Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 397-403

GIOVANNI PINTO (*)

Sui grafi autocomplementari (**)

I grafi autocomplementari sono stati già studiati da G. Ringel [**4**] e da H. Sachs [**5**], mentre R. A. Gibbs [**1**] ha definito un algoritmo per la loro costruzione.

Inoltre R. C. Read [**3**] ha stabilito formule che determinano il numero dei grafi autocomplementari di assegnato ordine. In questa nota si formulano una condizione necessaria e una condizione sufficiente affinchè un grafo di ordine pari o dispari sia autocomplementare. Si assume come definizione di grafo quella di F. Harary [**2**], cioè un grafo di ordine n è una coppia $G = (V, X)$ dove V è un insieme di n elementi detti vertici e X è un insieme di coppie non ordinate di vertici dette spigoli.

Si definisce isomorfismo di un grafo $G = (V, X)$ su di un grafo $G' = (V', X')$ una coppia $\varphi = (f, g)$ di bigezioni $f\colon V \to V'$ e $g\colon X \to X'$ tali che per ogni spigolo $x = \{v_i, v_j\} \in X$ risulti $g(x) = \{f(v_i), f(v_j)\} \in X'$.

Se $P_2(V)$ è l'insieme delle coppie non ordinate di vertici di V, il complementare del grafo $G = (V, X)$ è il grafo $\bar{G} = (V, \bar{X})$, dove $\bar{X} = P_2(V) - X$. Un grafo è detto autocomplementare se esso è isomorfo al suo complementare.

Per tutte le altre definizioni che si incontreranno in questo lavoro, si farà sempre riferimento a [**2**].

È noto che se $G = (V, X)$ è un grafo autocomplementare di ordine n, l'ordine di X è dato da $\big(n(n-1)\big)/4$. Pertanto se n è pari, $n = 4k$, mentre se n è dispari, $n = 4k + 1$, con k intero maggiore di zero.

Indicato con $\mathrm{gr}_G(v_i)$ il numero degli spigoli di G che passano per il vertice v_i e con $\mathrm{gr}_{\bar{G}}(v_i)$ il numero degli spigoli di $\bar{G}$ che passano per v_i, è noto che per un grafo autocomplementare risulta: $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{gr}_G(v_i) = \big(n(n-1)\big)/2$.

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria, Università, Via Nicolai 2, 70121 Bari, Italy.
(**) Ricevuto: 27-V-1980.

Si verifica immediatamente la seguente

Proposizione 1. *Se $G = (V, X)$ è un grafo autocomplementare di ordine n, e se $\varphi = (f, g)$ è un isomorfismo di G su $\bar{G}$, la somma dei gradi di due vertici corrispondenti in φ, considerati entrambi come vertici di G oppure di $\bar{G}$, è sempre $n-1$.*

Dimostrazione. Se v_i è un vertice di V avente $\mathrm{gr}_G(v_i) = p$ e se $f(v_i) = v_j$ è il suo vertice corrispondente, si ha $\mathrm{gr}_G(v_i) = \mathrm{gr}_{\bar{G}}(v_j)$. Inoltre poichè gli spigoli di $X \cup \bar{X}$ passanti per un vertice di V sono in numero di $n-1$, deve essere

$$\mathrm{gr}_G(v_j) + \mathrm{gr}_{\bar{G}}(v_j) = n-1 , \tag{1}$$

e quindi sostituendo nella (1) $\mathrm{gr}_{\bar{G}}(v_j)$, si ha $\mathrm{gr}_G(v_i) + \mathrm{gr}_G(v_j) = n-1$.

D'altra parte è anche $\mathrm{gr}_G(v_j) = \mathrm{gr}_{\bar{G}}(v_i)$, per cui sempre sostituendo nella (1) $\mathrm{gr}_G(v_j)$ si ottiene $\mathrm{gr}_{\bar{G}}(v_i) + \mathrm{gr}_{\bar{G}}(v_j) = n-1$.

Conseguenza immediata della Proposizione 1 è la seguente

Proposizione 2. *Se G è un grafo autocomplementare di ordine $n = 4k$, in ogni isomorfismo di G su $\bar{G}$, non esiste alcun vertice unito.*

Dimostrazione. Infatti se in un isomorfismo di G su $\bar{G}$ esistesse un vertice unito v_u, dalla proposizione 1 seguirebbe $\mathrm{gr}_G(v_u) + \mathrm{gr}_G(f(v_u)) = 2\,\mathrm{gr}_G(v_u) = 4k-1$, il che è ovviamente assurdo, perchè $4k-1$ non è divisibile per 2.

