Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 433-441

RENATA SPANICCIATI (*)

Su alcune classi di poliedri regolari per equiaffinità (**)

1 - Introduzione

È ben noto come lo studio delle figure « regolari » del piano e dello spazio ordinario abbia ricevuto nel secolo scorso un grande impulso — anche per l'interesse che gli studiosi di cristallografia hanno avuto per esso — a cominciare da E. S. Fedorov (1853-1919).

Ulteriori approfondimenti e generalizzazioni sono state stabilite, nell'ambito dello spazio euclideo $\boldsymbol{R}^n$, dal matematico canadese H. S. M. Coxeter [**2**]$_1$.

Un *polytope* (*reale*), cioè una figura convessa di $\boldsymbol{R}^n$ limitata da un numero finito di iperpiani, viene detto *regolare* se ha un *centro*, ossia un punto avente una medesima distanza d_k da ogni k-spazio che lo limita, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Per $n = 2$ (3) un polytope regolare è un poligono (poliedro) regolare.

Un contributo sostanziale per lo studio di un polytope regolare viene fornito con l'introduzione del *grafo* ad esso associato (cfr. [**2**]$_1$, pp. 84-88), che facilita lo studio dei gruppi generati da riflessioni (cfr. [**2**]$_1$, § 11.5). Un'ulteriore estensione è stata compiuta da Coxeter nel 1973 con lo studio dei *polytopes regolari complessi* (cfr. [**2**]$_3$).

In questo stesso ordine di idee (euclideo) si collocano i lavori di J. J. Burckhardt, W. O. J. Moser e L. Fejes Tóth (cfr. [**1**], [**3**], [**5**], 1947, 1957, 1964).

Coxeter, collegandosi ad una precedente impostazione data da O. Veblen e J. W. Young (cfr. [**10**]$_2$, pp. 96-109), compie lo studio delle figure del piano affine $\boldsymbol{R}^2$ rispetto al gruppo delle *equiaffinità* [**2**]$_4$.

Ogni equiaffinità risulta il prodotto di al più tre trasformazioni equiaffini di tipo elementare, dette *shears*: la *shear* $[M;\ P \to P']$ definita dal triangolo

---

(*) Indirizzo: Via Salaria 222, 00198 Roma, Italy.

(**) Ricevuto- 11-II-1981.

MPP' è la traccia in $\boldsymbol{R}^2$ dell'omologia speciale di asse la retta a per M parallela a PP', di centro il punto improprio dell'asse e che trasforma P in P'.

Ad esempio le traslazioni e le riflessioni rispetto ad un punto possono esprimersi come prodotto rispettivamente di due e di tre *shears*. Tutte e sole le equiaffinità sono ottenute come prodotto di due *riflessioni affini* (riflessione di $\boldsymbol{R}^2$ rispetto ad una retta in una fissata direzione) (cfr. $[\mathbf{2}]_5$, p. 41).

In $[\mathbf{2}]_5$ (1969) Coxeter introduce la nozione di *poligono regolare per equiaffinità* come un poligono $\mathscr{P}$ (non necessariamente chiuso) di $\boldsymbol{R}^2$ i cui vertici $A_0A_1A_2 \dots$ costituiscono un'orbita di una equiaffinità; esso risulta necessariamente inscritto in una conica $\mathscr{C}$ mutata in sè dall'equiaffinità e (come pure l'equiaffinità che lo genera) viene detto *ellittico*, *iperbolico* o *parabolico* a seconda che $\mathscr{C}$ risulti un'ellisse, una iperbole o una parabola.

A partire dal 1970, Coxeter $[\mathbf{2}]_6$, E. W. Ellers $[\mathbf{4}]_{1,2}$, B. Jessen [**6**], G. Korchmáros [**7**] hanno sviluppato varie ricerche concernenti trasformazioni equiaffini e poligoni e poliedri regolari in piani e spazi affini pascaliani arbitrari.

