, in $p \in M$ fa corrispondere il punto p stesso; per la costruzione di un tale fibrato si consideri nel gruppo lineare $GL(n+1, \boldsymbol{R})$ la relazione $\sim$ così definita

$$A, B \in GL(n+1, \boldsymbol{R}) \qquad (A \sim B) \Leftrightarrow (\exists \varrho \in \boldsymbol{R} - \{0\} \ni' B = \varrho A)\,,$$

$\sim$ è una relazione di equivalenza. L'insieme quoziente $\tilde{G} = GL(n+1, \boldsymbol{R})/\!\sim$ è un gruppo rispetto alla legge di composizione interna: $\tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ definita da $(\tilde{A}, \tilde{B}) \mapsto \widetilde{A \cdot B}$, ove si sono indicati con $\tilde{A}, \tilde{B}$ le classi di $\sim$-equivalenza individuate da A, B e con $A \cdot B$ l'ordinario prodotto di A per B.

Sul gruppo $\tilde{G}$ si consideri la struttura di varietà differenziabile definita dall'atlante $\mathscr{A} = \{(U_{\alpha\beta}, \phi_{\alpha\beta})\}_{0 \leqslant \alpha}, \ \beta \leqslant n$, dove $U_{\alpha\beta} = \{\tilde{A} \in \tilde{G}/A\colon A = (a_{\gamma\delta})_{0 \leqslant \gamma, \delta \leqslant n}$ $a_{\gamma\delta} \neq 0$ se $(\gamma, \delta) = (\alpha, \beta)\}$ e $\phi_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to \phi_{\alpha\beta}(U_{\alpha\beta}) \subset R^{n(n+2)}$ è $\beta \leqslant n$ definita da $\tilde{A} \to (a_{00}/a_{\alpha\beta}, a_{01}/a_{\alpha\beta}, \dots, \hat{1}, \dots, a_{nn}/a_{\alpha\beta})$. Rispetto a tale struttura $\tilde{G}$ è un gruppo di Lie.

Sull'insieme $\mathscr{P}(M)$ dei riferimenti proiettivi associati ad M si costruisce «per incollamento» una struttura di varietà differenziabile; a tale scopo sia

$p \in M$ ed (U, ϕ) una carta locale di M tali che $p \in U$. Si consideri l'applicazione $\phi_U: \pi^{-1}(U) \to U \times \tilde{G}$ che al riferimento proiettivo $u_p \in \pi^{-1}(U)$ fa corrispondere la coppia ordinata $(p, \tilde{A})$ essendo A una matrice di $GL(n+1, \boldsymbol{R})$ che rappresenta il cambiamento di riferimento nel passaggio dal riferimento proiettivo in p relativo alla carta (U, ϕ) al riferimento u_p; questa applicazione ϕ_U è una bigezione; si considera allora su $\pi^{-1}(U)$ la struttura di varietà differenziabile rispetto alla quale ϕ_U è un diffeomorfismo; si può osservare che se $(\overline{U}, \bar{\phi})$ è un'altra carta locale di M per la quale risulta $U \cap \overline{U} \neq \phi$, allora la struttura differenziabile indotta da ϕ_U su $\pi^{-1}(U \cap \overline{U})$ è la stessa di quella indotta da $\Phi_{\overline{U}}$; resta così definita globalmente su $\mathscr{P}(M)$ una struttura di *varietà differenziabile* che induce su ciascun aperto $\pi^{-1}(U)$ di $\mathscr{P}(M)$ la struttura differenziabile rispetto alla quale Φ_U è un diffeomorfismo; la dimensione di $\mathscr{P}(M)$ è $n(n+3)$.

Per ciò che seguirà, sarà utile osservare che in relazione ad ogni $u_p \in \pi^{-1}(U)$ esistono tre carte locali: (W, θ) in $\mathscr{P}(M)$, (V, Ψ) in M, $(U_{\alpha\beta}, \phi_{\alpha\beta})$ in $\tilde{G}$, tali che

$$\Phi_U(W) = V \times U_{\alpha\beta}\,, \qquad \Theta(u_p) = (x^1, x^2, \dots, x^n, t_{00}, t_{01}, \dots, t_{\alpha\beta}, \dots, t_{nn})\,,$$

avendo posto

$$\Phi_U(u_p) = (p, \tilde{A})\,, \qquad \Psi(p) = (x^1, x^2, \dots, x^n)\,, \qquad \phi_{\alpha\beta}(\tilde{A}) = (t_{00}, y_{01}, \dots, \hat{t}_{\alpha\beta}, \dots, t_{nn})\,.$$