Ringel [**4**] e Sachs [**5**] hanno entrambi provato i seguenti risultati per un isomorfismo di un grafo G sul suo complementare $\bar{G}$.

Sia G un grafo autocomplementare di ordine n e $\varphi = (f, g)$, un isomorfismo di G su $\bar{G}$; allora se $n = 4k$, la permutazione f di V si decompone nel prodotto di cicli disgiunti ciascuno di lunghezza un multiplo di 4, mentre se $n = 4k+1$, f si decompone nel prodotto di un ciclo di lunghezza 1 e di cicli disgiunti ciascuno di lunghezza un multiplo di 4.

Si prova ora una proprietà dei grafi autocomplementari di ordine $n = 4k$ e si ritrova che la permutazione f di V si decompone nel prodotto di cicli disgiunti ciascuno di lunghezza un multiplo di 4.

Proposizione 3. *Se $G = (V, X)$ è un grafo autocomplementare di ordine $n = 4k$, i due sottoinsiemi $A = \{v_i \in V / \mathrm{gr}_G(v_i) \geqslant 2k\}$ e $B = \{v_i \in V / \mathrm{gr}_G(v_i)$*

$< 2k\}$ *soddisfano alle seguenti condizioni*:

(a) A *e* B *hanno lo stesso ordine* $2k$;

(b) $4k^2 \leqslant \sum_{v_i \in A} \mathrm{gr}_G(v_i) \leqslant 2k(3k-1)$;

(c) A e B *si ripartiscono in sottoinsiemi di ordine pari contenenti vertici dello stesso grado e se* A_p *è il sottoinsieme che contiene i vertici di grado* p, *nella partizione di* B *il sottoinsieme* B_{n-1-p}, *che contiene i vertici di grado* $n-1-p$, *ha lo stesso ordine di* A_p;

(d) se $\varphi = (f, g)$ *è un isomorfismo di* G *su* $\overline{G}$, *la permutazione* f *di* V *si decompone in un prodotto di cicli disgiunti ciascuno di lunghezza un multiplo di* 4.

Dimostrazione. Il sottoinsieme B è non vuoto, poichè altrimenti risulterebbe $A = V$ e quindi nel grafo G la somma dei gradi dei suoi vertici sarebbe almeno $8k^2$, il che è assurdo perchè $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{gr}_{\overline{G}}(v_i) = 2k(4k-1)$. Analogamente si prova che il sottoinsieme A è non vuoto, perchè altrimenti sarebbe $B = V$ e quindi in G la somma dei gradi dei suoi vertici sarebbe al più $4k(2k-1)$, in contraddizione con ciò che si è detto.

Allora se $\varphi = (f, g)$ è un isomorfismo di G su $\overline{G}$ e se v_i è un vertice di A di grado p, $v_j = f(v_i)$ è un vertice di grado $n-1-p$ che appartiene a B poichè da $p \geqslant 2k$ segue che $n-1-p < 2k$. Viceversa, se v_j è un vertice di B di grado q, esiste un vertice v_i *di* A di grado $n-1-q$ tale che $f(v_i) = v_j$, giacchè da $q < 2k$ si deduce $n-1-q \geqslant 2k$. Pertanto $f(A) = B$ e quindi A e B hanno lo stesso ordine $2k$, essendo $A \cup B = V$.

Si vede subito ora che per i vertici di A in G vale la condizione (b).

La prima disuguaglianza è ovvia. La seconda si prova per assurdo. Se infatti fosse $\sum_{v_i \in A} \mathrm{gr}_G(v_i) = 2k(3k-1)+1$, risulterebbe $\sum_{v_i \in B} \mathrm{gr}_G(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{gr}_G(v_i) - \big(2k \cdot (3k-1)+1\big) = 2k(4k-1) - 2k(3k-1) - 1 = 2k-1$. Ma questo risultato è chiaramente assurdo, perchè la $\sum_{v_i \in B} \mathrm{gr}_G(v_i)$ si calcola considerando gli spigoli che hanno entrambi gli estremi in B e gli spigoli che hanno un estremo in B e l'altro in A e quest'ultimi sono in numero di $2k^2$, per cui risulta $\sum_{v_i \in B} \mathrm{gr}_G(v_i) > 2k^2 - 1$.

