Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 199-215

CARLA LODOVICI (*)

Misure associate a un integrale alla Burkill-Cesari (**)

1 - Introduzione

L. Cesari [**8**]$_{1,2}$ ha introdotto il concetto di funzione di insieme quasi additiva e a valori in E_n, $\varphi(I) = (\varphi_r, r = 1, \dots, n)$, $I \in \{I\}$, $I \subset \tilde{I}$, in relazione ad un ordinamento parziale di una data collezione $\mathscr{D} = \{D\}$ di sistemi finiti $D = [I_1, \dots, I_N]$ di insiemi $I_j \in \{I\}$. In tale assiomatica l'integrale $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\varphi, \tilde{I})$ è definito come il limite, nell'insieme parzialmente ordinato $\mathscr{D}$, delle somme $\sum_{I \in D} \varphi(I)$, $D \in \mathscr{D}$. Tale integrale è ora chiamato l'integrale di Burkill-Cesari. Il concetto di funzione quasi additiva d'insieme è assai generale, e il processo di integrazione così definito comprende un gran numero di noti processi di integrazione (cfr. L. Cesari [**8**]$_{1,2}$, J. C. Breckenridge [**7**], G. Warner [**15**]$_{1,2}$). In particolare, L. Cesari ha considerato il caso dell'integrale parametrico di Weierstrass del Calcolo delle Variazioni $J = J(f, T, \varphi)$ per una funzione $f: (p, q) \mapsto f(p, q)$, $p \in E_m, q \in E_k$, positivamente omogenea di grado 1 rispetto a q su una varietà T, rispetto ad una funzione quasi additiva φ a valori in E_k. Egli ha mostrato che, se φ è quasi additiva con $\mathscr{B}(\|\varphi\|, \tilde{I}) < +\infty$, allora la funzione $\Phi(I) = f(T(t), \varphi(I))$, $t \in I$, è anche quasi additiva, cioè l'operatore non lineare f conserva la proprietà di quasi additività, e pertanto l'integrale di Weierstrass

$$J = J(f, T, \varphi) = \lim_{\delta(D) \downarrow 0} \sum_{I \in D} \Phi(I) \tag{1.1}$$

è l'integrale di Burkill-Cesari della funzione Φ rispetto allo stesso ordinamento parziale della collezione $\mathscr{D}$ scelto per la funzione φ.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Via Vanvitelli, 06100 Perugia, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 18-X-1979.

In $[\mathbf{8}]_2$ L. Cesari ha poi dimostrato che, sotto opportune ulteriori ipotesi sulla φ con $\mathscr{B}(\|\varphi\|, \tilde{I}) < +\infty$, e sulle collezioni $\{I\}$ e $\mathscr{D}$, è possibile associare alle funzioni φ, φ_r, $\|\varphi\|$, $|\varphi_r|$, φ_r^+, φ_r^- certe misure ν a valori in E_k e scalari ν_r, μ, μ_r, μ_r^+, μ_r^-, che sono regolari nel minimo σ-anello $\boldsymbol{B}$ contenente una famiglia di insiemi $\mathscr{G} = \{G\}$. Di più L. Cesari ha poi dimostrato che l'integrale di Weierstrass J ha la rappresentazione come un integrale di Lebesgue-Stieltjes

$$J = J(f, T, \varphi) = \int_{\tilde{I}} f(T(u), \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu)\, \mathrm{d}\mu\,, \tag{1.2}$$

ove $\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu$ è la derivata di Radon-Nikodým.

La definizione di L. Cesari in $[\mathbf{8}]_1$ di funzione quasi additiva φ è assai generale tanto che la quasi additività di φ in un insieme $\tilde{I}$ non implica necessariamente la quasi additività di φ in ogni sottoinsieme $I \subset \tilde{I}$, e una delle ipotesi in $[\mathbf{8}]_2$ è appunto quella di supporre che φ sia quasi additiva in ciascun insieme G della collezione $\{\mathscr{G}\}$. Successivamente, J. C. Breckenridge [**7**] ha mostrato che, ove la generalità considerata da L. Cesari non sia desiderabile, è possibile considerare certe varianti assai naturali nella assiomatica originale di L. Cesari così che la quasi additività di φ in $\tilde{I}$ con $\mathscr{B}(\|\varphi\|, \tilde{I}) < +\infty$ implica la quasi additività di φ in ogni sottoinsieme I di $\tilde{I}$.

G. Warner $[\mathbf{15}]_{1,2}$ ha poi mostrato che l'ordinamento parziale della collezione $\mathscr{D}$ introdotto da L. Cesari mediante una funzione *mesh* è equivalente a supporre per $\mathscr{D}$ una qualsiasi rete. Inoltre, G. Warner ha esteso la teoria assiomatica della quasi additività e dell'integrale di Burkill-Cesari a funzioni di insieme $\varphi(I)$ a valori in uno spazio lineare localmente convesso. Recentemente, P. Brandi e A. Salvadori $[6]_{1,2,3}$ hanno poi considerato funzioni di insieme $\varphi(I)$ a valori in uno spazio di Banach, stabilendo teoremi più stringenti di quelli di G. Warner sia nel caso *forte* che nel caso *debole*, e hanno poi mostrato che è ancora possibile introdurre misure regolari per le quali vale la rappresentazione (1.2) mediante un integrale di Bochner. Finalmente, numerose ulteriori ricerche sull'integrale di Weierstrass – parametrico e non parametrico – sono state condotte da vari punti di vista da A. Averna [**1**], M. Ragni $[\mathbf{12}]_{1,2}$, A. Averna-C. Lodovici [**2**], T. Nishiura [**11**], M. Boni $[\mathbf{3}]_{1,2}$, M. Boni-C. Gori [**4**], M. Boni-M. Ragni [**5**], A. W. J. Stoddart [**13**], A. Fiacca [**9**].

