Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 289-298

ALBERTA SUPPA MODENA (*)

Sugli anelli con un'involuzione generata da particolari funzioni di Lie (**)

1 - Introduzione

Benchè esista già una letteratura assai ricca sugli anelli con involuzione gli esempi non banali di involuzioni sopra anelli sono relativamente pochi. Abbiamo quindi pensato di predisporre una tecnica per costruire e studiare meno classici esempi concreti particolarizzando le costruzioni di [2], ove abbiamo dato una tecnica per costruire involuzioni a partire da funzioni φ, $\bar{\varphi}$ soddisfacenti opportune condizioni. Esaminando, per esempio in [3], i risultati relativi agli anelli con involuzione e le loro applicazioni, appare evidente l'importanza dell'involuzione simplettica sull'anello R delle matrici di ordine due su un campo. Osservato che se j è l'involuzione simplettica sull'anello R suddetto, allora $\bar{\varphi}$ è un omomorfismo di Lie di R e che se invece j è l'identità su un anello (e dunque l'anello considerato è commutativo) allora $\bar{\varphi}$ è una derivazione di Lie di tale anello, qui proseguiamo [2] esaminando i casi particolari in cui $\bar{\varphi}$ è un omomorfismo o una derivazione di Lie di un anello R. Tali involuzioni potranno, in un certo senso, essere viste come generalizzazioni dell'involuzione simplettica e dell'identità. In particolare si mostra (Th. 2) che se j è un'involuzione su un anello R, la funzione $\bar{\varphi}$ è un omomorfismo di Lie se e solo se $S \subseteq Z$ (ove S è l'insieme degli elementi di R simmetrici rispetto alla j e Z il centro di R).

Si caratterizzano poi le derivazioni (antiderivazioni) φ ($\bar{\varphi}$) tali che la $j(x) = x + \varphi(x)$ $\big(j(x) = -x + \bar{\varphi}(x)\big)$ sia un automorfismo involutorio (involuzione) dell'anello R (Th. 4, 5).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A.(C.N.R.). — Ricevuto: 24-XI-1980.

Dopo aver stabilito collegamenti fra le funzioni di Lie introdotte (Th. 6, 7), si dimostra che se j è un'involuzione su un anello R, la funzione $\bar{\varphi}$ che genera j (nel senso di [2]) è una derivazione di Lie di R se e solo se S è un ideale di Lie di R (Th. 8). Infine si stabilisce che un'involuzione j su un anello R semiprimo è generata da una derivazione di Lie $\bar{\varphi}$ se e solo se $\bar{\varphi}$ è un omomorfismo di Lie di R.

2 - Generalità

Sia R un anello; si dice *involuzione* su R ogni automorfismo j di ordine due del gruppo additivo $[R; +]$ tale che $j(xy) = j(y)j(x)$ $\forall x, y \in R$.

Per le notazioni e le definizioni principali ci riferiremo senz'altro al testo di Herstein [3]; in particolare, dato un anello R indichiamo con Z il suo centro e con R^2 il sottoanello generato da $R^{(2)} = \{xy \,|\, x, y \in R\}$. Inoltre *in tutto il lavoro R indicherà un anello privo di torsione due.*

In [2] abbiamo già osservato (ora ci riferiremo agli anelli anzichè ai quasi-anelli) che esiste un'involuzione j su un anello R se e solo se esiste un omomorfismo additivo φ: $R \to A \subseteq R$ tale che

(1) $\varphi(x) = -2x$ se e solo se $x \in A$;

(2) $\varphi(xy) = -xy + yx + y\varphi(x) + \varphi(y)x + \varphi(y)\varphi(x)$.

Anzi le involuzioni j su R sono tutte e sole le funzioni definite dalla $j(x) = x + \varphi(x)$.

Dall'esistenza delle funzioni φ di cui sopra segue l'esistenza delle funzioni $\bar{\varphi}$: $R \to B \subseteq R$ definite dalla $\bar{\varphi}(x) = 2x + \varphi(x)$ e si ha ancora che le involuzioni j su R sono tutte e sole le funzioni definite dalla $j(x) = -x + \bar{\varphi}(x)$.

Quando φ e $\bar{\varphi}$ sono definite come sopra, parleremo di involuzioni j generate da φ o da $\bar{\varphi}$.