Il gruppo $\tilde{G}$ opera differenzialmente a destra su $\mathscr{P}(M)$ tramite l'applicazione $\Psi: \mathscr{P}(M) \times \tilde{G} \to \mathscr{P}(M)$, così definita. Sia $\overline{K}_p: \tau_p(M) \to \boldsymbol{P}^n$ il sistema coordinato relativo al riferimento proiettivo $u_p \in \mathscr{P}(M)$ e $T: \boldsymbol{P}^n \to \boldsymbol{P}^n$ la trasformazione lineare omogenea invertibile rappresentata dalla matrice A, $\Psi(u_p, \tilde{A})$ è il riferimento proiettivo u'_p relativo al sistema coordinato $\overline{K}'_p = T \circ \overline{K}_p$.

Dopo queste considerazioni si può concludere che la quintupla $\xi = (\mathscr{P}(M), \tilde{G}, \Psi, M, \pi)$ è uno spazio fibrato principale differenziabile che prende il nome di *spazio fibrato dei riferimenti proiettivi associato ad M.*

Prima di terminare questo numero, si troverà l'espressione delle funzioni di transizione relative ad un ricoprimento di aperti coordinati della varietà M; Siano (U, ϕ) e $(\overline{U}, \bar{\phi})$ due carte locali di M tali che $U \cap \overline{U} \neq \emptyset$. Si consideri l'applicazione $\phi_{U\overline{U}}: U \cap \overline{U} \to \tilde{G}$, che al punto p di $U \cap \overline{U}$ associa la matrice $C_{U\overline{U}}$, che fa passare dal riferimento proiettivo in p relativo alla carta (U, ϕ) a quello relativo alla carta $(\overline{U}, \bar{\phi})$; si riconosce facilmente che la famiglia $\{\phi_{U\overline{U}}\}$ è la famiglia delle funzioni di transizione del fibrato ξ subordinata al ricoprimento $\{U\}$ di M. Se

$$(O_{T_p(M)}\,, \quad D_p((\frac{\partial}{\partial x^1})_p), \dots, \qquad D_p((\frac{\partial}{\partial x^n})_p)\,, \quad \sum_1^n (\frac{\partial}{\partial x^r})_p),$$

$$(O_{T_p(M)}\,, \quad D_p((\frac{\partial}{\partial y_1})_p), \dots, \qquad D_p((\frac{\partial}{\partial y^n})_p)\,, \quad \sum_1^n (\frac{\partial}{\partial y^r})_p)$$

sono i riferimenti proiettivi in p, relativi alle carte (U, ϕ), $(\bar{U}, \bar{\phi})$ rispettivamente, poichè risulta $(\partial/\partial y^s)_p = (\partial x^r/\partial y^s)(p)(\partial/\partial x^r)_p$, si ottiene

$$C_{U\bar{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J_p \end{pmatrix},$$

dove J_p è la matrice jacobiana delle x^j rispetto alle y^k, valutata in p.

2 - Applicazione aggiunta del gruppo $\tilde{G}$.

In relazione alla struttura di gruppo di Lie su $\tilde{G}$, definita nel numero precedente, la surgezione canonica $p\colon GL(n+1, \boldsymbol{R}) \to \tilde{G}$, che muta A in $\tilde{A}$, è un omomorfismo di gruppi di Lie; denotato con e l'elemento neutro di G e posto $p(e) = \tilde{e}$, si identifica l'algebra di Lie $\tilde{g}$ di $\tilde{G}$ con lo spazio tangente $T_{\tilde{e}}(\tilde{G})$.

Sia $C = (C^{\alpha}_{\cdot\beta}) \in GL(n+1, \boldsymbol{R})$ e $C^{-1} = (C^{\cdot\alpha}_{\beta})$ l'inversa di C. Si consideri l'applicazione $a\,d\,(\tilde{C})\colon \tilde{g} \to \tilde{g}$ (*aggiunta di* $\tilde{G}$ *relativa a* $\tilde{C}$), la quale non è altro che il differenziale, nel punto $\tilde{e}$ di $\tilde{G}$, dell'applicazione di $\tilde{G}$ in sè, che muta $\tilde{X}$ in $\widetilde{CXC^{-1}}$.

