Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 473-487

M. Tanfulla e G. Ribighini (*)

Procedure di stima dell'errore nella risoluzione di equazioni integrali di tipo Volterra (**)

1 - Introduzione

Si consideri una equazione integrale di tipo Volterra nella nota formula canonica

$$\tau(x) = \int_{x_0}^{x} H\big(x, s, \tau(s)\big)\, ds \;(^1)\,. \tag{1}$$

Nel caso che H soddisfi le ipotesi di esistenza e di unicità della soluzione su un intervallo $I_L = (x_0, x_0 + L)$, la risoluzione numerica della (1) è possibile facendo ricorso al teorema seguente che fa riferimento alle formule di Runge-Kutta valide per i problemi differenziali ai valori iniziali [4].

(*) Indirizzo degli Autori: Istituto di Informatica, Università, 60100 Ancona, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.I.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 24-XI-1980.
(1) Se l'equazione è data nella forma

$$\tau(x) = F\{x, \int_{x_0}^{x} G\big(x, s, \tau(s)\big)\}\, ds\,, \tag{2}$$

questa può essere ridotta alla forma canonica col procedimento descritto in [4].

Va ricordato che ad ogni soluzione ψ della (1) si può associare una soluzione φ della (2) tramite la relazione

$$\varphi(x) = F\big(x, \psi(x)\big)\,. \tag{2'}$$

Reciprocamente, a tutte le soluzioni φ della (2) si può associare una soluzione ψ della (1) tramite la relazione

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} G\big(x, s, \varphi(s)\big)\, ds\,.$$

Sia ψ la soluzione di (1) su $I_L = (x_0, x_0 + L)$ e sia S_h una suddivisione $(x_0, x_1, \ldots, x_l = x_0 + L)$ di I_L.

Poniamo $x_{ji} = x_j + \vartheta_i h_j$, $h_j = x_{j+1} - x_j$.

Definiamo, per $j = 0, 1, \ldots, l$, l'espressione

$$\mu_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } j = 0 \\ \sum_{r=0}^{j-1} h_r \sum_{k=0}^{q-1} A_{qk} H(x, x_{rk}, \mu_r(x_{rk}) + \psi_{rk}) & \text{per } j \geqslant 1 , \end{cases} \tag{3}$$

con

$$\begin{aligned} &\psi_{r0} = 0 \qquad \text{se } i = 0 , \\ &\psi_{ri} = h_j \sum_{k=0}^{i-1} A_{ik} H(x_{ri}, x_{rk}, \mu_r(x_{rk}) + \psi_{rk}) \qquad \text{per } i = 1, \ldots, q , \end{aligned} \tag{4}$$

i ϑ_i e A_{ik} essendo i coefficienti di Runge-Kutta di un metodo di rango q utilizzato per il trattamento dei sistemi differenziali del 1° ordine. Allora si ha

$$\psi(x_0 + L) = \mu_l(x_l) + O(h^q) . \tag{5}$$

Per i valori ottenuti dal trattamento numerico della (1) non si conoscono metodi efficienti di stima dell'errore commesso; visto però che sono ottenibili utilizzando formule di Runge-Kutta, si è pensato che si possa estendere ad essi i metodi di valutazione dell'errore associati all'impiego delle formule R.K.

Scopo di questa nota è appunto mostrare come sia possibile, utilizzando per la risoluzione della (1) le « pseudo-iterative Runge-Kutta formulas », estendere alle equazioni integrali di tipo Volterra il metodo basato sul principio della concordanza delle cifre in due pseudo-iterate successive [**6**].

2 - Risoluzione della forma canonica

Prima di vedere le procedure di attuazione del metodo accennato è necessario indagare sulle difficoltà insite nell'elaborazione delle formule risolutive di cui al teorema enunciato.

Supponiamo di integrare con un passo costante h e facendo riferimento alla suddivisione S_h. Se si scrivono le (5) per $j = 0, 1, \ldots, l$ ponendo genericamente $y_{jk} = \mu_j(x_{jk}) + \psi_{jk}$, l'analisi delle relazioni scritte porta ad osservare che per il generico $\psi(x_{j+1})$, per il quale si ha

$$\psi(x_{j+1}) = \mu_{j+1}(x_{j+1}) = \sum_{r=0}^{j} h \sum_{k=0}^{q-1} A_{qk} H(x_{j+1}, x_{rk}, y_{rk}) ,$$

occorre valutare soltanto x_{jk} e y_{jk}, con $k = 0, 1, \dots, q-1$, giacchè dagli j passi precedenti si conoscono già le q coppie di valori relative ad ogni passo (x_{r0}, y_{r0}), (x_{r1}, y_{r1}), ..., $(x_{r,q-1}, y_{r,q-1})$.