Esaminando i risultati relativi agli anelli con involuzione (cfr. ad es. [3]) si vede l'importanza dell'involuzione simplettica sugli anelli di matrici di ordine due su un campo; si tratta precisamente, ricordiamo, della funzione j: $R \to R$ definita da

$$j\colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

che è generata dalla funzione $\bar{\varphi}$ definita dalla

$$\bar{\varphi}\colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}.$$

Ebbene in questo caso la funzione $\bar{\varphi}$ è un omomorfismo di Lie, secondo una definizione, per esempio, di [4], definizione che qui riportiamo per comodità del lettore: un *omomorfismo* (o un *antiomomorfismo*) *di Lie* Φ di un anello R in un anello R' è un omomorfismo additivo $\Phi\colon R \to R'$ tale che $\Phi(xy - yx) = \Phi(x)\Phi(y) - \Phi(y)\Phi(x)$ (oppure $\Phi(xy - yx) = \Phi(y)\Phi(x) - \Phi(x)\Phi(y)$).

Dato un anello R, si può considerare l'*anello di Lie* ad esso associato: più precisamente la struttura $R_L = [R; +, [\,]]$ ove si pone $[x, y] = xy - yx$ $\forall x, y \in R$.

Pertanto un omomorfismo (o un antiomomorfismo) di Lie di R in R' risulta un omomorfismo (o un antiomomorfismo) di R_L in R'_L. In questo lavoro si studiano le condizioni affinchè una funzione di Lie (omomorfismo, antiomomorfismo, derivazione o antiderivazione di Lie) generi, nel senso poco sopra precisato, una involuzione su un anello, generalizzando così la situazione che si presenta nel caso delle involuzioni simplettiche.

Sia R un anello con involuzione j; ricordiamo (cfr. [3]) che si indica con S l'insieme degli elementi di R simmetrici rispetto a j e con K l'insieme degli elementi emisimmetrici. Si osservi che se R è un anello con involuzione j generata da φ o da $\bar{\varphi}$, si ha $\varphi(R) \subseteq K$ e $\bar{\varphi}(R) \subseteq S$; inoltre è $\varphi(x) = 0$ se e solo se $x \in S$, e $\bar{\varphi}(x) = 0$ se e solo se $x \in K$.

Quanto precede permette di stabilire la

Osservazione 1. *Sia R un anello; valgono i seguenti fatti:*

(1) *una funzione $\bar{\varphi}\colon R \to R$ è un omomorfismo additivo tale che $\bar{\varphi}(\bar{\varphi}(x)) = 2\bar{\varphi}(x)$ se e solo se la funzione $\varphi\colon R \to R$ definita da $\varphi(x) = -2x + \bar{\varphi}(x)$ è un omomorfismo additivo con $\varphi(\varphi(x)) = -2\varphi(x)$;*

(2) *siano $\bar{\varphi}\colon R \to R$ e $\varphi\colon R \to R$ definita da $\varphi(x) = -2x + \bar{\varphi}(x)$ omomorfismi additivi; risulta $\operatorname{Im}\bar{\varphi} \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$ se e solo se $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\bar{\varphi}$;*

(3) *sia $\bar{\varphi}\colon R \to R$ un omomorfismo additivo con $\bar{\varphi}(\bar{\varphi}(x)) = 2\bar{\varphi}(x)$ e sia $\varphi\colon R \to R$ la funzione definita da $\varphi(x) = -2x + \bar{\varphi}(x)$: $\operatorname{Im}\bar{\varphi}$ ($\operatorname{Im}\varphi$) è commutativo se e solo se $\operatorname{Ker}\varphi$ ($\operatorname{Ker}\bar{\varphi}$) è commutativo.*

La verifica della (1) è banale.

Per la (2) se $\bar{\varphi}(x) \in \operatorname{Ker}\varphi$ si ha $\varphi(\bar{\varphi}(x)) = 0$ da cui $\bar{\varphi}(\bar{\varphi}(x)) = 2\bar{\varphi}(x)$; allora $\bar{\varphi}(\varphi(x)) = \bar{\varphi}(-2x + \bar{\varphi}(x)) = 0$ e quindi $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\bar{\varphi}$. In modo analogo si ha l'inverso.