Il presente lavoro si colloca nell'ambito dello studio delle *figure regolari per equiaffinità* ed è un proseguimento dello studio dei poliedri $[\mathbf{9}]_{1,2}$. In esse, l'Autrice aveva esteso la nozione, dovuta a H. S. M. Coxeter, di poligono regolare per equiaffinità in un piano affine, pervenendo a quella di poliedro di $\boldsymbol{R}^3$ regolare per equiaffinità. In particolare, in tali Note sono state introdotte alcune classi di tali poliedri ed alcuni modelli per essi: quelli corrispondenti ai solidi platonici, gli $\{n\}$-prismi e le $\{n\}$-piramidi regolari per equiaffinità. Tale studio è basato sulla considerazione delle rotazioni affini ellittiche di periodo finito n.

Nella presente Nota si introducono altre classi di poliedri regolari per equiaffinità: quelle degli $\{n\}$-antiprismi (**4**) e delle $\{n\}$-dipiramidi (**6**), così chiamati in analogia al caso euclideo.

Allo scopo di rendere l'esposizione autosufficiente, si premettono richiami e complementi su talune trasformazioni affini nel piano (**2**) e nello spazio (**3**): le riflessioni e le rotazioni, pervenendo fra l'altro a stabilire teoremi di esistenza ed unicità che vengono utilizzati nella parte successiva.

2 - Riflessioni e rotazioni affini nel piano

Consideriamo nel piano affine $\boldsymbol{A}^2$ su $\boldsymbol{R}$ quattro rette distinte: m_1 ed m_2 non parallele fra loro, ed n_1, n_2 passanti per il punto $C = m_1 \cap m_2$.

Siano R_1 ed R_2 le *riflessioni affini* (o *simmetrie oblique*) di $\boldsymbol{A}^2$ individuate rispettivamente da (m_1, n_1) e da (m_2, n_2): la riflessione $R_\nu = (m_\nu, n_\nu)$ trasforma ogni punto P di $\boldsymbol{A}^2$ nel punto P' simmetrico di P rispetto alla retta m_ν (asse) nella direzione della retta n_ν (direttrice) (cfr. $[2]_5$, p. 40) e ammette pertanto la retta m_ν come luogo di punti uniti ($\nu = 1, 2$).

$R_1 \circ R_2$ si chiama *rotazione affine di centro* il punto $C = m_1 \cap m_2$, che è unito in $R_1 \circ R_2$.

Ogni *rotazione affine* risulta *un'equiaffinità*, cioè un'affinità che conserva le aree (ossia una trasformazione affine con determinante $+1$) (cfr. $[2]_5$, p. 41).

La $R_1 \circ R_2$ si chiama poi *rotazione affine ellittica* se, per ogni punto $P \neq C$, l'orbita di P secondo $R_1 \circ R_2$ è contenuta in un'ellisse (cfr. $[2]_5$, p. 45).

Se la *rotazione ellittica* $R = R_1 \circ R_2$ ha periodo n, l'orbita $A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$ di un punto $A_0 \neq C$ arbitrariamente fissato si chiama, per analogia al caso euclideo in cui l'ellisse è una circonferenza, *poligono* (*ellittico*) *di tipo* $\{n\}$ *regolare per equiaffinità* (cfr. $[2]_5$, p. 48), brevemente un $\mathscr{P}_n$. Ad esempio i $\mathscr{P}_3$ ed i $\mathscr{P}_4$ sono i triangoli ed i parallelogrammi (cfr. $[2]_5$, p. 43). In tal caso i punti A_i ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) appartengono dunque ad un'ellisse che è trasformata in sè da R; il centro dell'ellisse coincide (cfr. $[2]_5$, p. 46) con il centro C della rotazione R ed inoltre (m_1, n_1) ed (m_2, n_2) sono (cfr. $[2]_5$, p. 46) coppie di diametri coniugati per l'ellisse stessa.