I valori x_{jk} si ottengono dalle relazioni $x_{jk} = x_{j0} + \vartheta_k h$.

Per quanto concerne i valori di y, tenendo presente che $y_{j0} = y_{j-1,q}$, si può scrivere

$$\begin{aligned} y_{j0} &= y_{j-1,q} , \\ y_{j1} &= \mu_j(x_{j1}) + \psi_{j1} , \qquad (6) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_{j,q-1} &= \mu_j(x_{j,q-1}) + \psi_{j,q-1} , \end{aligned}$$

per le quali si può affermare che:

(a) La quantità μ_j, per ogni y, è data dalla somma di j termini ciascuno dei quali dipende dal rango q della formula usata, e perchè ognuno di essi è dato dalla somma di q termini, e perchè in ognuno di essi compare un fattore A_{qk}, ossia un elemento dell'ultima riga della matrice A associata alla formula di R.K. adottata.

La quantità ψ, per ogni y, è invece data dalla somma di un numero di termini crescente con il secondo indice della y, i coefficienti dei quali termini sono rispettivamente gli elementi di ciascuna riga della matrice (triangolare) A associata.

(b) Per il calcolo della sommatoria relativa a ciascun μ_j si necessita dei valori x_{rk} e y_{rk} che sono stati calcolati nei j passi precedenti, mentre per il calcolo della sommatoria relativa a ciascun ψ_j si necessita di tutti i valori di y già calcolati relativi al passo $j+1$.

(c) Il valore richiesto $\mu_{j+1}(x_{j+1})$, considerato che $x_{jq} = x_{j+1,0} = x_{j+1}$, è dato in effetti da $y_{jq} = \mu_j(x_{jq}) + \psi_{jq}$, per cui è sufficiente per ottenerlo calcolare un ulteriore valore delle y dopo quello indicato dalle (6).

Fanno eccezione alla generalità il valore iniziale $\mu_0(x_0)$ che è nullo, ed il valore $\mu_1(x_1)$ per il quale, essendo eguale ad un unico termine dato da $h \sum_{k=0}^{q-1} A_{qk} H(x_1, x_{0k}, y_{0k})$, non intervengono i valori calcolati in altri passi ma soltanto quelli relativi al passo in corso, cioè gli x_{0k} $(k = 0, \ldots, q-1)$ e gli y_{0k} dati dalle relazioni seguenti

$$\begin{aligned}
&y_{00} = \mu_0(x_{00}) + \psi_{00} = 0 \,, \\
&y_{01} = \mu_0(x_{01}) + \psi_{01} = \psi_{01} = hA_{10}H(x_{01}, x_{00}, y_{00}) \,, \\
(7) \quad &y_{02} = \mu_0(x_{02}) + \psi_{02} = \psi_{02} = hA_{20}H(x_{02}, x_{00}, y_{00}) + hA_{21}H(x_{02}, x_{01}, y_{01}) \,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y_{0,q-1} = \mu_0(x_{0,q-1}) + \psi_{0,q-1} = \psi_{0,q-1} = h\sum_{k=0}^{q-2} A_{q-1,k}H(x_{0,q-1}, x_{0k}, y_{0k}) \,.
\end{aligned}$$

In conclusione, fatta eccezione per il passo iniziale, si può allora affermare che, mentre per la risoluzione delle equazioni differenziali è sufficiente ad ogni passo conoscere soltanto i valori iniziali, nel caso delle equazioni integrali di tipo Volterra occorre l'intervento dei valori di x e di y calcolati in tutti i passi precedenti. Questa caratteristica, che rende sempre più difficoltosi i calcoli col crescere del numero dei passi, impone una oculata organizzazione delle variabili che compaiono nell'algoritmo visto.

Si riporta di seguito la lista FORTRAN di una subroutine estremamente compatta, la RKUT, che realizza l'integrazione della (1) secondo il processo logico illustrato [2].

La subroutine detta si riferisce ad una certa formula di Runge-Kutta di rango q, calcolando in corrispondenza ad n passi di lunghezza h i valori dell'integrale richiesto a partire dal valore dell'estremo inferiore x_0.

La RKUT si avvale della FUNCTION HP, che permette di calcolare il valore della funzione $H(x, s, \tau(s))$, che a sua volta utilizza la FUNCTION FV per il calcolo della $F(x, \psi(x))$.

Gli argomenti della RKUT hanno il significato seguente:

XO	limite inferiore dell'integrale;
P	lunghezza del passo di integrazione;
N	numero dei passi n aumentato di una unità;
IQ	valore $q+1$;
TETA	vettore dei ϑ_k $(k = 2, 3, \ldots, IQ)$;
A	matrice dei coefficienti A_{ji} $(i = 1, \ldots, j-1;\ j = 2, \ldots, IQ)$;
U	matrice degli x_{ji};
Y	matrice delle $\psi(x_{ji})$.

