Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 245-249

Silvia Pellegrini Manara (*)

Sulla planarità di sottostems di stems planari (**)

Introduzione

Come è noto, gli stems planari non costituiscono una varietà perchè, ovviamente, la somma diretta di stems planari non è mai planare. Non è altrettanto immediato tuttavia stabilire se gli stems planari costituiscano classi chiuse relativamente ad immagini omeomorfe e sottostems.

Per quanto riguarda i quozienti, il problema, posto anche da Pilz in [**4**]$_2$, è stato da noi completamente risolto in [**1**]; affrontiamo qui il problema relativo ai sottostems.

Dimostriamo che i sottostems di uno stem planare finito, se non sono zero-stems o stems a prodotti banali, sono ancora planari. Questo risultato non sussiste se lo stem planare non è finito, come si mostra con un esempio; abbiamo comunque dato una condizione necessaria e sufficiente per la planarità di un sottostem di uno stem planare.

Affrontiamo infine lo studio relativo alla planarità dei sottoanelli di anelli planari dimostrando che N è un anello planare tutti i cui sottoanelli sono planari se e solo se risulta $N = \bigcup_{a \in N^{\#}} Na \cup A_s(N)$ ove ogni Na è un campo, estensione algebrica di un campo isomorfo a Z_p, per p primo fissato.

1 - Generalità

Iniziamo con alcune definizioni e notazioni tratte da [**4**]$_1$. Sia N uno stem sinistro: poniamo $A_s(N) = \{x \in N \,|\, xy = 0,\ \forall y \in N\}$. Due elementi a, b di uno

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A.(C.N.R.). — Ricevuto: 18-XII-1979.

stem sinistro N si dicono *moltiplicatori sinistri equivalenti* (e scriviamo $a \equiv b$) se e soltanto se $\forall n \in N$ $an = bn$. Uno stem sinistro N si dice *planare* se ogni equazione $ax = bx + c$ con $a \not\equiv b$ ha in N una sola soluzione e se $|N/\equiv| \geqslant 3$. Sia N uno stem planare; posto $N^{\#} = N \setminus A_s(N)$, se $a \in N^{\#}$ indichiamo con 1_a l'unica soluzione della $ax = a$ e con $\bar{a}$ l'unica soluzione della $ax = 1_a$. L'insieme $B_a = \{x \in N \mid x\, 1_a = x\}$ risulta un gruppo moltiplicativo, inoltre $\forall x \in N^{\#}$, 1_x è unità sinistra per lo stem N e infine $N = \bigcup_{a \in N^{\#}} B_a \cup A_s(N)$ con $N^{\#} B_a = B_a$ per ogni $a \in N^{\#}$. Questi fatti verranno spesso utilizzati senza esplicito richiamo.

Osservazione 1. *Sia N uno stem planare; per ogni $a \not\equiv 0$ risulta $Na = B_a \cup \{0\}$ e, se $a = xy$, $y \in B_a$.*

Sia xa un elemento di Na: se $x \equiv 0$, allora $xa = 0$, se $x \not\equiv 0$ $xa = (xa)1_a = x(a1_a) = xa$ e quindi in entrambi i casi $xa \in B_a \cup \{0\}$. Se viceversa h è un elemento di B_a allora $h = h1_a = (h\bar{a})a$ e quindi $h \in Na$.

Se poi $a = xy$, dato che $x \not\equiv 0$ allora $\bar{x}a = \bar{x}xy = 1_x y = y$. Poichè $\bar{x}a \in B_a$ si ha la tesi.

2 - Caso finito

Allo scopo di indagare sulla planarità dei sottostems di stems planari, iniziamo col ricordare che un anello intero planare (cfr. [**5**]) finito è un campo e che un campo finito ha tutti i sottoanelli che sono campi: *dunque tutti i sottoanelli di un anello intero planare finito sono planari.* Questo risultato ha portata più generale, come mostra il

Teorema 1. *I sottostems S, con $|S/\equiv| \geqslant 3$, di uno stem planare finito N, sono planari.*

Sia $ax = bx + c$ con $a \not\equiv b$ una equazione con $a, b, c \in S$. Consideriamo la funzione $h: S \to S$, definita da $x \to -bx + ax$; essa è iniettiva perchè se $-bx + ax = -bx' + ax'$, allora $b(x' - x) = a(x' - x)$ e quindi $x = x'$ per la planarità di N. Pertanto, essendo S finito, h è una biiezione; ne segue l'asserto.