Fissata la carta locale $(U_{\gamma\gamma}, \phi_{\gamma\gamma})$ su $\tilde{G}$ e considerati i vettori di $T_{\tilde{e}}(\tilde{G})$

$$X_{\tilde{e}} = X^{\alpha}_{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial t^{\alpha}_{\beta}}\right)_{\tilde{e}}, \qquad Y_{\tilde{e}} = Y^{\alpha}_{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial t^{\alpha}_{\beta}}\right)_{\tilde{e}},$$

si ha $Y_{\tilde{e}} = ad\,(\tilde{C})X_{\tilde{e}}$, se e solo se $Y^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} = X^{\alpha}_{\beta}(C^{\bar{\alpha}}_{\cdot\alpha} C^{\cdot\beta}_{\bar{\beta}} - C^{\gamma}_{\cdot\alpha} C^{\cdot\beta}_{\gamma}\, \delta^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}})$ (1).

3 - Pseudoconnessioni proiettive

Per semplicità di notazione si denoterà nel seguito con $\mathscr{P}(M)$ lo spazio fibrato dei riferimenti proiettivi, associato alla varietà differenziabile M.

Def. 3.1. Si chiama *pseudoconnessione proiettiva su* M ogni pseudoconnessione sullo spazio fibrato $\mathscr{P}(M)$.

Sia Γ una pseudoconnessione proiettiva su M e sia A il campo tensoriale su M associato a Γ (cfr. [2]$_1$) si vogliono definire in modo analogo a quanto si fa per le connessioni proiettive, le componenti di Γ rispetto ad una carta locale

(1) Nelle tre ultime uguaglianze si intende di sommare rispetto ad α, β sugli interi $0, 1, \ldots, n$, con esclusione del caso $\alpha = \beta = \gamma$.

di M ed una carta locale di $\tilde{G}$ prefissate. Si consideri a tale scopo, una carta locale (U, ϕ) di M e sia $\{x^i\}$ il relativo sistema coordinato; si indichi con σ_U la sezione locale di $\mathscr{P}(M)$ definita su U, la quale associa ad ogni punto $p \in U$ il riferimento proiettivo u_p relativo alla carta (U, ϕ) e sia ω_U la 1-forma su U a valori nell'algebra di Lie $\tilde{g}$ di $\tilde{G}$, definita per ogni $p \in U$ e per ogni $X_p \in T_p(M)$ da (cfr. [**2**]$_1$)

$$(\omega_U)_p(X_p) = v_{\sigma_U(p)}\big((\sigma_U)_{*p}(A_p(X_p))\big) - \Gamma_{\sigma_U(p)}\big((\sigma_U)_{*p}(X_p)\big) ,$$

dove $v_{\sigma_U(p)}\colon V_{\sigma_U(p)} \to \tilde{g}$ è l'isomorfismo che muta $A^*_{\sigma_U(p)}$ in A (cfr. [**3**]).

Fissata una carta locale $(U_{\gamma\gamma}, \phi_{\gamma\gamma})$ in $\tilde{G}$, sia (E^β_α) la base corrispondente dell'algebra di Lie $\tilde{g}$ (2); posto

$$\omega_U = (\Gamma^\alpha_{j\beta}\,\mathrm{d}x^j)E^\beta_\alpha , \qquad A_{|U} = A^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \mathrm{d}x^j ,$$

le $n^2(n+3)$ funzioni $A^i_j, \Gamma^\alpha_{j\beta}$ *si chiamano le componenti di* Γ *rispetto alla carta* (U, ϕ) *di* M *et alla carta* $(U_{\gamma\gamma}, \phi_{\gamma\gamma})$ *di* $\tilde{G}$.

Siano ora (U, ϕ), $(\overline{U}, \overline{\phi})$ due carte locali di M tali che $U \cap \overline{U} \neq \emptyset$ e siano $\{x^i\}$, $\{\overline{x}^{i'}\}$ i relativi sistemi coordinati; posto

$$\theta^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^{i'}} , \quad \bar{\theta}^{i'}_i = \frac{\partial \overline{x}^{i'}}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad \theta^i_{j'k'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \overline{x}^{j'} \partial \overline{x}^{k'}} ,$$

si prova la seguente proposizione.