[2] Qualora l'equazione fosse data nella forma (2) bisogna ridurla alla forma canonica. In questo caso tramite la (2)' si può associare, nel programma chiamante, ad ogni soluzione ψ della forma canonica data dalla RKUT una soluzione φ della (2).

SUBROUTINE RKUT 74/74 OPT=1 FTN 4.6+420

```
      SUBROUTINE RKUT(XO,P,IQ,N)
C
C  XO      LIMITE INFERIORE DELL'INTEGRALE
C  P       LUNGHEZZA DEL PASSO DI INTEGRAZIONE
C  N       NUMERO DEI PASSI N AUMENTATO DI UNA UNITA'
C  IQ      VALORE Q+1
C  TETA    VETTORE DEI  ϑK (K=2,3,..,IQ)
C  A       MATRICE DEI COEFFICIENTI AJI   (I=1,...,J-1; J=2,.....,IQ)
C  U       MATRICE DEGLI XJI
C  Y       MATRICE DELLE  Y(XJI)
C
      COMMON/UNO/U(200,15),Y(200,15),A(15,14),TETA(15)
      DO 48 J=1,N
      DO 47 I=1,IQ
      IF(I-1) 60,61,60
   61 IF(J-1) 72,71,72
   71 U(1,1) =XO
      Y(1,1) =0.
      GO TO 47
   72 JM1=J-1
      U(J,1)=U(JM1,IQ)
      Y(J,1)=Y(JM1,IQ)
      IF(J-N) 82,81,81
   81 RETURN
   82 GO TO 47
   60 U(J,I)=U(J,1)+P*TETA(I)
      S=0.
      IF(J-1) 90,91,90
   90 DO 46 IR=1,JM1
      IQM1=IQ-1
      DO 46 K=1,IQM1
   46 S=S+P*A(IQ,K)*HP(U(J,I),U(IR,K),Y(IR,K))
   91 T=0.
      IM1=I-1
      DO 44 K=1,IM1
      IF(A(I,K))11,44,11
   11 T=T+P*A(I,K)*HP(U(J,I),U(J,K),Y(J,K))
   44 CONTINUE
      Y(J,I)=S+T
   47 CONTINUE
   48 CONTINUE
      RETURN
      END
```

FUNCTION FV 74/74 OPT=1 FTN 4.6+420

```
      FUNCTION FV(X,Y)
      FV=.......
      RETURN
      END
```

FUNCTION HP 74/74 OPT=1 FTN 4.6+420

```
      FUNCTION HP(X,S,Y)
      HP=..........
      RETURN
      END
```

3 - Stima degli errori

Siano $\tilde{y}_5(x_i)$ e $\tilde{y}_4(x_i)$ le approssimazioni della soluzione $y(x_i)$ di una equazione differenziale del 1° ordine ottenuta tramite una formula pseudo-iterativa del 5° ordine e la sua « inserita » del 4° ordine.

La « proprietà intrinseca » di stima degli errori afferma che qualora le suddette approssimazioni abbiano la loro parte intera e le loro prime n cifre decimali coincidenti, i calcoli essendo stati espletati fino a p, $p > n$, cifre decimali, si può concludere che entrambe le approssimazioni dette coincidono fino alla n-esima cifra decimale con il valore esatto $y(x_i)$ [**5**]$_2$.

Una verifica della possibilità di estensione di questa proprietà alle equazioni di tipo Volterra, basata sull'uso dell'algoritmo visto nel n. **2**, richiede che in ciascun punto dell'intervallo $I_L = (x_0, x_{0+L})$ si calcoli, ricorrendo ad una formula pseudo-iterativa del 5° ordine ed alla sua « inserita », sia l'approssimazione $\tilde{\psi}_5(x_j)$ che la $\tilde{\psi}_4(x_j)$ della soluzione $\psi(x_0 + jh)$.

I calcoli accennati potrebbero condursi in modo indipendente facendo ricorso a due processi analoghi del tipo di quelli contemplati dalla RKUT, l'uno basato sulla formula del 5° ordine l'altro su quella della inserita del 4° ordine. Volendo, però, ottimizzare la procedura di calcolo, si può innestare un processo unico che, con la massima economia nei calcoli, consenta di ottenere contemporaneamente entrambe le approssimazioni.

La subroutine che realizza la risoluzione di una equazione data nella forma (2), allorchè sia stata ridotta a forma canonica, è la RK, la cui lista è nelle pagine seguenti.

