Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 175-181

LORIS MOLINARI (*)

Trasformazioni puntuali e varietà di Segre (**)

1 – Fra le ricerche sulle trasformazioni puntuali fra due spazi lineari $S_r\,\bar{S}_r$ ($r\geqslant 2$) ve ne sono alcune che riguardano la rappresentazione di nozioni relative a una trasformazione puntuale T sulla V_r^T che rappresenta la T sulla varietà di Segre V_{2r} immagine delle coppie di punti di S_r, $\bar{S}_r$.

Fra i risultati più importanti citeremo il seguente [**5**]: « Tutte e sole le coppie di curve caratteristiche corrispondenti in T sono rappresentate sulla V_r^T dalle curve quasi-asintotiche a tre indici $\gamma_{1,2,3}$ di $V_r^T \subset V_{2r}$ ».

Questa Nota si inserisce nel genere di ricerche suddetto. In essa vengono caratterizzate sulla V_r^T:

(a) la condizione necessaria e sufficiente affinchè in una coppia regolare $(O, \bar{O})$ di punti corrispondenti in una trasformazione puntuale T fra due spazi lineari S_r, $\bar{S}_r$ esista una coppia di elementi del 1° ordine E_1, $\bar{E}_1$ caratteristici di specie i ($i\geqslant 1$) e corrispondenti in T (n. **2**);

(b) la condizione necessaria e sufficiente affinchè in $(O, \bar{O})$ esista una coppia di elementi E_1, $\bar{E}_1$ come al punto (a) (con $i\geqslant 2$) e affinchè la corrispondenza subordinata sulle tangenti t e t' in O, $\bar{O}$ ad E_1, $\bar{E}_1$ sia approssimata dalla relativa proiettività caratteristica fino all'intorno di ordine i di $(O, \bar{O})$ (n. **3**);

(c) la nozione di coppia di superficie caratteristiche Σ ($\bar{\Sigma}$) corrispondenti in una trasformazione puntuale fra S_3, $\bar{S}_3$ nel caso in cui Σ ($\bar{\Sigma}$) sia inviluppo di giaciture caratteristiche contenenti un fascio oppure tre sole direzioni caratteristiche (n. **4**).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Applicata, Università, Via Vallescura 2, 40136 Bologna, Italy.

(**) Ricevuto: 2-IX-1980.

2 – Date in S_r, $\bar{S}_r$ due curve $\mathscr{C}$, $\bar{\mathscr{C}}$ corrispondenti in una trasformazione puntuale T, supponiamo che i loro elementi differenziali del 1° ordine E_1, $\bar{E}_1$ siano caratteristici di specie i $(i \geqslant 1)$ per la T.

Se V_r^T è la varietà che rappresenta la T sulla varietà V_{2r} di Segre immagine delle coppie di punti di S_r, $\bar{S}_r$, indichiamo con O' e $\mathscr{C}'$ il punto e la curva che rappresentano $(O, \bar{O})$ e $(\mathscr{C}, \bar{\mathscr{C}})$ rispettivamente sulla V_r^T.

Proposizione 1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè gli elementi* E_1, $\bar{E}_1$ *siano caratteristici di specie* i $(i \geqslant 1)$ *per* T *è che* $\mathscr{C}'$ *abbia in* O' *un contatto di ordine* $i+2$ *con lo spazio* S *congiungente l'*S_{2r} *tangente in* O' *alla* V_{2r} *e l'*$S(2)$ *osculatore in* O' *alla* V_r^T.

Dim. Assumendo O ed $\bar{O}$ come origini dei riferimenti proiettivi in $S_r(x_1, x_2, \dots, x_r)$ e $\bar{S}_r(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r)$ (riferimenti che supporremo si corrispondano in una qualunque omografia tangente in $(O, \bar{O})$ alla T) le equazioni delle T stessa si scrivono

$$\bar{x}_j = x_j + f_2^j + f_3^j + \dots + f_{i+2}^j + [i+3] \qquad (j = 1, 2, \dots, r), \tag{1}$$

dove le f_p^j $(p = 2, 3, \dots, i+2;\ j = 1, 2, \dots, r)$ sono forme di grado p nelle $x_1, x_2, \dots, x_r$.