Fissato un riferimento, in cui l'ellisse contenente $A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$ abbia equazione $x^2 + y^2 = 1$, la rotazione $R_1 \circ R_2$ può rappresentarsi (cfr. $[2]_5$, p. 48) con le equazioni

$$x' = x \cos t - y \operatorname{sen} t \,, \qquad y' = x \operatorname{sen} t + y \cos t \,, \qquad \text{dove} \quad t = 2\pi/n \,. \tag{1}$$

Inoltre, se $A_0 \equiv (1, 0)$, risulta $A_i \equiv (\cos it, \operatorname{sen} it)$, per ogni $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Dalle (1) si ha senz'altro che la traccia di una rotazione ellittica R di periodo n vale $T = 1 + 2 \cos t$, ove $t = 2\pi/n$; inoltre risulta $A_3 - A_0 = T(A_2 - A_1)$ (cfr. $[2]_5$, p. 42).

Più in generale risulta

$$A_{h-1} A_{h+2} \| A_h A_{h+1} \,, \tag{2}$$

poichè si ha l'equivalenza dei triangoli corrispondenti $A_{h-1} A_h A_{h+1}$ e $A_h A_{h+1} A_{h+2}$, in quanto R è un'equiaffinità.

Assegnata una rotazione affine ellittica R di centro C e considerato l'$\{n\}$-poligono $A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$ generato da R a partire da un fissato punto A_0, si può decomporre R nel prodotto delle riflessioni affini R_1 ed R_2 così definite: R_1 ha come asse la retta m_1 passante per il centro C del poligono e per il punto medio di $A_1 A_2$ e come direttrice n_1 la retta per C parallela alla $A_1 A_2$; R_2 ha come asse la retta $m_2 = CA_2$ e come direttrice n_2 la retta per C parallela alla

A_1A_3. Si noti che la rotazione affine R risulta ovviamente individuata dalla condizione di trasformare $A_0A_1A_2$ rispettivamente in $A_1A_2A_3$.

D'altra parte si ha il seguente teorema di esistenza ed unicità.

Fissati arbitrariamente un punto C, un intero $n > 2$ e due punti corrispondenti A_1 e A_2, distinti fra loro, $\neq C$ e non allineati con esso, è univocamente determinata la rotazione affine ellittica R che ha centro C, periodo n e che trasforma A_1 in A_2.

Proviamo anzitutto che se R è una rotazione affine ellittica soddisfacente alle condizioni sopra indicate, essa è univocamente determinata.

Abbiamo visto sopra che

$$(A_3 - A_0)/(A_2 - A_1) = T = 1 + 2\cos(2\pi/n)\;; \tag{3}$$

inoltre si ha che il punto medio di A_0A_3 appartiene alla retta m_1 passante per C e per il punto medio di A_1A_2 e che il punto medio di A_1A_3 appartiene alla retta m_2 (CA_2).

In questo modo A_0 e A_3 sono univocamente determinati e di conseguenza lo è la R che è l'equiaffinità che trasforma $A_0A_1A_2$ in $A_1A_2A_3$.

Per l'esistenza, basta considerare la trasformazione R di equazioni (1) rispetto ad un riferimento affine in cui $C \equiv (0, 0)$, $A_1 \equiv (1, 0)$ e $A_2 \equiv \big(\cos(2\pi/n), \operatorname{sen}(2\pi/n)\big)$.

3 - Riflessioni e rotazioni affini nello spazio

Consideriamo, entro lo spazio affine ordinario A^3, due piani distinti α_1 ed α_2 non paralleli e due rette m_1 ed m_2 rispettivamente non parallele ad α_1 e ad α_2.

Siano R_1 ed R_2 le *riflessioni affini* (o *simmetrie planari oblique*) di A^3 individuate rispettivamente da (α_1, m_1) e da (α_2, m_2): la riflessione R_ν trasforma ogni punto P di A^3 nel simmetrico P' rispetto al piano α_ν nella direzione della retta m_ν (cfr. [**9**]$_1$, p. 114) ed ammette pertanto il piano α_ν come luogo di punti uniti ($\nu = 1, 2$).