Prop. 3.1. *Sia* Γ *una pseudoconnessione proiettiva su* M *e siano* $A^i_j, \Gamma^\alpha_{j\beta}$ *e* $\overline{A}^{i'}_{j'}, \Gamma^{\alpha'}_{j'\beta'}$ *le componenti di* Γ *relative rispettivamente alle carte* (U, ϕ) *e* $(\overline{U}, \overline{\phi})$ *di* M *ed alla carta locale* (U_{00}, ϕ_{00}) *di* G, *allora in* $U \cap \overline{U}$ *si ha*

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &\Gamma^0_{j'k'} = \Gamma^0_{jk}\theta^j_{j'}\theta^k_{k'} , \qquad \Gamma^{i'}_{j'0} = \theta^i_{j0}\theta^j_{j'}\bar{\theta}^{i'}_i , \\ &\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk}\theta^j_{j'}\theta^k_{k'}\bar{\theta}^{i'}_i + A^h_j\theta^j_{j'}\bar{\theta}^{h'}_h\bar{\theta}^{i'}_i\theta^i_{h'k'} . \end{aligned}$$

Infatti in base alla Prop. 1 del n. 3 di [**2**]$_1$, per ogni $p \in U \cap \overline{U}$ e per ogni $X_p \in T_p(M)$ risulta

$$\text{(2)} \qquad (\omega_{\overline{U}})_p(X_p) = \big(ad(\psi_{U\overline{U}}(p))\big)^{-1}\big((\omega_U)_p(X_p) + \delta_{U\overline{U}}(A_p(X_p))\big) ,$$

(2) In questo numero gli indici latini variano nell'insieme $\{1, 2, \dots n\}$, gli indici greci nell'insieme $\{0, 1, 2, \dots, \hat{\gamma}, \dots, n\}$.

dove $\psi_{U\bar{U}}(p)$ è l'elemento di $\tilde{G}$ corrispondente alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}$ con $\Theta = (\theta^i_{i'}) \in GL(n, \boldsymbol{R})$, e $\delta_{U\bar{U}}$ è la 1-forma su $U \cap \bar{U}$ a valori in $\tilde{\mathfrak{g}}$ definita per ogni $p \in M$ e per ogni $X_p \in T_p(M)$ da $(\delta_{U\bar{U}})_p(X_p) = \delta_{\psi_{U\bar{U}}(p)}(\psi_{U\bar{U}})_{*p}(X_p)$ essendo $\delta_{\psi_{U\bar{U}}(p)}$ la 1-forma canonica δ su G calcolata nel punto $\psi_{U\bar{U}}(p)$.

Nella (2) sostituendo ad X_p il vettore tangente $(\partial/\partial \bar{x}^{j'})$ si ottiene

$$(\omega_{\bar{U}})_p \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{j'}}\right)_p = ad(\psi_{U\bar{U}}(p))^{-1} \theta^j_{j'} \Gamma^\alpha_{j\beta} E^\beta_\alpha + (\delta_{U\bar{U}})_p \theta^j_{j'} A_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p . \tag{3}$$

Tenuto conto del n. **2**, dalla (3) segue

$$(\omega_{\bar{U}})_p \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{j'}}\right)_p = \Gamma^0_{jk} \theta^j_{j'} \theta^k_{k'} E^{k'}_0 + \Gamma^i_{j0} \theta^j_{j'} \bar{\theta}^{i'}_i E^0_{i'} + \Gamma^i_{jk} \theta^j_{j'} \theta^k_{k'} \bar{\theta}^{i'}_i E^{k'}_{i'} + A^h_j \theta^j_{j'} \bar{\theta}^{h'}_h \theta^i_{h'k'} \bar{\theta}^{i'}_i E^{k'}_{i'} ,$$

e da questa e dall'espressione $(\omega_{\bar{U}})_p(\partial/\partial \bar{x}^{j'})_p = \Gamma^{\alpha'}_{j'\beta} E^{\beta'}_{\alpha'}$ si ottengono in modo ovvio le uguaglianze (1).