Consideriamo ora una curva $\mathscr{C}$ di S_r il cui elemento differenziale E_1 di centro O e del 1° ordine sia inflessionale di specie i. Se $x_2 = x_3 = \dots = x_r = 0$ è la tangente t all'E_1 (cioè la retta che lo contiene) le equazioni di $\mathscr{C}$ sono

$$x_k = u_k x^{i+2} + \dots \qquad (k = 2, 3, \dots, r). \tag{2}$$

Alla $\mathscr{C}$ corrisponde in T la curva $\bar{\mathscr{C}}$ di equazioni

$$\bar{x}_1 = x_1 + \sum_{q=2}^{i+2} a_q^1 x^q + \dots, \quad \bar{x}_k = \sum_{q=2}^{i+1} a_q^k x^q + (u_k + a_{i+2}^k) x^{i+2} + \dots \qquad (k = 2, 3, \dots, r), \tag{3}$$

dove si è posto

$$a_q^j = f_q^j(1, 0, \dots, 0) \qquad (q = 2, 3, \dots, i+2;\ \ j = 1, 2, \dots, r). \tag{4}$$

Indicate con X_{hk} le coordinate proiettive omogenee dell'$S_{r(r+2)}$ in cui è immersa la V_{2r} di Segre, le equazioni della V_{2r} stessa risultano

$$X_{00} = 1, \quad X_{h0} = x_h, \quad X_{0k} = \bar{x}_k, \quad X_{hk} = x_h \bar{x}_k \qquad (h, k = 1, 2, \dots, r). \tag{5}$$

Lo spazio S congiungente l'S_{2r} tangente in O' alla V_{2r} di Segre e l'$S(2)$ osculatore in O' alla V_r^T, come si vede subito, ha le equazioni $X_{hk} = X_{kh}$ $(h, k = 1, 2, \dots, r;\ h \neq k)$.

D'altronde per ottenere le equazioni della curva $\mathscr{C}'$ basta sostituire le (2) e (3) nelle (5); si trova facilmente che i punti derivati 3°, 4°, ..., $(i+2)$-mo della $\mathscr{C}'$ relativi ad O' appartengono ad S se e solo se risulta

$$a_2^k = a_3^k = \dots = a_{i+1}^k = 0 \qquad (k = 2, 3, \dots, r)\,. \tag{6}$$

Ma le (6), ove si tenga conto delle (4), sono anche le condizioni necessarie e sufficienti affinchè gli elementi $E_1, \bar{E}_1$, aventi i centri in $O, \bar{O}$, delle curve $\mathscr{C}, \bar{\mathscr{C}}$, siano caratteristici di specie i per T.

Osservazione. Nel caso in cui i punti derivati 3°, ..., h-mo di $\mathscr{C}'$ rispetto ad O' appartengano ad S, non accade necessariamente che sia contenuto in S l'$S(h)$ osculatore in O' alla $\mathscr{C}'$, in quanto, come risulterà dalla Prop. 2, questo ultimo spazio può risultare indeterminato.

3 – È ben noto che due direzioni caratteristiche corrispondenti in T e relative ad una coppia regolare $(O, \bar{O})$ sono in generale inflessionali di 1ª specie soltanto. Inoltre sussiste la proprietà che la corrispondenza subordinata sulle tangenti in O ed $\bar{O}$ alle due direzioni è osculata dalla relativa proiettività caratteristica. Non è però difficile trovare esempi (come una generica trasformazione di 2ª o 3ª specie fra due piani, cfr. [3], oppure come caso limite una qualunque trasformazione di De-Jonquières sempre fra due piani) in cui in $(O, \bar{O})$ esistono due elementi $E_1, \bar{E}_1$ caratteristici di specie superiore alla 1ª mentre la corrispondenza subordinata fra le tangenti ad $E_1, \bar{E}_1$ è iperosculata in $(O, \bar{O})$ dalla relativa proiettività caratteristica (potendo tale corrispondenza essere addirittura essa stessa una proiettività). Questo particolare tipo di configurazione è caratterizzato nella seguente proposizione.

Proposizione 2. *Due elementi caratteristici del 1° ordine, E_1 ed $\bar{E}_1$, relativi ad $(O, \bar{O})$ e di specie i $(i \geqslant 2)$ sono corrispondenti in T e inoltre la corrispondenza subordinata da T sulle tangenti in $O, \bar{O}$ ad $E_1, \bar{E}_1$ è approssimata dalla relativa proiettività caratteristica fino all'intorno di ordine $i+1$ di $(O, \bar{O})$ se e solo se l'$S(2)$ osculatore in O' alla curva $\mathscr{C}'$ ha in O' un contatto di ordine $i+1$ con la $\mathscr{C}'$ stessa.*

Dim. Consideriamo infatti la curva $\mathscr{C}$, di equazioni (2), il cui elemento differenziale curvilineo E di centro O è inflessionale di specie i e la curva corrispondente $\bar{\mathscr{C}}$ di equazioni (3). Le tangenti t, t' alle $\mathscr{C}, \bar{\mathscr{C}}$ in $O, \bar{O}$ sono rispettivamente $x_2 = x_3 = \ldots = x_r = 0$, $\bar{x}_2 = \bar{x}_3 = \ldots = \bar{x}_r = 0$. Come si trova facilmente, l'$S(2)$ osculatore in O' alla curva $\mathscr{C}'$ immagine di $(\mathscr{C}, \overline{\mathscr{C}})$ sulla V_{2r} di Segre ha le seguenti equazioni

$$(7) \quad \begin{aligned} &X_{hk} = 0 \ \big(h, k = 1, 2, \ldots, r;\ (h, k) \neq (1, 1)\big)\,, && X_{h0} = 0 \ (h = 2, 3, \ldots, r)\,, \\ &X_{0k} - a_2^k X_{11} = 0 \ (k = 2, 3, \ldots, r)\,, && X_{10} - X_{01} + a_2^1 X_{11} = 0\,. \end{aligned}$$