Sia ora $y \in \operatorname{Im}\bar{\varphi}$; allora $y = \bar{\varphi}(x)$ e quindi $\varphi(y) = \varphi(\bar{\varphi}(x)) = -2\bar{\varphi}(x) + \bar{\varphi}(\bar{\varphi}(x)) = 0$ per cui $y \in \operatorname{Ker}\varphi$. Si osservi che $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \,|\, \bar{\varphi}(x) = 2x\}$; se,

$\forall x, y \in R$, $\bar{\varphi}(x)\bar{\varphi}(y) = \bar{\varphi}(y)\bar{\varphi}(x)$ segue, per $x, y \in \operatorname{Ker}\varphi$, $4xy = 4yx$ e quindi $xy = yx$ essendo R privo di torsione due. Analogamente si ha l'altra.

3 - Omomorfismi (antiomomorfismi) di Lie e involuzioni in un anello

Un primo collegamento fra involuzioni e omomorfismi di Lie di un anello R si ottiene utilizzando il seguente

Teorema 1. *Sia R un anello; un omomorfismo additivo $\bar{\varphi}\colon R \to R$ tale che $\bar{\varphi}(\bar{\varphi}(x)) = 2\bar{\varphi}(x)$ $(\forall x \in R)$ è un omomorfismo di Lie di R in sè e la funzione $j\colon R \to R$ definita da $j(x) = -x + \bar{\varphi}(x)$ è una involuzione di R_L in sè se e solo se $\bar{\varphi}(R) \subseteq Z$ e $\bar{\varphi}([R, R]) = 0$.*

Sia $\bar{\varphi}$ un omomorfismo di Lie di R in sè tale che $\bar{\varphi}(\bar{\varphi}(x)) = 2\bar{\varphi}(x)$ e sia $j(x) = -x + \bar{\varphi}(x)$ una involuzione di R_L in sè. Si ha $j([x, y]) = [y, x] + \bar{\varphi}([x, y]) = [y, x] + [\bar{\varphi}(x), \bar{\varphi}(y)]$ in virtù della definizione di j e del fatto che $\bar{\varphi}$ è un omomorfismo di Lie, ed inoltre $j([x, y]) = [j(y), j(x)] = [-y + \bar{\varphi}(y), -x + \bar{\varphi}(x)]$ perchè j è un antiomomorfismo di Lie. Ne segue

$$2\bar{\varphi}([x, y]) = [\bar{\varphi}(x), y] + [x, \bar{\varphi}(y)] . \tag{1}$$

Applicando $\bar{\varphi}$ ad ambo i membri della (1) si ha $\bar{\varphi}(x)\bar{\varphi}(y) = \bar{\varphi}(y)\bar{\varphi}(x)$ da cui segue

$$\bar{\varphi}([x, y]) = 0 . \tag{2}$$

Dalla (1), tenendo presente la (2), segue

$$[\bar{\varphi}(x), y] + [x, \bar{\varphi}(y)] = 0 . \tag{3}$$

Consideriamo ora la funzione $\varphi\colon R \to R$ definita dalla $\varphi(x) = -2x + \bar{\varphi}(x)$; dalle ipotesi fatte sulla $\bar{\varphi}$ risulta, per la Oss. 1 che φ è un omomorfismo additivo di R e che $\varphi(\bar{\varphi}(x)) = 0$.

Tenendo conto successivamente della (2) e della (3) otteniamo

$$(4)\quad \varphi([x, y]) = 2[y, x] , \qquad (5)\quad [\varphi(y), \varphi(x)] = 2\varphi([x, y]) .$$

Riscrivendo la (4) per $y = \bar{\varphi}(z)$, applicando a tale relazione la φ ad ambo i membri e tenendo presenti ancora la (4) e la (5) si ottiene

$$2[\bar{\varphi}(z), x] = 2\varphi([\bar{\varphi}(z), x]) = [\varphi(x), \varphi(\bar{\varphi}(z))] . \tag{6}$$

Dal fatto che $\varphi(\bar{\varphi}(z)) = 0$ e dalla (6) segue che $\bar{\varphi}(R) \subseteq Z$. L'inverso è ovvio.