In [**2**] abbiamo studiato certe varianti alle definizioni di L. Cesari, non soltanto in vista del caso che $\mathscr{D}$ sia una collezione di *suddivisioni intermedie* di un rettangolo secondo la definizione di C. Vinti $[14]_{1,2}$, o, più in generale, rappresenti una collezione di suddivisioni *in senso stretto*, ma anche per conseguire la quasi additività e l'integrabilità di φ nei sottoinsiemi di $\tilde{I}$ come conseguenza rispettivamente della quasi additività e dell'integrabilità in $\tilde{I}$ senza richiedere che $\mathscr{B}(\|\varphi\|, \tilde{I}) < +\infty$.

Nel presente lavoro continuiamo quanto si è fatto in [**2**]. I concetti di quasi additività e di quasi sub-additività sono gli stessi qui, in [**2**], e gli stessi proposti da L. Cesari in [**8**]$_1$. Nel § **2** riassumiamo gli assiomi relativi alle famiglie $\{I\}$ e $\mathscr{D}=\{D\}$, e all'indice di finitezza (mesh) $\delta: D \mapsto \delta(D)$, $D \in \mathscr{D}$, che ripetiamo qui come in [**2**] con modificazioni solo formali. Questi assiomi sono più restrittivi di quelli di L. Cesari in [**8**]$_1$ ma in tali condizioni, la quasi additività e la quasi sub-additività hanno implicazioni più forti. Infatti L. Cesari e gli altri autori sopra citati suppongono solo che (cfr. [**8**]$_1$, (b)) ogni sistema $D \in \mathscr{D}$ sia una classe finita di insiemi $I \in \{I\}$ non sovrapponentisi, e che (cfr. [**8**]$_1$, (d_1), (d_2)) l'indice di finitezza δ, definito per i soli sistemi $D \in \mathscr{D}$, possa assumere valori (positivi) piccoli quanto si vuole, il che appunto è equivalente all'ipotesi che la famiglia $\mathscr{D}$ sia una rete [**15**]$_1$.

Di più in [**8**]$_1$ non si richiedeva che i sistemi $D \in \mathscr{D}$ possano essere raffinati indefinitamente mediante loro parti.

Nel presente lavoro, come in [**2**], noi supponiamo invece che δ sia definito non soltanto per i sistemi $D \in \mathscr{D}$ ma anche per i sistemi $D_I=[I \cap I_i, i=1, \ldots, N]$ ottenuti intersecando qualunque $I \in \{I\}$ con un qualsiasi $D=[I_i, i=1, \ldots, N]$ (con $D_I \neq \emptyset$). È allora ovvio che qui la mesh δ risulta definita anche per i singoli elementi $I \in \{I\}$. Noi richiediamo altresì, come in [**2**], che, per ogni fissato $D=[I_i, i=1, \ldots, N]$, anche tutti i sistemi $D=D_{I_1} \cup \ldots \cup D_{I_N}$ appartengano a $\mathscr{D}$ e abbiano indici di finitezza che possano rendersi piccoli quanto si vuole prendendo sistemi D_{I_i}, $i=1, \ldots, N$, di indici di finitezza sufficientemente piccoli (cfr. qui assiomi (b_1), (b_2), (b_3), (d_1), (d_2), (d_3) del § **2**). Queste convenzioni sono naturalmente verificate, ad esempio, dalla classe $\mathscr{D}_1$ di *tutte* le suddivisioni finite di un intervallo $[a, b]=\tilde{I} \subset \boldsymbol{R}$ in subintervalli qualsiasi, come pure sono verificate dalle famiglie $\mathscr{I}$ e $\mathscr{S}$ delle decomposizioni *in senso intermedio* e *in senso stretto* di un rettangolo $\tilde{I} \subset \boldsymbol{R}^n$, con gli usuali indici di finitezza. Tuttavia le stesse convenzioni non sono verificate, ad esempio, dal sistema $\mathscr{D}^*$ ottenuto considerando solo le suddivisioni di $[a, b]$ in p parti uguali, p intero primo, $p=2, 3, 5, 7, \ldots$, in quanto che nessuna suddivisione finita di un sistema D di $\mathscr{D}^*$ appartiene anche a $\mathscr{D}^*$. Pertanto gli assiomi (b_1), (b_2), (b_3), (d_1), (d_2), (d_3) rappresentano una restrizione rispetto ai soli assiomi (b), (d_1), (d_2) di L. Cesari in [**8**]$_1$.

D'altra parte, con queste restrizioni, si è già dimostrato in [**2**] che la quasi additività di una funzione vettoriale $\varphi(I)$, $I \in \{I\}$, rispetto ai sistemi $D \in \mathscr{D}$ e all'indice di finitezza δ, garantisce la quasi additività della φ in ciascun insieme $I \in \{I^*\}$ (con $I \in D$ per qualche $D \in \mathscr{D}$) rispetto ai sistemi finiti D_I di I e all'indice di finitezza $\delta(D_I)$, e ciò senza richiedere che risulti $\mathscr{B}(\|\varphi\|, \tilde{I})<+\infty$ (cfr. [**2**], teorema I). Di più l'integrabilità di φ in $\tilde{I}$ garantisce che l'integrale di Burkill-Cesari $\mathscr{B}(\varphi, I)$ è additivo rispetto ai sistemi D_I (cfr. [**2**], teorema III).

