Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 373-375

D. MEDICI, M. MICHELOTTI e P. VIGHI (*)

Sulle colorazioni multiple di un grafo (**)

Introduzione

In questo lavoro studiamo alcuni problemi connessi a doppie colorazioni dei vertici di un grafo.

Distinguiamo due possibilità:

(1) presenza simultanea di due colorazioni che utilizzano il medesimo insieme dei colori;

(2) colorazione di ogni vertice con due colori distinti (prescindendo dall'ordine in cui si considerano).

Nel primo caso si studia in particolar modo la relazione che associa colori attribuiti a uno stesso vertice; nel secondo si introduce un carattere numerico, indicandone alcune proprietà.

1 – Dato un grafo non orientato semplice G, diremo V l'insieme dei vertici, S quello degli spigoli e φ l'applicazione che associa ad ogni spigolo la coppia non ordinata dei vertici; prendiamo un insieme K *dei colori* e due colorazioni

$$c_1: V \to K \qquad c_2: V \to K$$

(ovviamente per ogni coppia di vertici adiacenti v e u, $c_i(v) \neq c_i(u)$).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Ricevuto: 19-XII-1980.

Porremo $h(v) = \langle c_1(v), c_2(v)\rangle$; $s_{v,u}$ sarà l'eventuale spigolo di estremi v e u. Resta individuata in K la relazione R così definita: $k_i R k_j$ sse $\exists v \in V$ $k_i = c_1(v)$ e $k_j = c_2(v)$.

Dato G ed assegnate in esso due colorazioni, il grafo $\Gamma(c_1, c_2)$ delle due colorazioni ha per vertici i colori e uno spigolo che va da k_i a k_j per ogni vertice $v \in G$ tale che $h(v) = \langle k_i, k_j\rangle$.

Il grafo Γ così ottenuto in generale non è semplice.

Dato un grafo orientato Γ, non necessariamente semplice, ci si chiede se esiste un grafo non orientato doppiamente colorato G che ammetta Γ come grafo delle due colorazioni.

Per ogni spigolo s di Γ, G ha un vertice x avente come colori gli estremi di s; presi in G due vertici x, y ci può essere uno spigolo di estremi x, y solo se $c_i(x) \neq c_i(y)$.

Nell'insieme dei grafi semplici siffatti, ordinato rispetto alla relazione di inclusione nell'insieme degli spigoli, è massimale il grafo per cui se $c_i(x) \neq c_i(y)$ esiste uno spigolo di estremi x, y.

Quando la relazione R è una bijezione una colorazione è completamente determinata dall'altra.

Osserviamo che se il numero cromatico è 2 e le colorazioni sono minimali, R è una bijezione; e così pure se il grafo è completo.

Il grafo connesso con il minor numero di vertici che ammette due colorazioni per cui la relazione R non è una bijezione è il seguente

$$V = \{1, 2, 3\}\,, \qquad S = \{s_{1,2}; s_{2,3}\}\,,$$

$$h(1) = \langle k_A, k_B\rangle\,, \qquad h(2) = \langle k_B, k_C\rangle\,, \qquad h(3) = \langle k_A, k_A\rangle\,.$$

Se le colorazioni sono minimali il grafo cercato è il seguente

$$V = \{1, 2, 3, 4\}\,, \qquad S = \{s_{1,2}; s_{2,3}; s_{3,1}; s_{3,4}\}\,,$$

$$h(1) = \langle k_A, k_B\rangle\,, \qquad h(2) = \langle k_B, k_C\rangle\,, \qquad h(3) = \langle k_C, k_A\rangle\,, \qquad h(4) = \langle k_A, k_C\rangle\,.$$

Dati due grafi G e G' con due colorazioni c_i, c'_i per ciascuno, consideriamo un omomorfismo ψ semicolorato suriettivo per entrambe, vale a dire: c'è una applicazione $\omega\colon K \to K$ tale che $\omega(c_i(v)) = c'_i(\psi(v))$ dove v è un vertice di G e $\psi(v)$ la sua immagine nell'omomorfismo. Se le colorazioni di G sono minimali e la loro R è una bijezione, ciò accade anche per le colorazioni di G'.

Prendiamo un colore $\bar{k}$ che sia immagine di due colori distinti k^1, k^2 in ω.

In G esistono due vertici adiacenti v ed u di colori k^1, k^2. In G' $\psi(v)$ e $\psi(u)$ possono essere distinti o coincidenti. Se fossero distinti sarebbero adiacenti, ma ciò non è possibile avendo entrambi la stessa prima colorazione. Allora $\psi(v) = \psi(u)$ e perciò le relazioni delle due colorazioni sono bijezioni.

Ognuna delle due colorazioni di G' è minimale: infatti, presi due vertici v' e u' di colori distinti $k^{1'}$, $k^{2'}$, questi colori sono immagini in ω di due colori k^1, k^2 distinti, quindi esiste in G uno spigolo s i cui estremi hanno colore k^1, k^2; l'immagine di s nell'omomorfismo è uno spigolo i cui estremi hanno colore $k^{1'}$, $k^{2'}$.

2 – Dato un grafo non orientato semplice G, definiamo *doppia colorazione* in G una applicazione $h: V \to K^{(2)}$ (insieme degli insiemi di due elementi distinti di K) tale che, per ogni coppia di vertici adiacenti u e v, sia $h(v) \neq h(u)$.

Si può definire il grafo non orientato della doppia colorazione in modo analogo al caso delle due colorazioni; analoga è pure la costruzione di un grafo massimale per la relazione d'inclusione nell'insieme degli spigoli che ammetta un dato grafo Γ come grafo della doppia colorazione.

Ci si chiede qual è il minimo numero di colori (*numero bicromatico*) necessario per una doppia colorazione di un grafo G.

Se il numero cromatico di G è γ, per una doppia colorazione sono sempre sufficienti 2γ colori.

In ogni grafo completo il numero bicromatico è 2γ, così pure per ogni ciclo avente un numero pari di vertici il numero bicromatico è 4.

Il numero bicromatico diventa $2\gamma - 1$ per un ciclo semplice avente $2n + 1$ vertici (con $n > 1$).

Se un grafo contiene un solo ciclo semplice e questo ha un numero dispari e maggiore di 3 di vertici, il suo numero bicromatico è $2\gamma - 1$.

Bibliografia

[1] S. ANTONUCCI, *Equidistribuzione di colori e condizione necessaria di p-cromaticità di un grafo finito*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 169-174.

[2] O. ORE, *Theory of Graphs*, American Mathematical Society, Coll. Publ., Providence 1962.

[3] F. SPERANZA, *Numero cromatico omomorfismi e colorazioni di un grafo*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **102** (1975), 359-367.

Summary

In this work we study some problems pertinent to double colouring of vertices of a graph; we distinguish between simultaneous presence of two colouring and colouring of every vertex with two distinct colours.

* * *