Venendo al caso che ci interessa, dal Teorema 1 segue il

Teorema 2. *Una involuzione j su un anello R è generata da un omomorfismo $\bar{\varphi}$ di Lie di R in sè definito da $\bar{\varphi}(x) = x + j(x)$ se e solo se $S \subseteq Z$.*

Sia j un'involuzione su R: si ha banalmente che j è una involuzione di R_L e che la funzione $\bar{\varphi}$ risulta caratterizzata dal th. 3 di [2]; segue allora, con calcolo analogo a sopra, che se $\bar{\varphi}$ è un omomorfismo di Lie di R è $\bar{\varphi}(x)y = y\bar{\varphi}(x)$ $\forall x, y \in R$, e quindi, per $x \in S$, $2xy = 2yx$, per cui, essendo R privo di torsione due, $S \subseteq Z$. L'inverso è ovvio.

Una condizione di commutatività si ottiene col seguente

Teorema 3. *Sia R un anello; se la funzione $\bar{\varphi}$: $R \to R$ con $\bar{\varphi}(\bar{\varphi}(x)) = 2\bar{\varphi}(x)$ e la funzione j: $R \to R$ definita da $j(x) = -x + \bar{\varphi}(x)$ sono omomorfismi di Lie di R e $\bar{\varphi}(R) \subseteq Z$, allora l'anello R è commutativo.*

Siano $\bar{\varphi}$ e j omomorfismi di Lie dell'anello R in sè soddisfacenti le condizioni richieste; allora, essendo $j([x, y]) = [j(x), j(y)]$, risulta $[y, x] + [\bar{\varphi}(x), \bar{\varphi}(y)] = [-x + \bar{\varphi}(x), -y + \bar{\varphi}(y)]$, da cui, poichè $\bar{\varphi}(R) \subseteq Z$, è $2[x, y] = 0$ e quindi $xy = yx$ $\forall x, y \in R$.

4 - Involuzioni e derivazioni (antiderivazioni) di Lie in un anello

Ricordiamo che un omomorfismo additivo f di un anello R in sè si dice una *derivazione* se $f(xy) = f(x)y + xf(y)$, una *antiderivazione* se $f(xy) = yf(x) + f(y)x$ $\forall x, y \in R$.

Sia R un anello commutativo; allora l'identità $i(x) = x$ è una involuzione di R e la funzione $\bar{\varphi}(x) = x + i(x) = 2x$ risulta una derivazione di Lie di R, ma non una derivazione di R, secondo la definizione di $[4]_2$ che qui riportiamo per comodità del lettore. Precisamente si dice che una funzione α: $R \to R$ è una *derivazione* (*antiderivazione*) *di Lie* di un anello R se è una derivazione (antiderivazione) dell'anello di Lie R_L associato ad R. È ovvio che una derivazione (antiderivazione) di un anello R è anche una derivazione (antiderivazione) di Lie di R. Studiamo qui gli anelli con involuzioni generate da derivazioni di Lie; tali involuzioni possono essere viste come generalizzazioni dell'identità.

Iniziamo dal caso particolare che le derivazioni (antiderivazioni) di Lie di un anello R siano derivazioni (antiderivazioni) dell'anello, collegando le involuzioni (gli automorfismi involutori) di R con l'esistenza di antiderivazioni (derivazioni) di R. Precisamente abbiamo

Teorema 4. *Un anello R possiede una involuzione j rispetto alla quale $S^2 = 0$ e $2j(xy) = yx - xy$ se e solo se esiste una antiderivazione $\bar{\varphi}$: $R \to S \subseteq R$ tale che*

(1) $\bar{\varphi}(x) = 2x$ *se e solo se* $x \in S$,

(2) $2\bar{\varphi}(xy) = xy + yx$.

Le involuzioni su R con $S^2 = 0$ sono tutte e sole le funzioni j definite dalla $j(x) = -x + \bar{\varphi}(x)$.

Sia j un'involuzione di R soddisfacente le condizioni richieste; si prova subito che la funzione $\bar{\varphi}(x) = x + j(x)$ verifica la condizione (1) e che $2\bar{\varphi}(xy) = 2xy + yx - xy = xy + yx$; inoltre, poichè $j(xy) = j(y)j(x)$, risulta facilmente $2(y\bar{\varphi}(x) + \bar{\varphi}(y)x) = xy + yx = 2\bar{\varphi}(xy)$ e dunque $\bar{\varphi}$ è una antiderivazione.