Ora i punti derivati 3°, 4°, ..., $(i+1)$-mo di O' rispetto a $\mathscr{C}'$ appartengono allo spazio (7) se e solo se risultano verificate le (6) (con $i \geqslant 2$) e se e solo se risulta inoltre

$$(8) \qquad a_3^1 = (a_2^1)^2\,, \quad a_4^1 = (a_2^1)^2\,, \ \ldots, \ a_{i+1}^1 = (a_2^1)^2\,.$$

Ma le (6) sono anche, come già detto, le condizioni necessarie e sufficienti affinchè in $(O, \bar{O})$ esista una coppia di elementi caratteristici E_1, $\bar{E}_1$ corrispondenti e di specie i, mentre le (8) sono anche le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la corrispondenza subordinata dalla T sulle tangenti t, t' in O, $\bar{O}$ ad E_1, $\bar{E}_1$ sia approssimata dalla relativa proiettività caratteristica fino all'intorno di ordine i di $(O, \bar{O})$.

4 – Nel caso $r = 3$ sussiste, per le superficie caratteristiche di una trasformazione puntuale T fra S_3, $\bar{S}_3$, il seguente risultato (cfr. [**2**]), analogo a quello (citato nel n. **1**) relativo alle curve caratteristiche: « Una coppia di superficie caratteristiche corrispondenti in una trasformazione T dà luogo sulla V_3^T rappresentativa di T sulla V_6 di Segre ad una superficie quasi-asintotica $\sigma_{1,2,3}$ di $V_3^T \subset V_6$, e viceversa ».

In questo numero ci proponiamo di precisare questo risultato.

Se T è una trasformazione puntuale fra S_3, $\bar{S}_3$ sia $\sigma \in S_3$ una calotta piana del 2° ordine di centro O e $\bar{\sigma} \in \bar{S}_3$ la calotta del 2° ordine di centro $\bar{O}$ corrispondente a σ. Indichiamo quindi con O_1' e σ' il punto e la calotta rappresentativi di $(O, \bar{O})$ e $(\sigma, \bar{\sigma})$ sulla V_3^T. Nel caso in cui lo spazio S_h' congiungente l'S_6 tangente in O_1' alla V_6, l'$S(2)$ osculatore in O_1' alla V_3^T e l'$S(3)$ osculatore in O' a σ' abbia dimensione h minore dell'ordinaria, il numero h può assumere i valori 12, 13 o 14.

Proposizione 3. *La dimensione di* S_h' *è*

(a) $h = 12$, *se e solo se la giacitura di* σ $(\bar{\sigma})$ *contiene un fascio di direzioni caratteristiche per* O $(\bar{O})$,

(b) $h = 13$, *se e solo se la giacitura (caratteristica) di* σ ($\bar{\sigma}$) *contiene solo tre direzioni caratteristiche per* O ($\bar{O}$),

(c) $h = 14$, *se e solo se la giacitura di* σ ($\bar{\sigma}$) *contiene solo due direzioni caratteristiche per* O ($\bar{O}$).

Dim. Siano infatti

$$(9) \qquad \bar{x}_i = x_i + \sum_{p,q=1}^{3} a^i_{pq} x_p x_q + [3] \qquad (i = 1, 2, 3),$$

le equazioni della T. Alla calotta piana σ del 2º ordine, di centro O e avente come giacitura quella di equazione $x_3 = 0$, corrisponde la calotta $\bar{\sigma}$ di equazioni

$$(10) \qquad \bar{x}_j = x_j + \sum_{p,q=1}^{2} a^j_{pq} x_p x_q, \qquad \bar{x}_3 = a^3_{11} x_1^2 + 2a^3_{12} x_1 x_2 + a^3_{22} x_2 \qquad (j = 1, 2).$$

Consideriamo ora nell'S_{15} la V_6 di Segre di equazioni (5) (dove ora è $h, k = 0, 1, 2, 3$). Le equazioni della V_3^T e di σ' si ottengono sostituendo nelle (5) le (9) e (10) rispettivamente. Se M è la matrice le cui colonne hanno per elementi le coordinate omogenee di O_1' (immagine di $(O, \bar{O})$), dei punti derivati primi, secondi e terzi, relativi ad O_1', rispettivamente della V_6, della V_3^T e della σ', risulta $h = 12, 13, 14$ a seconda che il rango di M sia rispettivamente 13, 14, 15, cioè, come si trova facilmente, a seconda che il rango della matrice