Nel presente lavoro dimostriamo, sotto le stesse condizioni, che la quasi sub-additività di una funzione scalare ψ in $\tilde{I}$ rispetto a $\mathscr{D}$ e a δ implica la quasi sub-additività della ψ in ogni insieme $I \in \{I^*\}$ rispetto ai sistemi D_I di I e all'indice di finitezza $\delta(D_I)$.

Sempre nel § **2** introduciamo poi ulteriori lievi restrizioni (e)$'$, (e)$''$ sulle collezioni $\{I\}$ e $\mathscr{D}$. Di nuovo, tali restrizioni sono ad esempio verificate dalle famiglie $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{I}$, $\mathscr{S}$ di cui sopra, ma non sono verificate dalla famiglia $\mathscr{D}^*$. In tali condizioni noi dimostriamo qui un ulteriore teorema di additività per classi di insiemi $I_i \in \{I^*\}$, $i = 1, \dots, N$, con $\bigcup_{i=1}^{n} I_i \in \{I^*\}$ per ogni $n = 1, \dots, N$, e per funzioni φ quasi additive in $\tilde{I}$. Risulta infatti (cfr. qui Teorema VII) $\mathscr{B}(\bigcup_{i=1}^{n} I_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{B}(I_i)$, per ogni $n = 1, \dots, N$.

Finalmente, nel § **3**, studiamo la questione dell'estensione di una funzione quasi additiva $\varphi(I) = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)(I)$, $I \in \{I\}$, e delle relative funzioni $\|\varphi\|$, φ_r^+, φ_r^-, a misure regolari ν, μ, μ_r^+, μ_r^-, essendo ν una misura vettoriale con segno, in modo analogo a quanto fatto da L. Cesari in [**8**]$_2$, sotto opportune ipotesi circa le famiglie $\{I\}$ e $\mathscr{D}$. Noi dimostriamo qui che, sotto le citate ipotesi (b_1), (b_2), (b_3), (d_1), (d_2), (d_3), (e)$'$, (e)$''$, è sufficiente richiedere $\mathscr{B}(\|\varphi\|, \tilde{I}) < +\infty$ e le sole ipotesi (H) simili ad analoghe ipotesi richieste, tra le altre, da L. Cesari in [**8**]$_2$.

2 - Sia $\tilde{I}$ uno spazio topologico e $\mathscr{U}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi aperti di $\tilde{I}$.

Sia $\{I\}$ una collezione di sottoinsiemi I di $\tilde{I}$ tali che per ogni $I \in \{I\}$, $\mathring{I} \neq \emptyset$ (1), $\tilde{I} \in \{I\}$ e inoltre se I, $J \in \{I\}$ e risulta $\mathring{I} \cap \mathring{J} \neq \emptyset$, allora $I \cap J \in \{I\}$.

Sia, poi, $\mathscr{D} = \{D\}$ una famiglia di sistemi finiti $D = [I_1, \dots, I_N]$ di insiemi $I \in \{I\}$ soddisfacenti alle seguenti ipotesi:

(b_1) *gli insiemi di ogni sistema* $D \in \mathscr{D}$ *sono non sovrapponentisi, cioè,* I, $J \in D \Rightarrow \mathring{I} \cap \mathring{J} = \mathring{I} \cap \partial J$ (1) $= \partial I \cap \mathring{J} = \emptyset$;

(b_2) *per ogni insieme* $I \in \{I\}$ *esistono sistemi* $D \in \mathscr{D}$, $D = [I_1, \dots, I_N]$, *tali che sia* $\mathring{I}_i \cap \mathring{I} \neq \emptyset$ *per qualche* $I_i \in D$.

Per ogni $I \in \{I\}$ e per ogni $D = [I_1, \dots, I_N] \in \mathscr{D}$ per cui il requisito (b_2) è soddisfatto, indichiamo con D_I il sistema non vuoto $D_I = [I_i \cap I,\ I_i \in D$ e $\mathring{I}_i \cap \mathring{I} \neq \emptyset]$, e chiamiamo questo sistema la *proiezione* del sistema $D \in \mathscr{D}$ sull'insieme I. Nella definizione di D_I intendiamo che D_I possa essere considerato come una unione ben determinata e finita $D_I = [J_1, \dots, J_M]$ di insiemi $J_s \in \{I\}$, $s = 1, \dots, M$, non sovrapponentisi. La collezione di tutti i sistemi D_I ottenuti dai sistemi $D \in \mathscr{D}$ per un dato I sarà indicata con $\mathscr{D}_I$.

---

(1) Indicheremo con $\mathring{I}$ e ∂I rispettivamente l'apertura e la frontiera di un insieme.

(b_3) *se* $D = [I_1, \dots, I_N]$, *e se* $D_{I_i} \in \mathscr{D}_{I_i}$, $i = 1, \dots, N$, *cioè, per ogni* i, D_{I_i} *è la proiezione su* I_i *di qualche sistema* $D' \in \mathscr{D}$, *non necessariamente lo stesso per i vari* I_i, *allora* $\bar{D} = D_{I_1} \cup \dots \cup D_{I_N} \in \mathscr{D}$, *ove* $D_{I_1} \cup \dots \cup D_{I_N}$ *denota l'unione delle collezioni* $D_{I_1}, \dots, D_{I_N}$.