Le variabili della RK hanno il significato seguente:

XO	limite inferiore dell'integrale;
P	lunghezza del passo di integrazione;
N	numero dei passi n aumentato di una unità;
TETA	vettore dei ϑ_k $(k = 2, \ldots, 7)$;
A	matrice dei coefficienti A_{ji} riferiti alla formula del 5° ordine $(j = 2, \ldots, 7;\ i = 1, \ldots, j-1)$;
Z	valore di ϑ_5 per la formula del 4° ordine;
B	vettore degli A_{5i} $(i = 1, \ldots, 4)$ per la formula del 4° ordine;
U	matrice degli x_{ji} riferiti all'approssimazione del 5° ordine;
UO	matrice degli x_{ji} riferita all'approssimazione del 4° ordine;
S	valore di $\mu_j(x_{ji})$ per l'approssimazione del 5° ordine;
SO	valore di $\mu_j(x_{ji})$ per l'approssimazione del 4° ordine;
T	valore di ψ_{ji} per l'approssimazione del 5° ordine;
TO	valore di ψ_{ji} per l'approssimazione del 4° ordine;

Y	matrice delle approssimazioni del 5° ordine $\tilde{\psi}_5(x_{ji})$;
YO	matrice delle approssimazioni del 4° ordine $\tilde{\psi}_4(x_{ji})$;
V5	vettore delle approssimazioni del 5° ordine dei valori di $\varphi_5(x_j)$ riferiti alla forma (2);
V4	vettore delle approssimazioni del 4° ordine dei valori di $\varphi_4(x_j)$ riferiti alla forma (2);
DH	vettore delle differenze $V5$-$V4$.

Il diagramma di flusso prevede tre vie logiche distinte per i calcoli relativi ad ogni passo (x_j, x_{j+1}).

La prima via, per $1 < I \leqslant IQ1 - 1$, relativa al calcolo dei valori di Y e YO che si riferiscono ai punti di ciascun intervallo comuni per i due ordini. Tale via tiene comunque conto che ciascun valore di Y differisce dal corrispondente YO a causa di quanto segue:

— diversità dei $\mu_j(x_{ji})$, relativi ad ognuno di essi, dovuta e al fatto che differisce il numero dei termini che li costituisce (6 termini per il 5° ordine e 4 per il 4° ordine), e al fatto che sono diversi i coefficienti dei termini corrispondenti (gli A_{7i} per il 5° ordine ed i B_i nel 4° ordine);

— diversità dei ψ_j relativi ad ognuno di essi, conseguente proprio alla diversità degli Y e YO relativi al passo in questione e calcolati prima di quello in corso.

La seconda via, per $I = IQ1$, per il calcolo di YO_{j5} e Y_{j5} che si riferiscono a due punti distinti in quanto il primo è l'ultimo dell'insieme e pertanto va calcolato nell'estremo destro del passo ($z = 1$), mentre il secondo è seguito da altri due valori.

La terza via, per $IQ1 < I \leqslant IQ2$, per il calcolo di Y_{j6} e Y_{j7} soltanto.

Naturalmente per $I = 1$, fatta eccezione per il primo passo, vengono assegnati a YO_{j1} e Y_{j1} rispettivamente i valori di $YO_{j-1,5}$ e $Y_{j-1,7}$.