$R_1 \circ R_2$ si chiama *rotazione affine* di *asse* la retta $d = \alpha_1 \cap \alpha_2$ e di *giacitura* quella (δ) individuata dalle rette m_1 ed m_2; ogni piano con giacitura δ risulta mutato in sè da $R_1 \circ R_2$ e l'asse d è il luogo dei punti uniti in $R_1 \circ R_2$.

Essa è un'*equiaffinità*, cioè conserva i volumi (cfr. [**9**]$_1$, p. 114).

La $R_1 \circ R_2$ si chiama poi *rotazione affine ellittica*, se, per ogni punto $P \notin d$, l'orbita di P secondo $R_1 \circ R_2$ è contenuta in una ellisse (appartenente al piano passante per P e di giacitura δ) (cfr. [**9**]$_2$, p. 216).

Dimostriamo il seguente teorema di esistenza ed unicità.

Fissati arbitrariamente nello spazio A^3*: una giacitura* δ*, una retta* d*, un intero* $n > 2$*, due punti distinti* A_1 *ed* A_2 *su un piano* π *di giacitura* δ *non allineati con il punto* $C = \pi \cap d$*, esiste una ed una sola rotazione affine ellittica* R *di periodo* n*, di asse* d*, di giacitura* δ *e che trasforma* A_1 *in* A_2.

Si costruisca sul piano π, nel modo visto in **2**, la rotazione affine ellittica $\bar{R}$ di centro C, di periodo n e che trasforma il punto A_1 nel punto A_2. Sia $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ il poligono ellittico di tipo $\{n\}$, orbita di A_1 (ed appartenente a π).

Consideriamo nello spazio A^3 la rotazione $R = R_1 \circ R_2$ così definita: $R_\nu = (\alpha_\nu, m_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$; α_1 è il piano passante per la retta d e per il punto medio di A_1A_2; m_1 è la retta per C parallela alla retta A_1A_2; α_2 è il piano per d e per A_2; m_2 è la retta per C parallela alla retta A_1A_3. La rotazione $R = R_1 \circ R_2$ ha quindi asse d e giacitura δ individuata da π.

Evidentemente (cfr. **2**) R induce su π la rotazione affine ellittica $\bar{R}$ (trasforma A_1 in A_2) e risulta univocamente determinata dai dati assegnati in quanto R è individuata dai tetraedri corrispondenti VCA_0A_1 e VCA_1A_2, dove V è un arbitrario punto appartenente a d, distinto da C.

Infine R risulta ellittica di periodo n: ciò è evidente poichè per ogni punto $A_0' \notin d$ la restrizione di R sul piano π' passante per A_0' e di giacitura δ risulta, in base a **2**, una rotazione affine ellittica $\bar{R}'$ di periodo n.

Osservazione 1. Analogamente al caso piano (cfr. **2**), si può facilmente assegnare una rappresentazione analitica canonica per le rotazioni affini ellittiche di A^3. Considerata in A^3 la rotazione affine ellittica R di asse d, giacitura δ, periodo n, che genera l'$\{n\}$-poligono $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ (contenuto in un piano di giacitura δ); fissato in A^3 un riferimento in cui d coincida con l'asse z, δ sia la giacitura del piano $z = 0$, $A_0 \equiv (1, 0, 0)$ e $A_1 \equiv (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, ove $t = 2\pi/n$, la R può rappresentarsi con le equazioni

$$(4) \qquad x' = x \cos t - y \operatorname{sen} t\,, \quad y' = x \operatorname{sen} t + y \cos t\,, \quad z' = z\,, \quad \text{dove } t = 2\pi/n\,.$$

Posto al solito $R = R_1 \circ R_2$, con $R_\nu = (\alpha_\nu, m_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$, attualmente si ha che α_1 è il piano $y = 0$, m_1 la retta $x = z = 0$, α_2 il piano di equazione $x \operatorname{sen} t - y(1 + \cos t) = 0$ (in quanto passante per l'asse z e per il punto medio di A_0A_1), m_2 la retta di equazioni $x \operatorname{sen} t - y(\cos t - 1) = z = 0$ (in quanto parallela per 0 alla retta A_0A_1).