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{11} & 2a_{12} & a_{22} \\ 1 & b_{11} & 2b_{12} & b_{22} & 0 \\ 0 & c_{11} & 2c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} & 2c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

sia rispettivamente 1 oppure 2 oppure 3. Si trova così che:

(a) M' ha rango 1 se e solo se risulta

$$(11) \qquad c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0,$$

$$(12) \qquad a_{22} = b_{11} = 0, \qquad a_{11} = 2b_{12}, \qquad b_{22} = 2a_{12},$$

cioè se e solo se la giacitura di σ ($\bar{\sigma}$) contiene un fascio di direzioni caratteristiche per O ($\bar{O}$);

(b) M' ha rango 2 se e solo se sono verificate le (11) ma non tutte le (12), cioè se e solo se la giacitura di σ ($\bar{\sigma}$) è caratteristica e contiene solo tre direzioni caratteristiche per O ($\bar{O}$) (eventualmente non tutte distinte);

(c) M' ha rango 3 se e solo se non sono verificate tutte le (11) e se risulta

$$(13)\qquad \begin{gathered} b^2_{11}\, a^3_{22} \neq 0\,, \qquad a^2_{11}(a^3_{22})^2 - 2a^1_{22}\, a^3_{11}\, a^3_{12} + (2a^1_{12} - a^2_{22})\, a^3_{11}\, a^3_{22} = 0\,, \\ a^1_{22}(a^3_{11})^2 - 2a^2_{11}\, a^3_{12}\, a^3_{22} + (2a^2_{12} - a^1_{11})\, a^3_{11}\, a^3_{12} = 0\,, \end{gathered}$$

oppure

$$(14)\qquad a^2_{11} = a^3_{11} = 0\,, \qquad 4a^1_{22}(a^3_{12})^2 + 2(a^2_{22} - 2a^1_{12})\, a^3_{12}\, a^3_{22} - (2a^2_{12} - a^1_{11})(a^3_{22})^2 = 0\,,$$

oppure

$$(15)\qquad a^1_{22} = a^3_{22} = 0\,, \qquad 4a^2_{11}(a^3_{12})^2 + 2(a^1_{11} - 2a^2_{12})\, a^3_{11}\, a^3_{12} - (2a^1_{12} - a^2_{22})(a^3_{11})^2 = 0\,.$$

Si verifica subito che la giacitura di σ ($\bar{\sigma}$) contiene due sole direzioni caratteristiche se e solo se sono verificate le (13) oppure le (14) oppure le (15).

Proposizione 4. *Una coppia di superficie caratteristiche Σ ($\bar{\Sigma}$) corrispondenti in una trasformazione puntuale T fra due spazi proiettivi S_3, $\bar{S}_3$ è rappresentata sulla V^T_3 da una superficie quasi-asintotica $\sigma_{1,2,3}$ a tre indici di $V^T_3 \subset V_6$ e di 2ª o 3ª specie a seconda che Σ ($\bar{\Sigma}$) sia inviluppo di giaciture (caratteristiche) contenenti 3 oppure un fascio di direzioni caratteristiche per O ($\bar{O}$) e viceversa.*

Dim. Segue immediatamente dalla Proposizione 3.

Bibliografia

[1] L. Cavalieri D'Oro, *Sulla rappresentazione delle curve 2-caratteristiche corrispondenti in una trasformazione puntuale sulla varietà di Segre*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) 4 (1971), 962-967.

[2] L. Muracchini, *Alcune proprietà in grande delle trasformazioni puntuali fra spazi*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 7 (1952), 123-131.

[3] G. VAONA, *Sulle trasformazioni puntuali di 2ª e 3ª specie fra piani proiettivi*, Atti IV Congr. Un. Mat. Ital. (1951), Perrella, Roma (1953), 449-454.

[4] M. VILLA: [•]$_1$ *Superficie della V_4^6 di Segre e relative trasformazioni puntuali*, Mem. Accad. Sci., Bologna (9) **7-10** (1940-43), 133-144; [•]$_2$ *Sulle trasformazioni puntuali fra due o più spazi proiettivi*, Atti del Convegno Internazionale di Geometria differenziale, Zanichelli, Bologna, Sweets and Zeitlinger, Amsterdam (1970), 241-261.

[5] M. VILLA e G. VAONA, *Varietà quasi-asintotiche a più indici e curve caratteristiche di una trasformazione puntuale*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8) **8** (1950), 470-476.

Summary

In this paper we characterize on Segre's variety some patterns concerning a point-transformation between two projective spaces S_r, $\bar{S}_r$.

* * *