Il processo logico essendo sostanzialmente ancora quello della RKUT, anche la RK si avvale della FUNCTION HP per il calcolo della $H(x, s, \tau(s))$, la quale a sua volta fa riferimento alla FUNCTION FV per il calcolo della $F(x, \psi(x))$.

```
      SUBROUTINE RK(N,IQ1,IQ2,X0,P,FV,HP)
C
C   X0      LIMITE INFERIORE DELL'INTEGRALE
C   P       LUNGHEZZA DEL PASSO DI INTEGRAZIONE
C   N       NUMERO DEI PASSI N AUMENTATO DI UNA UNITA'
C   TETA    VETTORE DEI ϑK (K=2,....,7)
C   A       MATRICE DEI COEFFICIENTI AJI RIFERITI ALLA FORMULA DEL 5° ORDINE
C           (J=2,...,7; I=1,......,J-1)
C   Z       VALORE DI ϑ5 PER LA FORMULA DEL 4° ORDINE
C   B       VETTORE DEGLI A5I (I=1,....,4) PER LA FORMULA DEL 4° ORDINE
C   U       MATRICE DEGLI XJI RIFERITI ALL'APPROSSIMAZIONE DEL 5° ORDINE
C   U0      MATRICE DEGLI XJI RIFERITA ALL'APPROSSIMAZIONE DEL 4° ORDINE
C   S       VALORE DI μJ(XJI)PER L'APPROSSIMAZIONE DEL 5° ORDINE
C   S0      VALORE DI μJ(XJI)PER L'APPROSSIMAZIONE DEL 4° ORDINE
C   T       VALORE DI ψJI PER L'APPROSSIMAZIONE DEL 5° ORDINE
C   T0      VALORE DI ψJI PER L'APPROSSIMAZIONE DEL 4° ORDINE
C   Y       MATRICE DELLE APPROSSIMAZIONI DEL 5° ORDINE ψ5(XJI )
C   Y0      MATRICE DELLE APPROSSIMAZIONI DEL 4° ORDINE ψ4(XJI )
C   V5      VETTORE DELLE APPROSSIMAZIONI DEL 5° ORDINE DEI VALORI DI φ5(XJ)
C           RIFERITI ALLA FORMA (2)
C   V4      VETTORE DELLE APPROSSIMAZIONI DEL 4° ORDINE DEI VALORI DI φ4(XJ)
C           RIFERITI ALLA FORMA (2)
C   DH      VETTORE DELLE DIFFERENZE V5-V4
C
      COMMON/MHL/U(200,7),U0(200,5),Y(200,7),Y0(200,5)
      COMMON/SAB/DH(200),V5(200),V4(200)
      COMMON TETA(7),A(7,6),B(4)
      Z=1.
      B(1)=1./6. $ B(2)=0. $ B(3)=4./6. $ B(4)=1./6.
      TETA(2)=0.5 $ TETA(3)=0.5 $ TETA(4)=1.0 $ TETA(5)=2./3..
      TETA(6)=0.2 $ TETA(7)=1.
      A(2,1)=0.5
      A(3,1)=0.25 $ A(3,2)=0.25
      A(4,1)=0.0 $ A(4,2)=-1.0 $ A(4,3)=2.0
      A(5,1)=7.0/27.0 $ A(5,2)=10./27. $ A(5,3)=0. $ A(5,4)=1./27.
      A(6,1)=0.0448 $ A(6,2)=-0.2 $ A(6,3)=0.8736 $ A(6,4)=0.0864
      A(6,5)=-0.6048
      A(7,1)=14.0/336. $ A(7,2)=0. $ A(7,3)=0. $ A(7,4)=35./336.
      A(7,5)=162.0/336.0 $ A(7,6)=125./336.
      N1=N+1
      DO 1 J=1,N1
      DO 2 I=1,IQ2
      IF(I-1) 3,4,3
    4 IF(J-1)5,6,5
    6 U(1,1)=X0
      Y(1,1)=0.
      U0(1,1)=X0
      Y0(1,1)=0.
      GO TO 2
    5 U(J,1)=U(J-1,IQ2)
      Y(J,1)=Y(J-1,IQ2)
      U0(J,1)=U0(J-1,IQ1)
      Y0(J,1)=Y0(J-1,IQ1)
      IF(J-N1)7,8,7
    7 GO TO 2
    3 U(J,I)=U(J,1)+P*TETA(I)
      IF(I-IQ1) 9,10,14
   10 U0(J,I)=U(J,1)+P*Z
      GO TO 14
    9 U0(J,I)=U(J,I)
```

```
      C    INIZIO CALCOLO MATRICI Y E YO
      C
        14 S=0.
           SO =0.
           IF(J-1)15,16,15
        15 IF(I-IQ1) 17,17,18
        17 J1=J-1
           IQK=IQ1-1
           DO 20 IR=1,J1
           DO 20 K=1,IQK
        20 SO=SO+P*B(K)*HP(UO(J,I),UO(IR,K),YO(IR,K))
        18 IQKK=IQ2-1
           DO 22 IR=1,J1
           DO 22 K=1,IQKK
        22 S=S+P*A(IQ2,K)*HP(U(J,I),U(IR,K),Y(IR,K))
        16 T=0.
           TO=0.
           II=I-1
           DO 37 K=1,II
           IF(A(I,K)) 36,37,36
        36 T=T+P*A(I,K)*HP(U(J,I),U(J,K),Y(J,K))
        37 CONTINUE
           IF(I-IQ1)23,24,34
        24 II=I-1
           DO 28 K=1,II
           IF(B(K)) 27,28,27
        27 TO=TO+P*B(K)*HP(UO(J,I),UO(J,K),YO(J,K))
        28 CONTINUE
           GO TO 34
        23 II=I-1
           DO 200 K=1,II
           IF(A(I,K)) 202,200,202
       202 TO=TO+P*A(I,K)*HP(UO(J,I),UO(J,K),YO(J,K))
       200 CONTINUE
        34 Y(J,I)=S+T
           YO(J,I)=SO+TO
         2 CONTINUE
         1 CONTINUE
           RETURN
         8 CONTINUE
           DO 444 J=1,N1
           V4(J)=FV(UO(J,1),YO(J,1))
       444 V5(J)=FV(U(J,1),Y(J,1))
           DO 445 J=2,N1
       445 DH(J)=V5(J)-V4(J)
           RETURN
           END
```

```
FUNCTION HP1        74/74    OPT=1                    FTN 4.6+420

          FUNCTION HP1(X,S,Y)
          HP1=2.*FV1(S,Y)/(S+1.)
          RETURN
          END
```

```
FUNCTION FV1        74/74    OPT=1                    FTN 4.6+420

          FUNCTION FV1(X,Y)
          FV1=1.+Y
          RETURN
          END
```

```
FUNCTION HP2          74/74    OPT=1                              FTN 4.6+420

                FUNCTION HP2(X,S,Y)
                XMS=X-S
                HP2=COS(XMS)+SIN(XMS)*FV2(S,Y)
                RETURN
                END
```

```
FUNCTION FV2          74/74    OPT=1                              FTN 4.6+420

                FUNCTION FV2(X,Y)
                FV2=Y
                RETURN
                END
```

```
FUNCTION HP3          74/74    OPT=1                              FTN 4.6+420

                FUNCTION HP3(X,S,Y)
                XMS=X-S
                HP3=SIN(XMS)*FV3(S,Y)*FV3(S,Y)
                RETURN
                END
```

```
FUNCTION FV3          74/74    OPT=1                              FTN 4.6+420

                FUNCTION FV3(X,Y)
                XM=X
                FV3=1.+SIN(XM)*SIN(XM)-3.*Y
                RETURN
                END
```