4 - $\{n\}$-antiprismi regolari per equiaffinità

Si ricordi che un poliedro regolare per equiaffinità è un poliedro avente per facce poligoni regolari per equiaffinità e tale che esistano rotazioni affini che lo mutano in sè (cfr. [**9**]$_1$, p. 115). Nel presente paragrafo e nei successivi ci si limita al caso in cui le suddette rotazioni affini risultino ellittiche di periodo finito.

Sia $R_{(n)}$ una rotazione affine ellittica di periodo n, di asse d e giacitura δ dello spazio A^3. Fissati in A^3 due piani distinti π e $\bar{\pi}$ di giacitura δ, consideriamo due punti $A_0 \in \pi$, $\bar{A}_0 \in \bar{\pi}$, con $A_0, \bar{A}_0 \notin d$ e $A_0\bar{A}_0 \| d$, e i loro trasformati $A_i = A_0 R^i_{(n)}$, $\bar{A}_i = \bar{A}_0 R^i_{(n)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Si ottiene in tal modo un $\{n\}$-prisma regolare per equiaffinità (cfr. [**9**]$_2$, p. 217), brevemente un Π_n, avente come poligoni di base $\mathscr{P}_n = A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$ e $\bar{\mathscr{P}}_n = \bar{A}_0 \bar{A}_1 \ldots \bar{A}_{n-1}$ e per facce laterali i parallelogrammi $\mathscr{P}^i_4 = A_i \bar{A}_i \bar{A}_{i+1} A_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Si consideri poi l'ellisse $\bar{\mathscr{C}}$ circoscritta al poligono $\bar{\mathscr{P}}_n$ ed il piano α passante per l'asse d di $R_{(n)}$ e per il punto medio $\bar{M}$ di $\bar{A}_0\bar{A}_1$: sia $A'_0 = \alpha \cap \bar{\mathscr{C}}_{\bar{A}_0\bar{A}_1}$ ove con $\bar{\mathscr{C}}_{\bar{A}_h\bar{A}_{h+1}}$ si denota l'arco dell'ellisse di estremi $\bar{A}_h$ ed $\bar{A}_{h+1}$ e non contenente gli altri vertici del poligono $\bar{\mathscr{P}}_n$ $(h = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Il trasformato di $\bar{M}$ nella $R_{(n)}$ è il punto medio $\bar{N}$ di $\bar{A}_1\bar{A}_2$, poichè i punti medi si conservano per equiaffinità; il piano $\bar{\alpha}$ per d e per $\bar{N}$ è dunque il trasformato di α in $R_{(n)}$. Il punto $A'_1 = \bar{\alpha} \cap \bar{\mathscr{C}}_{\bar{A}_1\bar{A}_2}$ risulta il trasformato di A'_0 nella rotazione affine ellittica $R_{(n)}$:

$$(A'_0)\, R_{(n)} = (\alpha \cap \bar{\mathscr{C}}_{\bar{A}_0\bar{A}_1}) R_{(n)} = (\alpha) R_{(n)} \cap (\bar{\mathscr{C}}_{\bar{A}_0\bar{A}_1}) R_{(n)} = \bar{\alpha} \cap \bar{\mathscr{C}}_{\bar{A}_1\bar{A}_2} = A'_1 .$$

Si genera così, mediante la $R_{(n)}$, il $\mathscr{P}'_n = A'_0 A'_1 \ldots A'_{n-1}$, orbita di A'_0 nella $R_{(n)}$, iscritto in $\bar{\mathscr{C}}$.

Il poligono $\mathscr{P}'_n$ può anche essere definito assumendo $A'_i = \bar{A}_i R_{(2n)}$ dove $R_{(2n)}$ è la rotazione affine ellittica definita, in forza di **3**, dalle condizioni di avere periodo $2n$, asse d e giacitura δ (come $R_{(n)}$) e di trasformare $\bar{A}_0$ in A'_0 $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. $R_{(2n)}$ verrà chiamata la *radice quadrata di* $R_{(n)}$, poichè $R^2_{(2n)} = R_{(n)}$.