Spesso, per brevità, indicheremo con (b) gli assiomi (b_1), (b_2), (b_3); la stessa convenzione sarà usata in casi analoghi.

Sia, ora, $\delta: D_I \mapsto \delta(D_I)$ una funzione reale, definita per ogni $D_I \in \mathscr{D}_I$, $I \in \{I\}$, e che soddisfa ai seguenti assiomi

(d_1) $0 < \delta(D_I) < +\infty$, $\forall D_I \in \mathscr{D}_I$, $I \in \{I\}$;

(d_2) *fissati un numero* $\varepsilon > 0$ *e un insieme* $I \in \{I\}$ *vi sono sistemi* $D_I \in \mathscr{D}_I$ *con* $\delta(D_I) < \varepsilon$;

(d_3) *fissati un numero* $\eta > 0$ *e un sistema finito* $D \in \mathscr{D}$, $D = [I_1, \dots, I_N]$, *esiste in corrispondenza un numero* $\tau > 0$ *tale che se* $D_{I_i} \in \mathscr{D}_{I_i}$, $i = 1, \dots, N$, *sono sistemi con* $\delta(D_{I_i}) < \tau$, $i = 1, \dots, N$, *risulta* $\delta(\bar{D}) < \eta$.

Da ora in avanti indichiamo con $\{I^*\}$ la classe di tutti gli insiemi $I \in \{I\}$ che sono elementi di qualche sistema $D \in \mathscr{D}$.

Si noti che, se per due diversi sistemi D, $D' \in \mathscr{D}$ si ha $D_I = D'_I$, allora $\delta(D_I) = \delta(D'_I)$. Si noti anche che se $I \in \{I^*\}$, allora I appartiene a sistemi $D \in \mathscr{D}$, per ciascuno di questi $I = D_I$ e pertanto $\delta(I) = \delta(D_I)$ è definito per tutti gli $I \in \{I^*\}$ (e, come sopra, se questo accade per due diversi D, $D' \in \mathscr{D}$, allora è $\delta(I) = \delta(D_I) = \delta(D'_I)$).

Diremo che una funzione di insieme $\varphi: I \mapsto \varphi(I)$, $I \in \{I\}$, è *quasi additiva* in $\tilde{I}$ rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ e alla funzione *mesh* δ se

(Φ) *fissato arbitrariamente* $\varepsilon > 0$ *esiste un numero* $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ *tale che, se* $D_0 = [I]$, $D_0 \in \mathscr{D}$, *è un qualunque sistema con* $\delta(D_0) < \eta$, *è possibile determinare un altro numero* $\lambda = \lambda(\varepsilon, D_0) > 0$ *in modo che, per ogni sistema* $D = [J] \in \mathscr{D}$, *con* $\delta(D) < \lambda$, *risulta*

$$(\Phi_1) \qquad \sum_{I \in D_0} \left\| \sum{}^{(I)} \varphi(J) - \varphi(I) \right\| < \varepsilon\,, \qquad\qquad (\Phi_2) \qquad \sum_{J \not\subset I} \|\varphi(J)\| < \varepsilon\,,$$

dove $\sum^{(I)}$ è la somma fatta su tutti gli insiemi $J \in D$, $J \subset I$.

Diremo che una funzione scalare di insieme $\psi: I \mapsto \psi(I)$, $I \in \{I\}$, *è quasi sub-additiva* in $\tilde{I}$ rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ e alla funzione *mesh* δ se

(ψ) *fissato arbitrariamente* $\varepsilon > 0$ *esiste un numero* $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ *tale che, se* $D_0 = [I] \in \mathscr{D}$ *è un qualunque sistema con* $\delta(D_0) < \eta$, *è possibile determinare un altro numero* $\lambda = \lambda(\varepsilon, D_0) > 0$, *in modo che, per ogni sistema* $D = [J] \in \mathscr{D}$ *con* $\delta(D) < \lambda$, *risulta*

$$(\psi_1) \qquad \sum_{I \in D_0} \left[\sum{}^{(I)} \psi(J) - \psi(I) \right]^- < \varepsilon.$$

Se, poi, I è un qualunque elemento di $\{I\}$, diremo che φ è *quasi additiva* in I oppure ψ è *quasi sub-additiva* in I, se φ o ψ hanno tale proprietà relativamente ai sistemi $D_I \in \mathscr{D}_I$ e indici di finitezza $\delta(D_I)$.

Data la funzione vettoriale di insieme $\varphi: I \mapsto \varphi(I) = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)(I)$, $I \in \{I\}$, poniamo, al solito,

$$_*\mathscr{B}_r = {_*\mathscr{B}_r}(\varphi_r, \tilde{I}) = \liminf_{\delta(D)\to 0} S(\varphi_r, D)\,, \qquad r = 1, \dots, k\,,$$

$$^*\mathscr{B}_r = {^*\mathscr{B}_r}(\varphi_r, \tilde{I}) = \limsup_{\delta(D)\to 0} S(\varphi_r, D)\,, \qquad r = 1, \dots, k\,,$$

dove $S(\varphi_r, D)$ rappresenta la somma $\sum_{I\in D} \varphi_r(I)$.