Per l'inverso si osservi che se $\bar{\varphi}$ è una antiderivazione di R soddisfacente la (2) allora $\bar{\varphi}$ è anche una derivazione perchè $\bar{\varphi}(xy) = \bar{\varphi}(yx)$. Visto che risulta $\bar{\varphi}(xy) = x\bar{\varphi}(y) + \bar{\varphi}(x)y$, applicando $\bar{\varphi}$ ad ambo i membri della precedente relazione e tenendo presente che $\bar{\varphi}(\bar{\varphi}(x)) = 2\bar{\varphi}(x)$ si ha subito $(\bar{\varphi}(R))^2 = 0$. Da ciò e dalle ipotesi segue subito che $j(x) = -x + \bar{\varphi}(x)$ è una involuzione di R. Siano ora $x, y \in S$; allora risulta $\bar{\varphi}(x) = 2x$, $\bar{\varphi}(y) = 2y$ e pertanto si ha $4xy = 0$ da cui segue $xy = 0$ $\forall x, y \in S$ e quindi $S^2 = 0$.

È opportuno studiare, nello spirito del Teorema 4, anche gli automorfismi involutori di un anello. Si ha

Teorema 5. *Un anello R possiede un automorfismo involutorio j rispetto al quale è $K^2 = 0$ se e solo se esiste una derivazione φ: $R \to K \subseteq R$ tale che $\varphi(x) = -2x$ se e solo se $x \in K$. Gli automorfismi involutori di R con $K^2 = 0$ sono tutte e sole le funzioni j definite dalla $j(x) = x + \varphi(x)$.*

Sia j un automorfismo involutorio di R con $K^2 = 0$. Allora la funzione $\varphi(x) = -x + j(x)$ è tale che $\varphi(\varphi(x)) = -2\varphi(x)$ e dalla $j(xy) = j(x)j(y)$ discende $\varphi(xy) = x\varphi(y) + \varphi(x)y$.

Per l'inverso si osservi che se φ è una derivazione di R risulta $\varphi(xy) = \varphi(x)y + x\varphi(y)$; applicando φ ad ambo i membri e tenendo presente che $\varphi(\varphi(x)) = -2\varphi(x)$ si ottiene $-2\varphi(xy) = \varphi(\varphi(x)y) + \varphi(x\varphi(y))$ e dunque $-2\varphi(xy) = -2\varphi(x)y + \varphi(x)\varphi(y) + \varphi(x)\varphi(y) - 2x\varphi(y)$ da cui segue $\varphi(x)\varphi(y) = 0$ e cioè $(\varphi(R))^2 = 0$. Da ciò e dalle ipotesi segue subito che la funzione $j(x) = x + \varphi(x)$ è un automorfismo involutorio di R. Siano ora $x, y \in K$; allora $\varphi(x) = -2x$ e $\varphi(y) = -2y$; dunque $4xy = 0$ da cui $xy = 0$; ne segue che $K^2 = 0$.

Stabiliamo ora un collegamento fra gli operatori fin qui introdotti con i seguenti teoremi.

Teorema 6. *Sia R un anello; una funzione $\bar{\varphi}$: $R \to R$ con $\bar{\varphi}(\bar{\varphi}(x)) = 2\bar{\varphi}(x)$ e la funzione j: $R \to R$ definita da $j(x) = -x + \bar{\varphi}(x)$ sono omomorfismi di Lie di R se e solo se la funzione φ: $R \to R$ definita da $\varphi(x) = -2x + \bar{\varphi}(x)$ è una derivazione di Lie di R con $\varphi(\varphi(x)) = -2\varphi(x)$ e* Ker φ *commutativo.*