Congiungendo ciascun vertice A_i con i vertici A'_i ed A'_{i-1}, si ottiene un nuovo poliedro avente $\mathscr{P}_n$ e $\mathscr{P}'_n$ come poligoni di base e i $2n$ triangoli $A_i A'_i A'_{i-1}$, $A'_{i-1} A_{i-1} A_i$ come facce laterali $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ il quale è mutato in sè da $R_{(n)}$ e dunque dal gruppo ciclico C_n, generato dalla $R_{(n)}$ stessa.

Il poliedro così ottenuto risulta dunque, per costruzione, un poliedro regolare per equiaffinità, che chiameremo *$\{n\}$-antiprisma regolare per equiaffinità* o brevemente un Π^*_n (per analogia alla nozione euclidea di « antiprisma regolare » (cfr. [**2**]$_2$, p. 149)).

Riassumendo: *un Π^*_n è un poliedro dedotto, da un Π_n di basi un $\mathscr{P}_n = A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$ ed un $\bar{\mathscr{P}}_n = \bar{A}_0 \bar{A}_1 \ldots \bar{A}_{n-1}$, assumendo come sue basi $\mathscr{P}_n$ e $(\bar{\mathscr{P}}_n) \cdot R_{(2n)} = \mathscr{P}'_n = A'_0 A'_1 \ldots A'_{n-1}$, ove $R_{(2n)}$ è la radice quadrata della rotazione affine ellittica $R_{(n)}$ che ha generato il dato $\{n\}$-prisma, ed assumendo come facce laterali i $2n$ triangoli $A_i A'_i A'_{i-1}$, $A'_{i-1} A_{i-1} A_i$.*

Osservazione 1. Per la costruzione di un Π_n^* si può evidentemente seguire anche il procedimento seguente.

Si consideri un Π_{2n} generato da una rotazione affine ellittica $R_{(2n)}$. I $\{2n\}$-poligoni di base siano rispettivamente $A_0A_1 \dots A_{2n-1}$, $\bar{A}_0\bar{A}_1 \dots \bar{A}_{2n-1}$. Ebbene, se si fissano rispettivamente nel primo poligono i vertici di indice pari e nel secondo quelli di indice dispari e poi si congiunge ciascun vertice A_{2h} con i vertici $\bar{A}_{2h-1}$ ed $\bar{A}_{2h+1}$ e ciascun vertice $\bar{A}_{2h-1}$ con A_{2h-2} e A_{2h} $(h = 0, 1, \dots, n-1)$ si ottiene un poliedro con basi $A_0A_2 \dots A_{2n-2}$ e $\bar{A}_1\bar{A}_3 \dots \bar{A}_{2n-1}$ e con facce laterali i $2n$ triangoli anzidetti, che risulta un Π_n^*. I due $\{n\}$-poligoni di base sono le orbite dei punti A_0 e A_1 rispettivamente, nella rotazione affine ellittica $R_{(n)} = R^2_{(2n)}$.

Osservazione 2. In base alla Osservazione 1 di **3**, dato un qualunque Π_n si può supporre che i suoi vertici A_i e $\bar{A}_i$ abbiano coordinate $A_i \equiv (\cos it,$ $\operatorname{sen} it, a)$, $\bar{A}_i \equiv (\cos it, \operatorname{sen} it, -a)$, ove $t = 2\pi/n$ ed a è un numero reale non nullo.

In tal caso le coordinate dei vertici dell'$\{n\}$-antiprisma associato sono evidentemente date da

$$A_i \equiv (\cos it, \operatorname{sen} it, a)\,, \qquad A'_1 \equiv (\cos (2i+1)/2\cdot t, \operatorname{sen} (2i+1)/2\cdot t, -a)\,.$$

Osservazione 3. Si noti che un Π_n^* ha il *centroide* (cfr. [**2**]$_2$, pp. 213, 214) C coincidente con il centroide del Π_n da cui è generato e risulta punto medio dei centri dei due $\{n\}$-poligoni di base.