4 - Conclusioni

La subroutine RK è stata utilizzata per la risoluzione delle 3 seguenti equazioni integrali

$$\tau(x) = 1 + \int_0^x \frac{2\tau(s)}{s+1}\, ds\,, \tag{E1}$$

$$\tau(x) = \int_0^x \big(\cos(x-s) + \tau(s)\,\mathrm{sen}\,(x-s)\big)\, ds\,, \tag{E2}$$

$$\tau(x) = 1 + \mathrm{sen}^2 x - 3\int_0^x \mathrm{sen}\,(x-s)\,\tau(s)^2\, ds\,, \tag{E3}$$

le cui soluzioni analitiche sono rispettivamente: $(x+1)^2$, x, $\cos x$.

Le elaborazioni eseguite, relativamente all'intervallo [0, 2] con passo 0.1, hanno dato i risultati listati nelle tabelle seguenti, dove:

X	valore della variabile indipendente;
V.E.	valore vero dell'integrale calcolato tramite la FUNCTION della espressione analitica della soluzione;
V5	approssimazione del 5° ordine;
V4	approssimazione del 4° ordine;
V.E.-V5	errore vero commesso;
V5-V4	errore stimato.

L'analisi del tabulato relativa alla (E1), che in effetti è un'equazione differenziale del 1° ordine, mostra che l'errore vero commesso è dell'ordine di 10^{-7} nella prima approssimazione, di 10^{-6} fino alla undicesima, poi di 10^{-5} fino alla ventesima. La stima, invece, denuncia un errore dell'ordine di 10^{-5} per i primi cinque passi e di 10^{-4} per i passi seguenti.

L'analisi del tabulato relativo alla (E2) mostra che l'errore vero commesso è dell'ordine di 10^{-9} per la prima approssimazione, di 10^{-8} per le quattro successive, di 10^{-7} per le dodici seguenti e di 10^{-6} nelle ultime tre.
La stima, invece, denuncia un errore di 10^{-7} per la prima approssimazione, di 10^{-6} per le nove seguenti, e di 10^{-5} per le ultime dieci.

L'analisi del tabulato relativo alla (E3) mostra che l'errore vero commesso è dell'ordine di 10^{-6} per i primi tre passi, di 10^{-5} per i sette seguenti, poi di nuovo di 10^{-6} per le sette successive, ed infine ancora di 10^{-5} per le ultime tre.
La stima, invece, denuncia un errore di 10^{-6} per la prima approssimazione, poi di 10^{-5} per le tre seguenti, di 10^{-4} per le quattordici successive, ed infine ancora di 10^{-5} per le ultime tre.

In conclusione, per tutte e tre le equazioni lo scarto tra l'errore vero e l'errore stimato non supera mai le due cifre decimali, per cui, se si tiene presente che il passo usato è abbastanza grande, si può affermare che si tratta di risultati abbastanza soddisfacenti. Si può ritenere, dunque, sufficientemente valido il metodo impiegato e possibile l'estensione della proprietà intrinseca di cui all'indagine.