Siano $\bar{\varphi}$ e j omomorfismi di Lie di R con $\bar{\varphi}(\bar{\varphi}(x)) = 2\bar{\varphi}(x)$. Per la definizione di j risulta

$$[y, x] + [\bar{\varphi}(x), \bar{\varphi}(y)]$$

$$= xy - x\bar{\varphi}(y) - \bar{\varphi}(x)y + \bar{\varphi}(x)\bar{\varphi}(y) - yx + y\bar{\varphi}(x) + \bar{\varphi}(y)x - \bar{\varphi}(y)\bar{\varphi}(x)\,,$$

da cui

$$2[x, y] = [x, \bar{\varphi}(y)] + [\bar{\varphi}(x), y]\,. \tag{1}$$

Applicando $\bar{\varphi}$ ad ambo i membri di (1) e per le ipotesi fatte su $\bar{\varphi}$ si ha $2[\bar{\varphi}(x), \bar{\varphi}(y)] = 2[\bar{\varphi}(x), \bar{\varphi}(y)] + 2[\bar{\varphi}(x), \bar{\varphi}(y)]$, donde, essendo R privo di torsione due

$$[\bar{\varphi}(x), \bar{\varphi}(y)] = 0 \tag{2}$$

e quindi $\bar{\varphi}([x, y]) = 0$.

Si consideri ora la funzione φ: $R \to R$ definita da $\varphi(x) = -x + \bar{\varphi}(x)$; risulta $\varphi([x, y]) = 2[y, x]$ e, per la Oss. 1 dalla (2) segue che Ker φ è commutativo. Si ha poi $[\varphi(x), \varphi(y)] = 0$; infatti

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = [-2x + \bar{\varphi}(x), -2y + \bar{\varphi}(y)] = 4xy - 2x\bar{\varphi}(y) - 2\bar{\varphi}(x)y + \bar{\varphi}(x)\bar{\varphi}(y)$$
$$- 4xy + 2y\bar{\varphi}(x) + 2\bar{\varphi}(y)x - \bar{\varphi}(y)\bar{\varphi}(x) = 4xy - 4yx + 4yx - 4xy = 0$$

per (1) e (2).

Inoltre dalla (1) segue $2[x, y] = [x, 2y + \varphi(y)] + [2x + \varphi(x), y]$ e quindi $[\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)] = 2[y, x] = \varphi([x, y])$, cioè φ è derivazione di Lie. Sia ora φ: $R \to R$ una derivazione di Lie con $\varphi(\varphi(x)) = -2\varphi(x)$ e Ker φ commutativo. Si consideri la funzione $\bar{\varphi}(x) = 2x + \varphi(x)$; si ha

$$\bar{\varphi}([x, y]) = 2[x, y] + [\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)]\,. \tag{3}$$

D'altra parte, essendo Ker φ commutativo, per la Oss. 1 è $0 = [\bar{\varphi}(x), \bar{\varphi}(y)] = [2x + \varphi(x), 2y + \varphi(y)] = 4[x, y] + 2[\varphi(x), y] + 2[x, \varphi(y)]$ e quindi, essendo R privo di torsione due,

$$[\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)] = 2[y, x]\,, \tag{4}$$

da cui $\bar{\varphi}([x, y]) = 0$.

Inoltre per la (4) si ha che la funzione $j(x) = x + \varphi(x)$ è tale che $j([x, y]) = [y, x] = [j(x), j(y)]$.

Teorema 7. *Sia R un anello e $A \subseteq R$ il sottoanello di torsione* 3; *una funzione φ: $R \to A$ con $\varphi(\varphi(x)) = -2\varphi(x)$ è un omomorfismo di Lie con nucleo commutativo se e solo se la funzione $\bar{\varphi}$: $R \to R$ definita da $\bar{\varphi}(x) = 2x + \varphi(x)$ è una derivazione di Lie tale che $\bar{\varphi}(\bar{\varphi}(x)) = 2\bar{\varphi}(x)$ e $\operatorname{Ker}\bar{\varphi} \subseteq A$ e la j: $R \to R$ definita da $j(x) = -x + \bar{\varphi}(x)$ è una involuzione di R_L.*

Sia φ: $R \to A \subseteq R$ un omomorfismo di Lie soddisfacente alle condizioni richieste. La funzione $\bar{\varphi}(x) = 2x + \varphi(x)$ è un omomorfismo additivo con $\bar{\varphi}(\bar{\varphi}(x)) = 2\bar{\varphi}(x)$ e $\operatorname{Im}\bar{\varphi}$ commutativo. Inoltre $\operatorname{Ker}\bar{\varphi} \subseteq A$; infatti se $x \in \operatorname{Ker}\bar{\varphi}$ è $\varphi(x) = -2x$ e poichè $\varphi(x) \in A$ risulta $3\varphi(x) = 0$, cioè $-6x = 0$ da cui, essendo R privo di torsione due, $3x = 0$. Si ha ora $0 = [\bar{\varphi}(x), \bar{\varphi}(y)] = [2x + \varphi(x), 2y + \varphi(y)] = 4[x, y] + 2[\varphi(x), y] + 2[x, \varphi(y)] + [\varphi(x), \varphi(y)]$, da cui, essendo $[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y]) \in A$, risulta