Se risulta $_*\mathscr{B}_r = {^*\mathscr{B}_r}$ e tale numero è finito, diremo che la φ_r è integrabile in $\tilde{I}$; se ciò accade per ogni $r = 1, \dots, k$ diremo che la φ è integrabile in $\tilde{I}$, e scriveremo

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}(\varphi, \tilde{I}) = (\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_k) = \lim_{\delta(D)\downarrow 0} S(\varphi, D)\,.$$

Se ψ è una funzione scalare non negativa $\psi: I \mapsto \psi(I)$, $I \in \{I\}$, ai simboli $_*\mathscr{B}(\psi)$, $^*\mathscr{B}(\psi)$, $\mathscr{B}(\psi)$ sostituiamo rispettivamente $_*V(\psi)$, $^*V(\psi)$, $V(\psi)$, ove ora ammetteremo per questi funzionali anche il valore $+\infty$. Pertanto risulta $0 \leqq {_*V} \leqq {^*V} \leqq +\infty$ e $0 \leqq V \leqq +\infty$ se V esiste.

Sussiste (cfr. [**2**], § 3) il seguente

Teorema I. *Siano soddisfatte le proprietà* (b), (d) *e inoltre la funzione* $\varphi: I \mapsto \varphi(I)$, $I \in \{I\}$, *sia quasi additiva in* $\tilde{I}$ *rispetto a* $\mathscr{D}$ *e a* δ. *In queste condizioni la* φ *risulta quasi additiva in ogni* $I \in \{I^*\}$ *rispetto a* $\mathscr{D}$ *e a* δ.

Dimostriamo ora le seguenti proposizioni.

Teorema II. *Supponiamo che siano soddisfatte le proprietà* (b), (d) *e che la funzione* (*scalare*) $\psi: I \mapsto \psi(I)$, $I \in \{I\}$, *sia quasi sub-additiva in* $\tilde{I}$ *rispetto a* $\mathscr{D}$ *e a* δ. *In queste condizioni la* ψ *risulta quasi sub-additiva in ogni* $I \in \{I^*\}$ *rispetto a* $\mathscr{D}$ *e a* δ.

Sia $I \in \{I^*\}$. Fissato arbitrariamente un numero $\varepsilon > 0$, sia $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ il numero determinato mediante la (ψ). Se D_0 è un sistema finito contenente l'insieme I, $D_0 = [I, I_1, \dots, I_N]$, possiamo considerare N sistemi $D_{0I_i} \in \mathscr{D}_{I_i}$, $i = 1, \dots, N$, con $\delta(D_{0I_i}) < \tau$ e un altro sistema $D_{0I} \in \mathscr{D}_I$ con $\delta(D_{0I}) < \tau$, essendo $\tau = \tau(\eta, D_0)$ il numero determinato mediante la (d_3).

Il sistema $\bar{D}_0 = D_{0I} \cup D_{0I_1} \cup \dots \cup D_{0I_N} = [\tilde{I}]$ è quindi tale che $\bar{D}_0 \in \mathscr{D}$ (cfr. (b_3)) e inoltre $\delta(\bar{D}_0) < \eta$ (cfr. (d_3)).

Detti ora $\lambda = \lambda(\varepsilon, \bar{D}_0) > 0$ l'altro numero determinato mediante la (ψ) e $\tau' = \tau'(\lambda, \bar{D}_0)$ il numero determinato mediante la (d_3), andiamo a considerare un sistema finito $D_I \in \mathscr{D}_I$ con $\delta(D_I) < \tau'$ e N sistemi finiti $D_{I_i} \in \mathscr{D}_{I_i}$ con $\delta(D_{I_i}) < \tau'$, $i = 1, \ldots, N$.

Il sistema $\bar{D} = D_I \cup D_{I_1} \cup \ldots \cup D_{I_N} = [J]$ appartiene a $\mathscr{D}$ e inoltre risulta $\delta(\bar{D}) < \lambda$. Dall'essere

$$\sum_{\bar{I}\in\bar{D}_0} [\sum_{\substack{J\in\bar{D}\\ J\subset\bar{I}}} \psi(J) - \psi(\bar{I})]^- = \sum_{i=1}^{N} \{ \sum_{\bar{I}\in D_{0I_i}} [\sum_{\substack{J\in D_{I_i}\\ J\subset\bar{I}}} \psi(J) - \psi(\bar{I})]^- \} + \sum_{\bar{I}\in D_{0I}} [\sum_{\substack{J\in D_I\\ J\subset\bar{I}}} \psi(J) - \psi(\bar{I})]^- < \varepsilon,$$

segue

$$\sum_{\bar{I}\in D_{0I}} [\sum_{\substack{J\in D_I\\ J\subset\bar{I}}} \psi(J) - \psi(\bar{I})]^- < \varepsilon .$$

Teorema III. *Sotto le condizioni* (b), (d), (Φ), *e per ogni* $I \in \{I^*\}$, *esistono i seguenti limiti*

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}(I) &= \mathscr{B}(\varphi, I) = \lim_{\delta(D_I)\downarrow 0} S(\varphi, D_I) && \mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_k),\\
\mathscr{B}_r(I) &= \mathscr{B}(\varphi_r, I) = \lim_{\delta(D_I)\downarrow 0} S(\varphi_r, D_I) && -\infty < \mathscr{B}_r < +\infty,\\
V(I) &= V(\|\varphi\|, I) = \lim_{\delta(D_I)\downarrow 0} S(\|\varphi\|, D_I) && 0 \leqq V \leqq +\infty,\\
V_r(I) &= V(|\varphi_r|, I) = \lim_{\delta(D_I)\downarrow 0} S(|\varphi_r|, D_I) && 0 \leqq V_r \leqq +\infty,\\
V_r^+(I) &= V(\varphi_r^+, I) = \lim_{\delta(D_I)\downarrow 0} S(\varphi_r^+, D_I) && 0 \leqq V_r^+ \leqq +\infty,\\
V_r^-(I) &= V(\varphi_r^-, I) = \lim_{\delta(D_I)\downarrow 0} S(\varphi_r^-, D_I), && 0 \leqq V_r^- \leqq +\infty,
\end{aligned}$$

$$D_I \in \mathscr{D}_I, \ r = 1, \ldots, k; \ \forall I \in \{I^*\}.$$

L'esistenza dei primi due limiti segue immediatamente dal nostro Teorema I e dal teorema (2. v) di [**8**]$_1$, mentre l'esistenza degli ultimi quattro limiti è conseguenza dei teoremi (3. ii) e (2. v) di [**8**]$_1$ e del nostro Teorema II.