Per provare le condizioni (c) e (d), si considerano il sottoinsieme A_p dei vertici di A di grado p e il sottoinsieme $B_{n-1-p} = f(A_p)$. Allora se v_i e $v_j = f(v_i)$ sono un vertice di A_p e il corrispondente vertice di B_{n-1-p}, il vertice $v_h = f(v_j)$ appartiene ad A_p ed è diverso da v_i, poichè se fosse $v_h = v_i$, lo spigolo $\{v_i, v_j\}$ sarebbe unito il che è assurdo, essendo G e $\overline{G}$ complementari. Inoltre $v_0 = f(v_h)$ appartiene a B_{n-1-p} ed è distinto da v_j per la bigettività della f. Pertanto se è $A_p = \{v_i, v_h\}$ e $B_{n-1-p} = \{v_j, v_g\}$ deve risultare $f(v_g) = v_i$, da cui segue che f contiene il ciclo di lunghezza 4 $(v_i v_j v_h v_g)$.

Se poi ad A_p appartiene un vertice v_r distinto da v_i e v_h, ragionando in modo analogo, si trova che A_p ne contiene almeno un altro v_t diverso dai precedenti e quindi $v_s = f(v_r)$ e $v_z = f(v_t)$ sono ulteriori vertici di B_{n-1-p}. Pertanto se $A_p = \{v_i, v_h, v_r, v_t\}$, si ha $B_{n-1-p} = \{v_j, v_g, v_s, v_z\}$ e di conseguenza f contiene il prodotto dei due cicli di lunghezza 4, $(v_i v_j v_h v_g)(v_r v_s v_t v_z)$, oppure il ciclo di lunghezza 8, $(v_i v_j v_h v_g v_r v_s v_t v_z)$.

In generale, se A_p contiene $2h$ vertici di A di grado p, con $1 \leqslant h \leqslant k$, B_{n-1-p} comprende $2h$ vertici di B di grado $n-1-p$, e iterando il ragionamento precedente per ogni altro A_q e A_{n-1-q}, si trova che A e B si ripartiscono in sottoinsiemi di ordine pari che contengono vertici di ugual grado e che f si decompone in un prodotto di cicli disgiunti ciascuno di lunghezza un multiplo di 4.

La Proposizione 3 fornisce una condizione necessaria affinchè un grafo di ordine $n = 4k$ sia autocomplementare. Se ne prova ora una condizione sufficiente. Sussiste infatti la seguente

Proposizione 4. *Se $G = (V, X)$ e $\bar{G} = (V, \bar{X})$ sono due grafi complementari di ordine qualsiasi soddisfacenti alle condizioni:*

(a) *i due sottoinsiemi di V $A = \{v_i \in V/\mathrm{gr}_G(v_i) \geqslant 2k\}$ e $B = \{v_i \in V/\mathrm{gr}_G(v_i) < 2k\}$, abbiano lo stesso ordine;*

(b) *esista una bigezione $g\colon X \to \bar{X}$ che trasformi con la sua inversa g^{-1} spigoli adiacenti in spigoli adiacenti;*

(c) *se X_{AB} e $\bar{X}_{AB}$ sono i sottoinsiemi degli spigoli rispettivamente di X e di $\bar{X}$ che hanno un estremo in A e l'altro in B, risulti $g(X_{AB}) = \bar{X}_{AB}$, allora G e $\bar{G}$ sono isomorfi.*

Dimostrazione. Per $k = 1$, la proposizione è banalmente verificata perchè esiste un solo grafo G isomorfo al suo complementare $\bar{G}$.

Per $k > 1$, siano v_i un vertice di A e x, y, z, t quattro spigoli di X per v_i, sicuramente esistenti, essendo $\mathrm{gr}_G(v_i) \geqslant 2k$.

Poichè la bigezione g conserva le adiacenze, gli spigoli $g(x)$, $g(y)$, $g(z)$, $g(t)$ sono a due a due adiacenti in uno stesso vertice v_j di V. Ovviamente ogni altro spigolo di X per $v_i \in A$ è trasformato mediante la g in uno spigolo di $\bar{X}$ per v_j ed essendo $\mathrm{gr}_{\bar{G}}(v_j) \geqslant 2k$, dev'essere $\mathrm{gr}_G(v_j) < 2k$, ossia v_j appartiene a B.

Pertanto si può definire un'applicazione $f_1\colon A \to B$ che ad ogni vertice v_i di A associa il vertice v_j di B nel quale sono adiacenti gli spigoli trasformati mediante g degli spigoli per v_i e se x è uno spigolo di X incidente v_i, $g(x)$ è uno spigolo di $\bar{X}$ incidente $v_j = f_1(v_i)$.