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 2[x, y] + [\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)]. \tag{1}$$

Tenendo conto di (1) si ha

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}([x, y]) &= 2[x, y] + \varphi([x, y]) = 2[x, y] + [\varphi(x), \varphi(y)] \\ &= 4[x, y] + [\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)]\,; \end{aligned} \tag{2}$$

d'altra parte

$$\begin{aligned} [\bar{\varphi}(x), y] + [x, \varphi(y)] &= [2x + \varphi(x), y] + [x, 2y + \varphi(y)] \\ &= 4[x, y] + [\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)]. \end{aligned} \tag{3}$$

Confrontando (2) con (3) si ha $\bar{\varphi}([x, y]) = [\bar{\varphi}(x), y] + [x, \bar{\varphi}(y)]$. Infine la funzione $j(x) = -x + \bar{\varphi}(x)$ risulta involutoria per definizione e $j([x, y]) = [j(y), j(x)]$.

Inversamente sia $\bar{\varphi}$: $R \to R$ una derivazione di Lie con $\bar{\varphi}(\bar{\varphi}(x)) = 2\bar{\varphi}(x)$ e $\operatorname{Ker}\bar{\varphi} \subseteq A$ e sia $j(x) = -x + \bar{\varphi}(x)$ una involuzione di R_L.

Si consideri la funzione $\varphi(x) = -2x + \bar{\varphi}(x)$; per la Oss. 1 si ha $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\bar{\varphi} \subseteq A$ e φ è un omomorfismo additivo da R ad A. Inoltre dalla $j([x, y]) = [j(y), j(x)]$ segue $[\bar{\varphi}(y), \bar{\varphi}(x)] = 0$ e dunque $\operatorname{Im}\bar{\varphi}$ è commutativo; la Oss. 1 assicura allora che $\operatorname{Ker}\varphi$ è commutativo. Risulta infine, tenendo anche presente che $3A = 0$,

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)] &= [-2x + \bar{\varphi}(x), -2y + \bar{\varphi}(y)] = 4[x, y] - 2[\bar{\varphi}(x), y] - 2[x, \bar{\varphi}(y)] \\ &= -4[y, x] + 2\bar{\varphi}([y, x]) = 2\varphi([y, x]) = -\varphi([y, x]) = \varphi([x, y]), \end{aligned}$$

per cui φ è un omomorfismo di Lie di R.

Esaminiamo ora il caso di un anello R con involuzione j generata da una derivazione di Lie di R. Premettiamo la

Osservazione 2. *Sia R un anello con involuzione j; la funzione $\bar{\varphi}$: $R \to S \subseteq R$ $(\bar{\varphi}(x) = -x + j(x))$ è una derivazione di Lie di R se e solo se S è commutativo.*

Sia $\bar{\varphi}$: $R \to S \subseteq R(\bar{\varphi}(x) = -x + j(x))$ una derivazione di Lie di R; poichè j è involuzione segue $\bar{\varphi}(x)\bar{\varphi}(y) = \bar{\varphi}(y)\bar{\varphi}(x)$; in particolare se $x, y \in S$ si ha $4xy = 4yx$ e quindi, essendo R privo di torsione 2, $xy = yx$ per cui S è commutativo.

L'inverso segue ricordando (cfr. th. 3 di [2]) che $\bar{\varphi}(xy) = xy + yx - y\bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(y)x + \bar{\varphi}(y)\bar{\varphi}(x)$.