Teorema IV. *Sotto le condizioni* (b), (d), (Φ) *e* $V(\tilde{I}) < +\infty$, *risulta*

(2.1) $\quad V_r^+(I) - V_r^-(I) = \mathscr{B}_r(I), \qquad V_r^+(I) + V_r^-(I) = V_r(I)$

(2.2) $\quad |\mathscr{B}_r(I)| \leqq V_r(I) \leqq V(I)$

(2.3) $\quad \|\mathscr{B}(I)\| = [\sum_{r=1}^{k} \mathscr{B}_r^2(I)]^{\frac{1}{2}} \leqq [\sum_{r=1}^{k} V_r^2(I)]^{\frac{1}{2}} \leqq V(I) \leqq \sum_{r=1}^{k} V_r(I), \qquad \forall I \in \{I^*\}.$

Poiché possiamo scrivere

$$V_r^+(I) - V_r^-(I) = \lim_{\delta(D_I)\downarrow 0} S(\varphi_r^+, D_I) - \lim_{\delta(D_I)\downarrow 0} S(\varphi_r^-, D_I)$$

$$= \lim_{\delta(D_I)\downarrow 0} \sum_{J\in D_I} [\varphi_r^+(J) - \varphi_r^-(J)] = \lim_{\delta(D_I)\downarrow 0} \sum_{J\in D_I} \varphi_r(J) = \mathscr{B}_r(I)\,,$$

è provata la prima delle (2.1); analogamente si giunge alla seconda relazione della (2.1). Risulta inoltre

$$|\mathscr{B}_r(I)| \leqq \lim_{\delta(D_I)\downarrow 0} \sum_{J\in D_I} |\varphi_r(J)| = V_r(I)$$

$$\leqq \lim_{\delta(D_I)\downarrow 0} \sum_{J\in D_I} \|\varphi(J)\| = V(I)\,,$$

e con ciò è provata la (2.2).

Tenendo poi presente la (2.2) e che

$$\{\sum_{r=1}^{k} [\sum_{J\in D_I} |\varphi_r(J)|]^2\}^{\frac12} \leqq \sum_{J\in D_I} [\sum_{r=1}^{k} \varphi_r^2(J)]^{\frac12} \leqq \sum_{r=1}^{k} \sum_{J\in D_I} |\varphi_r(J)|\,, \tag{2.4}$$

possiamo scrivere

$$\|\mathscr{B}(I)\| = \{\sum_{r=1}^{k} \mathscr{B}_r^2(I)\}^{\frac12} \leqq \{\sum_{r=1}^{k} V_r^2(I)\}^{\frac12} \leqq V(I) \leqq \sum_{r=1}^{k} V_r(I)\,,$$

che altro non è che la (2.3).

Teorema V. *Siano soddisfatte le ipotesi del Teorema III e risulti inoltre* $V(\tilde{I}) < +\infty$. *In queste condizioni*

(i) *le funzioni* φ, φ_r, $\|\varphi\|$, $|\varphi_r|$, φ_r^+, φ_r^-, *sono quasi additive in ogni* $I \in \{I^*\}$;

(ii) *fissato arbitrariamente un numero* $\varepsilon > 0$, *esiste un altro numero* $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ *con le proprietà:*

(ii)$_1$ $\|S(\varphi, D_I) - \mathscr{B}(I)\| < \varepsilon$, $|S(\|\varphi\|, D_I) - V(I)| < \varepsilon$ (2) $\forall D_I \in \mathscr{D}_I$ *con* $\delta(D_I) < \sigma$, $\forall I \in \{I^*\}$;

---

(2) Relazioni analoghe sussistono per V_r, V_r^+, V_r^-, $r = 1, \ldots, k$.

(ii)$_2$ *inoltre, fissato arbitrariamente un insieme* $\bar I \in \{I^*\}$, *se* $D_{0\bar I} \in \mathscr{D}_{\bar I}$ *è tale che* $\delta(D_{0\bar I}) < \sigma$, *esiste un numero* $\lambda = \lambda(\varepsilon, D_{0\bar I}) > 0$ *in modo che si abbia*

$$\sum_{I \in D_{0\bar I}} \Big\| \sum\nolimits^{(I)} \varphi(J) - \varphi(I) \Big\| < \varepsilon\,, \qquad \sum_{\substack{J \not\subset I \\ I \in D_{0\bar I}}} \| \varphi(J) \| < \varepsilon\,,$$

$$\sum_{I \in D_{0\bar I}} \Big| \sum\nolimits^{(I)} \| \varphi(J) \| - \| \varphi(I) \| \Big| < \varepsilon \qquad \forall D_{\bar I} = [J] \in \mathscr{D}_{\bar I} \text{ con } \delta(D_{\bar I}) < \lambda\,.$$

La proprietà (i) si consegue facilmente tenendo presente le proposizioni (3. ii), (3. i) di [**8**]$_1$ e il nostro Teorema I; la proprietà (ii)$_1$ è conseguenza immediata di (i) e del teorema 4 di [**2**], mentre la proprietà (ii)$_2$ segue subito dalla (Φ) e dalla (i).