Prop. 3.2. *Ogni pseudoconnessione proiettiva Γ su M induce una pseudoconnessione lineare $\mathring{\Gamma}$, e viceversa.*

Infatti fissata in $\tilde{G}$ la carta locale (U_{00}, ϕ_{00}), per ogni carta (U, ϕ) di M, si indichino con $A^i_j, \Gamma^\alpha_{j\beta}$ le componenti di Γ rispetto a tali carte e si ponga $\mathring{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}$, allora le $n^2(n+1)$ funzioni A^i_j, $\mathring{\Gamma}^i_{jk}$ sono le componenti rispetto ad (U, ϕ) di una pseudoconnessione lineare $\mathring{\Gamma}$ in M. Invero per la Prop. 3.1 se (U', ϕ') è un'altra carta locale di M tale che $U \cap U' \neq \emptyset$ si ha

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk} \theta^j_{j'} \theta^k_{k'} \bar{\theta}^{i'}_i + A^h_j \theta^j_{j'} \bar{\theta}^{h'}_h \bar{\theta}^{i'}_i \theta^i_{h'k'} .$$

Viceversa, indicato con $L(M)$ lo spazio fibrato dei riferimenti lineari di M, si considerino l'applicazione $\varphi: GL(n, R) \to \tilde{G}$, che muta A in $\tilde{B}$, essendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, e l'applicazione $\phi: L(M) \to \mathscr{P}(M)$ che ad ogni riferimento lineare $l_p = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, nel punto $p \in M$, associa il riferimento proiettivo $\phi(l_p) = (O_{T_p(M)}, D_p(X_1), \ldots, D_p(X_n), \sum_{i=1}^n X_i)$. Si verifica facilmente che (ϕ, φ) è un omomorfismo di fibrati e quindi per ogni pseudoconnessione lineare $\mathring{\Gamma}$ si può considerare la pseudoconnessione proiettiva immagine di $\mathring{\Gamma}$ tramite detto omomorfismo (cfr. [**2**]$_2$).

4 - Pseudoconnessioni proiettive riducibili

Denotato con $\mathscr{A}'(p)$ l'insieme dei riferimenti proiettivi in p che hanno come iperpiano all'infinito $D_p(M)$, si vede facilmente che, se u'_p e v'_p sono due riferimenti di $\mathscr{A}'(p)$, la trasformazione lineare omogenea invertibile del cambiamento di riferimento nel passaggio da u'_p a v'_p è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & a \end{pmatrix}$ con $a \in GL(n, \boldsymbol{R})$ e $\xi \in \boldsymbol{R}^n$, quindi da una matrice del gruppo di Lie $A(n, \boldsymbol{R})$ (cfr. [**3**], pag. 125).

Se si pone $\mathscr{A}'(M) = \bigcup_{p \in M} \mathscr{A}'(p)$ e si considerano l'applicazione $\psi'\colon \mathscr{A}'(M) \times A(n, \boldsymbol{R}) \to A'(M)$, che muta (u'_p, A) in $\psi(u'_p, \tilde{A})$ e la proiezione $\pi'\colon \mathscr{A}'(M) \to M$, che associa ad u'_p il punto p, per la Prop. 5.3 a pag. 53 di [**3**] risulta che $\eta = (\mathscr{A}'(M), A(n, R), \psi', M, \pi')$ è un sottofibrato ridotto del fibrato dei riferimenti proiettivi $\xi = (\mathscr{P}(M), \tilde{G}, \psi, M, \pi)$.

Considerate l'inclusione F di $A'(M)$ in $\mathscr{P}(M)$ e la restrizione g della surgezione canonica $GL(n+1, R) \to \tilde{G}$ al sottogruppo $A(n, R)$, *l'immagine Γ' di una pseudoconnessione Γ di η, mediante l'omomorfismo di fibrati* (F, g) (cfr. [**2**]$_2$) *è una pseudoconnessione proiettiva su M riducibile alla pseudoconnessione Γ su η.*

Bibliografia

[1] I. Cattaneo Gasparini, *Sulle connessioni proiettive*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **50** (1960), 467-474.

[2] C. Di Comite: [•]$_1$ *Pseudoconnessioni di seconda specie su uno spazio fibrato principale*, Ann. Mat. Pura Appl. (6) **99** (1974), 109-142; [•]$_2$ *Pseudoconnessioni affini*, Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) **43** (1976).

[3] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. I, Interscience Publishers 1963.

Summary

In this note the notion of projective pseudoconnexion is introduced and some geometrical properties are studied.

* * *