La f_1 è una bigezione. Infatti, poichè anche la g^{-1} conserva le adiacenze, con un ragionamento analogo al precedente, si trova che per ogni vertice v_j di B gli spigoli di $\bar{X}$ per v_j sono trasformati mediante la g^{-1} in altrettanti spigoli di X adiacenti fra loro in unico vertice v_i di A, tale che $f_1(v_i) = v_j$.

Si osserva ora che per ogni vertice di B, esiste almeno uno spigolo di X_{AB} passante per esso. Infatti, se per un vertice v_g di B non ne passasse alcuno, poichè l'ordine di $X_{AB} \cup \bar{X}_{AB}$ è $4k^2$ e quindi per ogni vertice di V passano $2k$ spigoli di $X_{AB} \cup \bar{X}_{AB}$, per v_g passerebbero $2k$ spigoli di $\bar{X}_{AB}$. Pertanto esisterebbe un vertice v_h di A per il quale passerebbero $2k$ spigoli di X_{AB}, fra i quali ci sarebbe lo spigolo $\{v_h, v_g\}$, contro l'ipotesi.

Pertanto, se v_j è un vertice di B, si consideri uno spigolo di X_{AB} per esso e sia $x = \{v_j, v_r\}$ con v_r vertice di A questo spigolo e $g(x) = \{v_i, v_s\} \in \bar{X}_{AB}$ il suo trasformato.

Ora, poichè $f_1(v_r)$ appartiene a $g(x)$, se $f_1(v_r) = v_s \in B$, dev'essere v_i un vertice di A. Ne segue che si può definire un'applicazione f_2: $B \to A$ che ad ogni vertice v_j di B associa, come s'è già detto, il vertice v_i di A ed inoltre se x è uno spigolo di X_{AB} incidente v_j, $g(x)$ è uno spigolo di $\bar{X}_{AB}$ incidente $v_i = f_2(v_j)$.

Si vede subito che anche la f_2 è bigettiva.

Allora si può costruire una permutazione f di V tale che la ridotta della restrizione di f ad A o rispettivamente a B sia la f_1 oppure la f_2.

Per il modo in cui è stata costruita la f, si deduce che per ogni spigolo $x = \{v_i, v_j\}$ di X risulta $g(x) = \{f(v_i), f(v_j)\}$ di $\bar{X}$. Si conclude che la coppia $\varphi = (f, g)$ è un isomorfismo di G su $\bar{G}$.

Conseguenza del risultato di Ringel e Sachs [**4**] e [**5**] è la seguente

Proposizione 5. *Se $G = (V, X)$ è un grafo autocomplementare di ordine $n = 4k + 1$, per ogni isomorfismo $\varphi = (f, g)$ di G su $\bar{G}$, esiste un unico vertice unito di grado $2k$.*

Dimostrazione. Il ciclo di lunghezza 1 corrisponde all'unico vertice unito v_u di V. Ovviamente v_u è di grado $2k$ in G, giacchè per la Proposizione 1 risulta: $\mathrm{gr}_G(v_u) + \mathrm{gr}_G(f(v_u)) = 2\,\mathrm{gr}_G(v_u) = 4k$.

Si provano ora le seguenti proposizioni che caratterizzano i grafi autocomplementari di ordine $n = 4k + 1$.

Proposizione 6. *Se $G = (V, X)$ è un grafo autocomplementare di ordine $n = 4k + 1$, e se C è il sottoinsieme dei vertici di V di grado $2k$, allora il sottografo di G, $H = (C, Y)$, dove Y è il sottoinsieme degli spigoli di X i cui estremi sono vertici di C, è un grafo autocomplementare di ordine dispari.*

Dimostrazione. Sia $\varphi = (f, g)$ un isomorfismo di G su $\bar{G}$. Si considerino i due sottoinsiemi $A=\{v_i \in V/\mathrm{gr}_G(v_i) > 2k\}$ e $B=\{v_i \in V/\mathrm{gr}_G(v_i) < 2k\}$.

Si prova facilmente, ragionando come nella dimostrazione della Proposizione 3, che $f(A) = B$ e quindi che A e B hanno lo stesso ordine. Ne segue che $A \cup B$ è di ordine pari e di conseguenza che C è di ordine dispari. Si vede subito che, se $\bar{H} = (C, \bar{Y})$ è il sottografo di $\bar{G}$ costruito su C, i due sottografi H e $\bar{H}$ sono complementari.

Inoltre, poichè $f(C) = C$, la permutazione di V si spezza nel prodotto lp, dove l è la permutazione che opera su $A \cup B$ e p quella che opera su C. Si verifica poi che $g(Y) = \bar{Y}$, giacchè per ogni spigolo $y = \{v_i, v_j\} \in Y$ risulta $g(Y) = \{p(v_i), p(v_j)\} \in \bar{Y}$.