Introduciamo ora due nuovi assiomi:

(e)$'$ *siano fissati arbitrariamente un numero* $\varepsilon > 0$ *e due insiemi* I_1, $I_2 \in \{I^*\}$, *non sovrapponentisi. Se* $I_0 = I_1 \cup I_2 \in \{I^*\}$ *esiste un sistema finito* $D \in \mathscr{D}$ *con* $\delta(D) < \varepsilon$ *con le proprietà*

$$D_{I_1} \in \mathscr{D}_{I_1}, \quad D_{I_2} \in \mathscr{D}_{I_2}, \qquad \delta(D_{I_1}) < \varepsilon, \quad \delta(D_{I_2}) < \varepsilon\,,$$

$$D_{I_0} = D_{I_1} \cup D_{I_2} \in \mathscr{D}_{I_0}, \qquad \delta(D_{I_0}) < \varepsilon\,,$$

ove, come abbiamo già precisato, $D_{I_1} \cup D_{I_2}$ denota l'unione delle due collezioni D_{I_1} e D_{I_2};

(e)$''$ *fissati arbitrariamente un numero* $\alpha > 0$ *e due insiemi* I_1, $I_2 \in \{I^*\}$, $I_1 \subset I_2$, *esiste un sistema finito* $D \in \mathscr{D}$ *con* $\delta(D) < \alpha$, *tale che*

$$D_{I_1} \in \mathscr{D}_{I_1}\,, \quad D_{I_2} \in \mathscr{D}_{I_2}\,, \quad \delta(D_{I_1}) < \alpha\,, \quad \delta(D_{I_2}) < \alpha\,, \quad D_{I_1} \subset D_{I_2} \text{ (}^3\text{)}\,.$$

Sussistono le seguenti proposizioni.

Teorema VI. *Siano verificate le condizioni* (b), (d), (Φ), (e)$''$. *Se* I_1, $I_2 \in \{I^*\}$ *sono due insiemi tali che* $I_1 \subset I_2$, *risulta*

$$V(I_1) \leqq V(I_2)\,; \tag{2.5}$$

analoghe relazioni sussistono per V_r, V_r^+, V_r^-, $r = 1, \ldots, k$.

---

[3] La scrittura $D_{I_1} \subset D_{I_2}$ sta a indicare che ogni elemento di D_{I_1} è elemento di D_{I_2}.

Fissato arbitrariamente un numero $\alpha > 0$, per la (e)$''$ è possibile determinare un sistema finito $D \in \mathscr{D}$ con le proprietà $D_{I_1} \subset D_{I_2}$, $\delta(D_{I_1}) < \alpha$, $\delta(D_{I_2}) < \alpha$. Si ha allora $S(\|\varphi\|, D_{I_1}) \leqq S(\|\varphi\|, D_{I_2})$, e, pertanto, passando al limite per $\alpha \to 0$, segue infine $V(I_1) \leqq V(I_2)$.

Teorema VII. *Siano verificate le ipotesi* (b), (d), (Φ), (e)$'$ *e siano* $I_1, \ldots, I_N$ *elementi di* $\{I^*\}$ *non sovrapponentisi presi in modo che* $\bigcup_{i=1}^{n} I_i \in \{I^*\}$, $n = 1, \ldots, N$. *In queste condizioni risulta*

$$\mathscr{B}\Big(\bigcup_{i=1}^{N} I_i\Big) = \sum_{i=1}^{N} \mathscr{B}(I_i)\,, \qquad V\Big(\bigcup_{i=1}^{N} I_i\Big) = \sum_{i=1}^{N} V(I_i)\,. \tag{2.6}$$

Analoghe relazioni sussistono per V_r, V_r^+, V_r^-, $r = 1, \ldots, k$.

Fissati arbitrariamente un numero $\varepsilon > 0$, in corrispondenza degli insiemi I_1 e I_2 esiste (cfr. (e)$'$) un sistema finito $D \in \mathscr{D}$ con le proprietà: $D_{I_i} \in \mathscr{D}_{I_i}$, $\delta(D_{I_i}) < \varepsilon$, $i = 1, 2$; inoltre, posto $I_0 = I_1 \cup I_2$, risulta

$$D_{I_0} = D_{I_1} \cup D_{I_2}\,, \qquad D_{I_0} \in \mathscr{D}_{I_0}\,, \qquad \delta(D_{I_0}) < \varepsilon\,.$$

Per il modo come sono stati scelti gli insiemi I_1 e I_2, i sistemi D_{I_1} e D_{I_2} *non* hanno elementi in comune e risulta pertanto

$$S(\varphi, D_{I_0}) = \sum_{i=1}^{2} S(\varphi, D_{I_i})\,, \tag{2.7}$$

da cui discende

$$\mathscr{B}(I_1 \cup I_2) = \sum_{i=1}^{2} \mathscr{B}(I_i)\,; \tag{2.7$'$}$$

analoghe relazioni sussistono per V e per V_r, V_r^+, V_r^-, $r = 1, \ldots, k$.