APPROSSIMAZIONI DI EĪ NELL INTERVALLO 0.1,...,2.0 CON PASSO 0.1

X	V.E.	V5	V4	V.E.-V5	V5-V4
.1000	.1210000000E+01	.1209999909E+01	.1209997939E+01	.9094546272E-07	.1970485165E-05
.2000	.1440000000E+01	.1439999828E+01	.1439995971E+01	.1717268177E-06	.3856842618E-05
.3000	.1690000000E+01	.1689999753E+01	.1689994041E+01	.2472032179E-06	.5711536438E-05
.4000	.1960000000E+01	.1959999680E+01	.1959992109E+01	.3203716119E-06	.7570168385E-05
.5000	.2250000000E+01	.2249999607E+01	.2249990149E+01	.3931482695E-06	.9457573483E-05
.6000	.2560000000E+01	.2559999533E+01	.2559988142E+01	.4667971751E-06	.1139149650E-04
.7000	.2890000000E+01	.2889999458E+01	.2889986073E+01	.5421747886E-06	.1338488553E-04
.8000	.3240000000E+01	.3239999380E+01	.3239983933E+01	.6198754363E-06	.1544736564E-04
.9000	.3610000000E+01	.3609999300E+01	.3609981713E+01	.7003202853E-06	.1758621090E-04
1.0000	.4000000000E+01	.3999999216E+01	.3999979409E+01	.7838133769E-06	.1980700047E-04
1.1000	.4410000000E+01	.4409999129E+01	.4409977015E+01	.8705780203E-06	.2211407090E-04
1.2000	.4840000000E+01	.4839999039E+01	.4839974528E+01	.9607805680E-06	.2451083375E-04
1.3000	.5290000000E+01	.5289998945E+01	.5289971945E+01	.1054546857E-05	.2700000240E-04
1.4000	.5760000000E+01	.5759998848E+01	.5759969264E+01	.1151973123E-05	.2958375666E-04
1.5000	.6250000000E+01	.6249998747E+01	.6249966483E+01	.1253133888E-05	.3226386372E-04
1.6000	.6760000000E+01	.6759998642E+01	.6759963600E+01	.1358087360E-05	.3504176860E-04
1.7000	.7290000000E+01	.7289998533E+01	.7289960614E+01	.1466879610E-05	.3791866183E-04
1.8000	.7840000000E+01	.7839998420E+01	.7839957525E+01	.1579547302E-05	.4089553155E-04
1.9000	.8410000000E+01	.8409998304E+01	.8409954331E+01	.1696119853E-05	.4397320345E-04
2.0000	.9000000000E+01	.8999998183E+01	.8999951031E+01	.1816621193E-05	.4715237168E-04

APPROSSIMAZIONI DI E2 NELL INTERVALLO 0.1,...,2.0 CON PASSO 0.1

X	V.E.	V5	V4	V.E.-V5	V5-V4
.1000	.1000000000E+00	.9999999945E-01	.9999991324E-01	.5509330769E-09	.8620544634E-07
.2000	.2000000000E+00	.1999999982E+00	.1999998265E+00	.1769948632E-08	.1717081135E-06
.3000	.3000000000E+00	.2999999963E+00	.2999997390E+00	.3656294822E-08	.2573414264E-06
.4000	.4000000000E+00	.3999999938E+00	.3999996499E+00	.6209223358E-08	.3439388028E-06
.5000	.5000000000E+00	.4999999906E+00	.4999995582E+00	.9427989056E-08	.4323336587E-06
.6000	.6000000000E+00	.5999999867E+00	.5999994633E+00	.1331183697E-07	.5233594180E-06
.7000	.7000000000E+00	.6999999821E+00	.6999993643E+00	.1786001391E-07	.6178495084E-06
.8000	.8000000000E+00	.7999999769E+00	.7999992603E+00	.2307176672E-07	.7166373557E-06
.9000	.9000000000E+00	.8999999711E+00	.8999991505E+00	.2894635642E-07	.8205563624E-06
1.0000	.1000000000E+01	.9999999645E+00	.9999990341E+00	.3548301919E-07	.9304399704E-06
1.1000	.1100000000E+01	.1099999957E+01	.1099998910E+01	.4268102316E-07	.1047121579E-05
1.2000	.1200000000E+01	.1199999949E+01	.1199998778E+01	.5053959740E-07	.1171434626E-05
1.3000	.1300000000E+01	.1299999941E+01	.1299998637E+01	.5905801714E-07	.1304212510E-05
1.4000	.1400000000E+01	.1399999932E+01	.1399998485E+01	.6823550791E-07	.1446288685E-05
1.5000	.1500000000E+01	.1499999922E+01	.1499998323E+01	.7807131652E-07	.1598496539E-05
1.6000	.1600000000E+01	.1599999911E+01	.1599998150E+01	.8856470401E-07	.1761669537E-05
1.7000	.1700000000E+01	.1699999900E+01	.1699997964E+01	.9971493853E-07	.1936641056E-05
1.8000	.1800000000E+01	.1799999888E+01	.1799997764E+01	.1115212456E-06	.2124244510E-05
1.9000	.1900000000E+01	.1899999876E+01	.1899997551E+01	.1239828933E-06	.2325313325E-05
2.0000	.2000000000E+01	.1999999863E+01	.1999997322E+01	.1370990930E-06	.2540680981E-05