3 - Caso non finito

Per il caso non finito iniziamo con l'osservare che in generale i sottostems S di stems planari N non sono tutti planari, anche se $|S/\equiv| \geqslant 3$. Ciò è messo in evidenza anche dal seguente esempio, tratto da $[\mathbf{4}]_1$.

Se in $\boldsymbol{R}^2$ definiamo la somma componente per componente ed il prodotto con la $(x, y)\circ(u, v) = (\sqrt{|x^2-y^2|}\,u, \sqrt{|x^2-y^2|}\,v)$, la struttura $N = [\boldsymbol{R}^2; +, \circ]$ è uno stem planare in cui $(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow |a^2-b^2| = |c^2-d^2|$. Si vede facilmente che il sottostem $B = \{(0, b)/b \in \boldsymbol{R}\}$ di N è planare, mentre il sottostem $C = \{(0, 2b)/b \in \boldsymbol{Z}\}$ è non planare perchè, per esempio, l'equazione $(0, 2)\circ(x, x') = (0, 6)$ ha soluzione $(0, 3)$ che non appartiene a C.

Del resto per gli anelli planari vale il

Teorema 2. *Un sottoanello S con $|S/\equiv| \geqslant 3$ di un anello planare N è planare, se e solo se, $\forall a \in S$, $a \not\equiv 0$, $\bar{a} \in S$.*

Sia S un sottoanello planare di un anello planare N; per $a \in S$ e $a \not\equiv 0$, $1_a \in S$ perchè soluzione dell'equazione $ax = a$. Ne segue che $\bar{a} \in S$ perchè soluzione della $ax = 1_a$.

Sia viceversa N un anello planare ed S un suo sottoanello tale che $\forall a \in S$, $a \not\equiv 0$, anche $\bar{a} \in S$. L'equazione $ax = b$ con $a, b \in S$ ed $a \not\equiv 0$ ha per unica soluzione l'elemento $\bar{a}b$, che appartiene ad S: questo basta per avere l'asserto.

Utilizzando il Teorema 2 caratterizziamo gli anelli planari tutti i cui sottoanelli sono planari.

Teorema 3. *Un anello planare N ha tutti i sottoanelli non contenuti in $A_s(N)$ planari, se e solo se gli Na ($\forall a \equiv 0$) sono campi estensioni algebriche di campi isomorfi allo stesso Z_p, p primo fissato.*

Sia N un anello planare tutti i cui sottoanelli non contenuti in $A_s(N)$ sono planari. Poichè l'insieme Na per $a \not\equiv 0$, è un sottoanello di N non contenuto in $A_s(N)$, allora Na deve essere planare; inoltre (Oss. 1) $Na = B_a \cup \{0\}$ quindi Na è un corpo di unità 1_a. Il sottoanello I generato da 1_a deve essere anch'esso un corpo e, dato che risulta finito, è un campo isomorfo a Z_p. Sia ora S il sottoanello di Na generato da un elemento $b \in Na$: esso deve essere planare e risulta pertanto un campo estensione algebrica semplice di Z_p: Ne segue che ogni elemento di Na è algebrico su Z_p e dunque esiste un $n(a) \in \boldsymbol{N}$ tale che $a^{n(a)} = a$; per il th. 3.1.2. di [**3**], Na è un campo che, per quanto sopra osservato, è estensione algebrica del campo I isomorfo a Z_p. Questo discorso può ripetersi per tutti gli insiemi Nx, $x \not\equiv 0$; d'altra parte se $y \in N$ e $y \not\equiv 0$, allora risulta $py = p(1_a y) = 0y = 0$ e pertanto y ha caratteristica p. Ciò dimostra la prima parte del teorema.

Viceversa sia S un sottoanello di N non contenuto in $A_s(N)$ e sia $s \in S$ con $s \not\equiv 0$. Visto che N è planare, esiste un elemento $a \in N$ tale che $s \in Na$. Poichè Na è un campo estensione algebrica di un campo isomorfo a Z_p, il sottoanello $\bar{S}$ generato da s risulta essere un campo ed $\bar{S} \subseteq S$. L'asserto segue dal Teorema 2.

Più complicato appare lo studio relativo agli stems non finiti che non sono anelli.