5 - Quadriche circoscritte ad un Π_n^*

Poichè un Π_n risulta inscritto in un fascio di quadriche (cfr. [**9**]$_2$, p. 217), dalla definizione di Π_n^* data in **4** si deduce senz'altro che le quadriche circoscritte ad un Π_n^* sono ∞^1.

L'equazione di questo fascio risulta: $x^2 + y^2 - 1 + \lambda(z+a)(z-a) = 0$, qualora il riferimento si assuma in modo che i vertici del dato Π_n^* abbiano le coordinate dell'Osservazione 2 di **4**.

Inoltre, le quadriche del fascio sono trasformate in sè dal gruppo ciclico C_n dell'$\{n\}$-antiprisma, come si può verificare per via analitica, usando per $R_{(n)}$ la rappresentazione canonica (4) di **3**.

6 - $\{n\}$-dipiramidi regolari per equiaffinità

Considerati nello spazio A^3 un $\mathscr{P}_n = A_0A_1 \dots A_{n-1}$ di centro C e contenuto nel piano π, una retta d passante per C e $\notin \pi$, esiste (cfr. **3**) una sola rotazione affine ellittica $R_{(n)}$ di asse d, giacitura δ (di π) e periodo n, tale che l'orbita di A_0 nella $R_{(n)}$ stessa coincida con il $\mathscr{P}_n$.

Fissati sull'asse d due punti distinti V e V', simmetrici rispetto a C, si congiungano V e V' rispettivamente con i punti A_i $(i = 0, 1, \dots, n-1)$: si ottiene un poliedro che risulta, per costruzione, regolare per equiaffinità (cfr. **4**) e che chiameremo *$\{n\}$-dipiramide regolare per equiaffinità, brevemente Δ_n^*, di vertici V e V' e di base $\mathscr{P}_n$* (per analogia alla nozione euclidea di « dipiramide regolare » (cfr. [**2**]$_1$, p. 5)).

Si noti invero che la Δ_n^* è generata, a partire dal triangolo $VV'A_0$, dalla rotazione affine ellittica $R_{(n)}$ (che la muta in sè). La $R_{(n)}$ genera inoltre un gruppo ciclico C_n di ordine n che trasforma l'$\{n\}$-dipiramide in sè.

Riassumendo: *una Δ_n^* è una dipiramide avente per base un $\mathscr{P}_n = A_0A_1 \dots A_{n-1}$, e per vertici due punti V e V' simmetrici rispetto al centro di $\mathscr{P}_n$ ed appartenenti all'asse di una rotazione affine ellittica $R_{(n)}$ che genera $\mathscr{P}_n$.*

Osservazione 1. Una Δ_n^* ha il centroide coincidente con il centro del $\mathscr{P}_n$ di base.

Osservazione 2. Per la costruzione di una Δ_n^* si può seguire anche il procedimento seguente.

Si consideri un Π_n generato da una rotazione affine ellittica $R_{(n)}$ avente per basi due poligoni $\overline{\mathscr{P}}_n$ e $\mathscr{P}_n'$ di centri $\overline{V}$ e V' rispettivamente. Siano C il punto medio di $\overline{V}V'$ e $\mathscr{P}_n$ il poligono intersezione di Π_n col piano π passante per C e parallelo ai piani dei poligoni di base.

La Δ_n^* di vertici $\overline{V}$ e V' e di base $\mathscr{P}_n$ risulta evidentemente regolare per equiaffinità.

7 - Quadriche circoscritte ad una Δ_n^*

Una Δ_n^* di vertici V e V', di base $\mathscr{P}_n$ e di centroide C, risulta inscritta nella quadrica Q, passante per V e per la conica $\mathscr{C}$ circoscritta a $\mathscr{P}_n$, avente il piano π di $\mathscr{C}$ e la retta VV' rispettivamente come piano diametrale e diametro coniugati.