Indicata infine con h la ridotta della restrizione di g a Y, risulta che $\psi = (p, h)$ è un isomorfismo di H su $\bar{H}$ e quindi che il sottografo H di G è un grafo autocomplementare di ordine dispari.

Proposizione 7. *Se $G = (V, X)$ è un grafo autocomplementare di ordine dispari $n = 4k + 1$ e se v_u è il suo vertice unito in un isomorfismo $\varphi = (f, g)$ di G su $\bar{G}$, detto X_0 il sottoinsieme degli spigoli di X privato dagli spigoli per v_u, e posto $V_0 = V - \{v_u\}$, il sottografo $G_0 = (V_0, X_0)$ di G è autocomplementare.*

Dimostrazione. La permutazione f di V, essendo v_u unito in f, si spezza nel prodotto $f_0(v_u)$, dove f_0 è la permutazione che opera su V_0. Inoltre se X_u e $\bar{X}_u$ sono i sottoinsiemi degli spigoli rispettivamente di G e di $\bar{G}$ che congiungono v_u con i vertici di V_0, si ha che $g(X_u) = \bar{X}_u$. Allora si vede subito che il sottografo $G_0 = (V_0, X_0)$ di G e il sottografo $\bar{G}_0 = (V_0, \bar{X}_0)$ di $\bar{G}$ sono complementari e risulta $g(X_0) = \bar{X}_0$.

Indicata con g_0 la ridotta della restrizione di g a X_0, la coppia $\varphi_0 = (f_0, g_0)$ è un isomorfismo di G_0 su $\bar{G}_0$, ossia G_0 è un grafo autocomplementare.

Proposizione 8. *Se $G = (V, X)$ e $\bar{G} = (V, \bar{X})$ sono due grafi complementari di ordine $n = 4k + 1$, soddisfacenti alle condizioni:*

(a) *V contenga un vertice v_u di grado $2k$, tale che, posto $V_0 = V - \{v_u\}$, i sottografi $G_0 = (V_0, X_0)$ di G, e $\bar{G}_0 = (V_0, \bar{X}_0)$ di $\bar{G}$, dove X_0 e $\bar{X}_0$ sono rispettivamente i sottoinsiemi degli spigoli di X e $\bar{X}$ privati degli spigoli per v_u, siano isomorfi;*

(b) *se $\varphi_0 = (f_0, g_0)$ è un isomorfismo di G_0 su $\bar{G}_0$, per ogni spigolo $x = \{v_u, v_i\} \in X - X_0$, risulti $g(x) = \{v_u, f_0(v_i)\} \in \bar{X} - \bar{X}_0$, allora esiste un isomorfismo di G su $\bar{G}$ che ammette v_u come vertice unito.*

Dimostrazione. Posto $X_u = X - X_0$ e $\bar{X}_u = \bar{X} - \bar{X}_0$, e indicata con f la permutazione $f_0(v_u)$, si può definire la bigezione $g\colon X \to \bar{X}$ in modo che la ridotta della restrizione di g a X_0 sia g_0 e che per ogni spigolo $x = \{v_u, v_i\} \in X_u$ risulti $g(x) = \{v_u, f_0(v_i)\} \in \bar{X}_u$.

Ne segue che $\varphi = (f, g)$ è un isomorfismo di G su $\bar{G}$ che ammette v_u come vertice unito.

Le Proposizioni 6 e 7 danno una condizione necessaria affinchè un grafo G di ordine $n = 4k + 1$ sia autocomplementare, mentre la Proposizione 8 fornisce una condizione sufficiente affinchè un grafo G dello stesso ordine sia autocomplementare.

Bibliografia

[1] R. A. Gibbs, *Self-complementary graphs*, J. Comb. (B) **16** (1974), 106-123.

[2] F. Harary and E. M. Palmer, *Graphical enumeration*, Academic Press, N. Y. and London 1973.

[3] R. C. Read, *On the number of self-complementary graphs and digraphs*, J. London Math. Soc. **38** (1963), 99-104.

[4] G. Ringel, *Selbstkomplementare Graphen*, Arch. Math. **14** (1963), 354-368.

[5] H. Sachs, *Über selbstkomplementare Graphen*, Publ. Math. Debrecen **9** (1962), 270-288.

Summary

This paper gives a necessary condition and a sufficient condition for a graph of even or odd order to be self-complementary.

* * *