APPROSSIMAZIONI DI E3 NELL INTERVALLO 0.1,...,2.0 CON PASSO 0.1

X	V.E.	V5	V4	V.E.-V5	V5-V4
.1000	.9950041653E+00	.9950038010E+00	.9950041907E+00	.3642582271E-06	-.3897285907E-06
.2000	.9800665778E+00	.9800658755E+00	.9800679632E+00	.7023338426E-06	-.2087728589E-05
.3000	.9553364891E+00	.9553354924E+00	.9553404282E+00	.9966866763E-06	-.4935719502E-05
.4000	.9210609940E+00	.9210597608E+00	.9210684141E+00	.1233229796E-05	-.8653359444E-05
.5000	.8775825619E+00	.8775811598E+00	.8775940346E+00	.1402138061E-05	-.1287489302E-04
.6000	.8253356149E+00	.8253341167E+00	.8253513121E+00	.1498197783E-05	-.1719541953E-04
.7000	.7648421873E+00	.7648406666E+00	.7648618860E+00	.1520703023E-05	-.2121945823E-04
.8000	.6967067093E+00	.6967052364E+00	.6967298410E+00	.1472959198E-05	-.2460458777E-04
.9000	.6216099683E+00	.6216086068E+00	.6216357011E+00	.1361493496E-05	-.2709431165E-04
1.0000	.5403023059E+00	.5403011108E+00	.5403296473E+00	.1195089155E-05	-.2853656952E-04
1.1000	.4535961214E+00	.4535951377E+00	.4536240246E+00	.9837594774E-06	-.2888695521E-04
1.2000	.3623577545E+00	.3623570167E+00	.3623852149E+00	.7377592937E-06	-.2819817613E-04
1.3000	.2674988286E+00	.2674983619E+00	.2675249611E+00	.4667065987E-06	-.2659916809E-04
1.4000	.1699671429E+00	.1699669640E+00	.1699912324E+00	.1788557968E-06	-.2426831405E-04
1.5000	.7073720167E-01	.7073732113E-01	.7075872649E-01	-.1194630328E-06	-.2140536412E-04
1.6000	-.2919952230E-01	-.2919909805E-01	-.2918089201E-01	-.4242486324E-06	-.1820604312E-04
1.7000	-.1288444943E+00	-.1288437602E+00	-.1288289180E+00	-.7341040202E-06	-.1484221160E-04
1.8000	-.2272020947E+00	-.2272010443E+00	-.2271895952E+00	-.1050423417E-05	-.1144909500E-04
1.9000	-.3232895669E+00	-.3232881893E+00	-.3232800695E+00	-.1377539608E-05	-.8119780659E-05
2.0000	-.4161468365E+00	-.4161451137E+00	-.4161402076E+00	-.1722887673E-05	-.4906098042E-05

Bibliografia

[1] F. CESCHINO e J. KUNTZMANN, *Problemes differentiales de conditions initiales*, Paris, Dunod 1963.

[2] L. COLLATZ, *The numerical treatment of differential equations*, Berlin, Springer-Verlag 1960.

[3] H. MINEUR, *Technique de calcul numerique*, Paris, Dunod 1966.

[4] P. POUZET, *Etude en vue de leur traitment numerique des equations integrales de type Volterra*, Rev. Franc. Traitement Information Chiffres **6** (1963), 79-112.

[5] D. SARAFYAN: $[\bullet]_1$ *Error estimation for Runge-Kutta methods through pseudo-iterative formulas*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **9** (1968), 1-42; $[\bullet]_2$ *Estimation of error for the approximate solution of differential equation and their systems*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **9** (1968), 109-127.

[6] M. URABE, *Theory of errors in numerical integration of differential equations*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math. **25** (1961), 3-62.

Summary

When solving initial value problems by means of «pseudo-iterative Runge-Kutta formulas», one can get an error estimate by taking advantage of certain intrinsic properties of such formulas, as shown by Sarafyan $[\mathbf{5}]_2$.

The purpose of this paper is to show that the very same method can be extended from the case of differential equations to the case of integral ones, when solving Volterra equations by means of the same formulas, and to give an optimal subroutine to this effect.

* * *