È evidente che Q ha centro C; inoltre Q è trasformata in sè dal gruppo ciclico C_n della Δ_n^*, poichè gli enti geometrici usati per individuare Q vengono trasformati in sè da C_n.

Osservazione 1. Nei §§ **7** e **8** della Nota [**9**]$_2$ sono stati esposti modelli di Π_n e Δ_n (1) quando n=3, 4. Ricordando che i $\mathscr{P}_3$ ed i $\mathscr{P}_4$ sono rispettiva-

(1) $\Delta_n = \{n\}$-piramide regolare per equiaffinità.

mente i triangoli ed i parallelogrammi, si possono avere facilmente tutti i Π_3^*, i Π_4^*, le Δ_3^* e le Δ_4^*.

Si noti che un Π_3^* ed una Δ_4^* sono modelli di ottaedri regolari per equiaffinità (cfr. [**9**]$_1$, p. 117).

Bibliografia

[1] J. J. BURCKHARDT, *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*, Basel 1947.

[2] H. S. M. COXETER: [•]$_1$ *Regular polytopes*, 2^ ed., The Mac Millan Company, New York - Collier Mac Millan Limited, London 1963; [•]$_2$ *Introduction to geometry*, 2^ ed., John Wiley & Sons Inc., New York 1969; [•]$_3$ *Regular complex polytopes*, Cambridge University Press, London 1974; [•]$_4$ *The affine plane*, Scripta Matematica **21** (1955), 5-14; [•]$_5$ *Affinely regular polygons*, Abh. Math. Sem. Hamburg **34** (1969), 38-58; [•]$_6$ *Products of shears in an affine Pappian plane*, Rend. Mat. (6) **3** (1970), 161-166.

[3] H. S. M. COXETER and W. O. J. MOSER, *Generators and relations for discrete groups*, Springer, Berlin 1957.

[4] E. W. ELLERS: [•]$_1$ *The length problem for the equiaffine group of a Pappian geometry*, Rend. Mat. (6) **9** (1976), 327-336; [•]$_2$ *Decomposition of equiaffinities into reflections*, Geom. Dedicata **6** (1977), 297-304.

[5] L. FEJES TÓTH, *Regular figures*, Pergamon Press, Oxford 1964.

[6] B. JESSEN, *The algebra of polytopes*. Danish Mathematical Society (1923-1973), 83-91, Dansk Mat. Forening, Copenhagen 1973.

[7] G. KORCHMÁROS, *Estensioni del concetto di «poligono affin-regolare» ad un qualunque piano affine*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. (8) **60** (1976), 119-125.

[8] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*, Ed. Cremonese, Roma 1961.

[9] R. SPANICCIATI: [•]$_1$ *Poliedri regolari per equiaffinità*, Rend. Mat. (6) **5** (1972), 113-122; [•]$_2$ *{n}-prismi ed {n}-piramidi regolari per equiaffinità*, Rend. Mat. (6) **6** (1973), 215-220.

[10] O. VEBLEN and J. W. YOUNG: [•]$_1$ *Projective Geometry*, Vol. I, Blaisdell 1918; [•]$_2$ *Projective Geometry*, Vol. II, Blaisdell 1918.

Summary

Following an idea of H. S. M. Coxeter [**2**]$_5$ *concerning equiaffine regular polygons, equiaffine regular polyhedra» may be defined in* A^3, *in analogy to the euclidean case, using affine rotations* (cfr. [**2**]$_{3,4}$).

In this paper, after some recalls concerning certain affine transformations of A^2, A^3, *namely the affine reflections and rotations, theorems of existence and unicity for elliptic affine rotations are stated* (**1**, **2**) *and some equiaffine regular polyhedra are studied, namely the equiaffine regular {n}-antiprismas and {n}-dipyramidas* (**3**-**5**).

* * *