Osservazione 2. *Se S è un sottostem di uno stem planare N, allora $A_s(N) = A_s(S)$.*

Infatti ovviamente $A_s(N) \subseteq A_s(S)$, ed inoltre, se $x \in A_s(S)$, x è un divisore dello zero per N e dunque necessariamente $x \in A_s(N)$ (cfr. [4]₁ pag. 257).

Nel seguito indicheremo con $\tilde{B}_a = \{x \in S \mid x1_a = x\}$, ove S è un sottostem di N.

Osservazione 3. *Sia N uno stem planare ed S un suo sottostem planare; risulta $\bigcup_{s \in S \setminus A_s(N)} \tilde{B}_s \subset S$, ove $\tilde{B}_s$ è un sottogruppo di B_s.*

Sia S planare, e sia $s \not\equiv 0$ un elemento di S; l'equazione $sx = s$ deve avere soluzioni in S e quindi $1_s \in S$. Poichè anche la $sx = 1_s$ deve avere soluzioni in S, anche $\bar{s} \in S$, dunque $\tilde{B}_s \subseteq S$. È poi ovvio che $\tilde{B}_s$ è un sottogruppo di B_s.

Dato uno stem planare N, per ogni fissato $x \in N$, indichiamo con $B_x^* = N^{\#} x = \{yx \in N \mid y \in N^{\#}\}$. Osserviamo che se $x \not\equiv 0$ allora $B_x^* = B_x = \{y \in N \mid y_x^1 = y\}$: infatti $N^{\#} B_x = B_x \ \forall x \in N^{\#}$ (cfr. [4]₁ pag. 257) e quindi $B_x^* = N^{\#} x \subset B_x$; viceversa ogni $z \in B_x$ è $z = z1_x = z(\bar{x}x) = (z\bar{x})x \in N^{\#} x$ (cfr. Oss. 1).

Ciò premesso dimostriamo il seguente

Teorema 4. *Sia S con $|S/\equiv| \geqslant 3$, un sottostem di uno stem planare N. Il sottostem S è planare se e solo se sussistono le seguenti condizioni*: (a) $\forall a \in S$, *con* $a \not\equiv 0$, *anche* $\bar{a} \in S$; (b) $\forall z,\ t \in B_x^* \setminus S$, *con* $z = ax$, $t = bx$, *e* $a, b \in S$, *è* $z - t \notin S$.

Supponiamo che S sia un sottostem planare di uno stem planare N: la condizione (a) è ovviamente verificata e per la (b) osserviamo che se esistesse una coppia $\langle ax, bx \rangle$ con $a, b \in S$, tale che $ax - bx \in S$ ed $x \notin S$, S non sarebbe planare.

Viceversa se valgono le condizioni (a) e (b) segue ovviamente che ogni equazione $ax = b$, con $a \not\equiv 0$, a coefficienti in S, ha soluzione in S. Sia ora $ax = bx + c$ una equazione con $a, b, c \in S$, $a \not\equiv b$, $a \not\equiv 0$, $b \not\equiv 0$; essa avrà soluzione $l \in N$ dato che N è planare. Supponiamo per assurdo che $l \notin S$. Se $l \notin S$ anche $bl \notin S$ ed $al \notin S$ (se ciò non fosse sarebbe $\bar{b}bl = l \in S$). Poichè allora $bl,\ al \in B_1^* \setminus S$, per la (b) $-bl + al \notin S$ e ciò è escluso dato che $al = bl + c$ con $c \in S$.

Bibliografia

[1] C. COTTI FERRERO and S. PELLEGRINI MANARA, *On the homomorphic images of planar near-rings*, Atti del Convegno di Taormina 1978.

[2] G. FERRERO, *Stems planari e BIB-disegni*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 79-96.

[3] I. N. HERSTEIN, *Non commutative rings*, Wiley and Sons.

[4] G. PILZ: $[\cdot]_1$ *Near-rings*, North-Holland 1977; $[\cdot]_2$ *On the structure of planar near-rings*, Institutsbericht n. 79, Linz.

[5] G. SZETO, *On the planarity of rings*, J. Algebra (1) **39** (1976), 227-234.

Summary

The subnear-rings of planar near-rings are studied. We show that the subnear-rings of a finite planar near-ring are planar, but if the planar near-ring is not finite, we prove, with an example, that non planar subnear-rings exist. In this case we get a characterization, Afterwards we consider the subrings of planar rings and we get again a characterization.

* * *