Si ha ora il

Teorema 8. *Sia R un anello con involuzione j; la funzione $\bar{\varphi}$: $R \to S \subseteq R(\bar{\varphi}(x) = -x + j(x))$ è una derivazione di Lie di R se e solo se S è un ideale di Lie di R.*

Sia $\bar{\varphi}$: $R \to S \subseteq R$ una derivazione di Lie; per la Oss. 2 S è commutativo e si ha $\bar{\varphi}([\bar{\varphi}(x), y]) = [\bar{\varphi}(\bar{\varphi}(x)), y] + [\bar{\varphi}(x), \bar{\varphi}(y)] = 2[\bar{\varphi}(x), y]$ per cui $[\bar{\varphi}(x), y] \in S$, $\forall x, y \in R$; in particolare se $x \in S$ è $\bar{\varphi}([2x, y]) = 2\bar{\varphi}([x, y]) = 4[x, y]$ da cui $[x, y] \in S$.

Viceversa se S è un ideale di Lie di R si ha $\forall x \in R$, $\forall s \in S$, $[s, x] \in S$; allora

$$\bar{\varphi}([s, x]) = 2[s, x]. \tag{1}$$

D'altra parte, poichè j è involuzione (cfr. th. 3 di [2]),

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}([s, x]) &= sx + xs - x\bar{\varphi}(s) - \bar{\varphi}(x)s + \bar{\varphi}(x)\bar{\varphi}(s) - xs - sx \\ &\qquad + s\bar{\varphi}(x) + \bar{\varphi}(s)x - \bar{\varphi}(s)\bar{\varphi}(x) \\ &= -2xs - \bar{\varphi}(x)s + 2\bar{\varphi}(x)s + s\bar{\varphi}(x) + 2sx - 2s\bar{\varphi}(x) = 2[s, x] + [\bar{\varphi}(x), s].\end{aligned} \tag{2}$$

Confrontando (1) con (2) si ha $[\bar{\varphi}(x), s] = 0$ e quindi, se $x \in S$, $xs = sx$ per cui S è commutativo e, per la Oss. 2, $\bar{\varphi}$ è una derivazione di Lie di R.

Il Th. 8 permette infine di dimostrare il

Corollario 1. *Sia R un anello semiprimo con involuzione j; la funzione $\bar{\varphi}$: $R \to S \subseteq R(\bar{\varphi}(x) = -x + j(x))$ è una derivazione di Lie di R se e solo se è un omomorfismo di Lie di R.*

Sia $\bar{\varphi}$: $R \to S \subseteq R$ una derivazione di Lie di R; allora S è sottoanello perchè commutativo e anche un ideale di Lie (Oss. 2). Ricordando (cfr. th. 2.1.2 di [3]) che se R è un anello semiprimo privo di torsione due e un sottoinsieme A è sia un sottoanello che un ideale di Lie di R ed è commutativo, allora $A \subseteq Z$, si ha che $S \subseteq Z$ e quindi (Th. 2) $\overline{\varphi}$ è un omomorfismo di Lie di R. L'inverso si mostra in modo analogo.

Bibliografia

[1] C. Ferrero Cotti, *Sulle involuzioni di certi stems*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **7** (1981), 89-104.

[2] C. Ferrero Cotti e A. Modena Suppa, *Sugli stems con involuzione*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **7** (1981), 117-126.

[3] I. N. Herstein, *Rings with involutions*, Chicago Lectures in Math., Univ. of Chicago Press, Chicago 1976.

[4] W. S. Martindale, 3rd: $[\bullet]_1$ *Lie isomorphisms of primitive rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 909-916; $[\bullet]_2$ *Lie derivations of primitive rings*, Mich. Math. J. **11** (1964), 183-187; $[\bullet]_3$ *Lie isomorphisms of prime rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **142** (1969), 437-455; $[\bullet]_4$ *A note on Lie isomorphisms*, Canad. Math. Bull. **17** (1974), 243-245; $[\bullet]_5$ *Lie isomorphisms of the skew elements of a prime ring with involution*, Comm. Algebra (10) **4** (1976), 929-977.

Summary

In this paper we study rings with involutions generated by a Lie function (homomorphism, derivation or antiderivation). In particular we prove that in a ring R an involution j is generated by a Lie homomorphism iff $S \subseteq Z$ and by a Lie derivation iff S is a Lie ideal of R.

Lastly we establish that in a semiprime ring R an involution j is generated by a Lie derivation $\bar{\varphi}$ iff $\bar{\varphi}$ is a Lie homomorphism of R.

* * *