Supponiamo ora che sussista la relazione

$$\mathscr{B}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} I_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{B}(I_i)\,, \qquad n < N\,, \tag{2.8}$$

e proviamo che da questa segue

$$\mathscr{B}\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} I_i\Big) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathscr{B}(I_i)\,. \tag{2.8$'$}$$

Invero per la (2.7)′ si ha

$$\mathscr{B}(\bigcup_{i=1}^{n+1} I_i) = \mathscr{B}(\bigcup_{i=1}^{n} I_i) + \mathscr{B}(I_{n+1}),$$

da cui, tenendo presente la (2.8), segue

$$\mathscr{B}(\bigcup_{i=1}^{n+1} I_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathscr{B}(I_i),$$

e pertanto risulta

$$\mathscr{B}(\bigcup_{i=1}^{N} I_i) = \sum_{i=1}^{N} \mathscr{B}(I_i). \tag{2.9}$$

Analoghe relazioni sussistono per V e per V_r, V_r^+, V_r^-, $r = 1, \ldots, k$.

Formuliamo ora i seguenti assiomi.

(H$_1$) *Se* $I_i \in \{I^*\}$, $i = 1, 2, \ldots$, *e* $I_i \to \emptyset$ *per* $i \to \infty$, *allora* $V(I_i) \to 0$ *per* $i \to \infty$; *analoghe relazioni sussistono per* $\mathscr{B}$ *e per* V_r, V_r^+, V_r^-, $r = 1, \ldots, k$.

(H$_2$) *Se* I_0, $I_i \in \{I^*\}$, $i = 1, 2, \ldots$, $I_i \subset I_{i+1}$, $I_i \to I_0$ *per* $i \to \infty$, *allora* $V(I_i) \to V(I_0)$ *per* $i \to \infty$; *analoghe relazioni sussistono per* $\mathscr{B}$ *e per* V_r, V_r^+, V_r^-, $r = 1, \ldots, k$.

(H$_3$) *Se* $I_i \in \{I^*\}$, $i = 1, 2, \ldots$, *e* $I = \cup I_i \in \{I^*\}$, $I_1 \cup \ldots \cup I_n \in \{I^*\}$ *per ogni* n, *risulta* $V(I) \leqq \sum_i V(I_i)$; *analoghe relazioni sussistono per* V_r, V_r^+, V_r^-, $r = 1, \ldots, k$.

Siamo ora in grado di provare il seguente

Teorema VIII. *Siano verificate le ipotesi* (b), (d), (Φ), (e)′, (H_2) *e sia* $\{I_i\}$ *una successione di elementi di* $\{I^*\}$ *non sovrapponentisi tale che* $\bigcup_{i=1}^{n} I_i \in \{I^*\}$ *per* $n = 1, 2, \ldots$, *e* $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \in \{I^*\}$. *In queste condizioni risulta*

$$\mathscr{B}(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}(I_i). \tag{2.10}$$

Analoghe relazioni sussistono per V *e per* V_r, V_r^+, V_r^-, $r = 1, \ldots, k$.

Posto

$$U_n = \bigcup_{i=1}^{n} I_i, \qquad U_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \tag{2.11}$$

risulta $U_n \subset U_{n+1}$, $U_n \to U_0$ per $n \to \infty$, e pertanto da (H_2) segue

$$\mathscr{B}(U_n) \to \mathscr{B}(U_0)\,, \qquad n \to \infty\,. \tag{2.12}$$

In corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ esiste pertanto un $n_\varepsilon \in \boldsymbol{N}$ in modo che

$$|\mathscr{B}_r(U_n) - \mathscr{B}_r(U_0)| < \varepsilon\,, \qquad r = 1, \ldots, k,\ \forall n > n_\varepsilon\,, \tag{2.12$'$}$$

da cui (cfr. (2.11) e (2.9)) segue

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \mathscr{B}_r(I_i) - \mathscr{B}_r(U_0)\Big| < \varepsilon\,, \qquad r = 1, \ldots, k,\ \forall n > n_\varepsilon\,, \tag{2.13}$$

si ha quindi infine

$$\mathscr{B}(U_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}(I_i)\,. \tag{2.14}$$

3 – Indichiamo con $\mathscr{G}$ una famiglia di insiemi con $\emptyset \in \mathscr{G}$, $\tilde{I} \in \mathscr{G}$, $\mathscr{G} - \emptyset \subset \{I^*\}$ e che soddisfa alla proprietà

(a) *sia chiusa rispetto all'unione infinita e alla intersezione finita.*

Detta $\boldsymbol{B}$ la più piccola σ-algebra contenente $\mathscr{G}$ e $\mathscr{M}$ la σ-algebra ereditaria di tutti i sottoinsiemi M di $\tilde{I}$, andiamo a definire in $\mathscr{M}$ le seguenti funzioni (4)

$$\begin{aligned} \mu(M) &= \inf_{\substack{G\in\mathscr{G}\\ G\supset M}} V(G)\,, & \mu_r(M) &= \inf_{\substack{G\in\mathscr{G}\\ G\supset M}} V_r(G)\,, \\ \mu_r^+(M) &= \inf_{\substack{G\in\mathscr{G}\\ G\supset M}} V_r^+(G)\,, & \mu_r^-(M) &= \inf_{\substack{G\in\mathscr{G}\\ G\supset M}} V_r^-(G)\,, \end{aligned} \qquad r = 1, \ldots, k\,. \tag{3.1}$$

Se $V(\tilde{I}) \in \boldsymbol{R}$ anche $\mu(M)$, $\mu_r(M)$, $\mu_r^+(M)$, $\mu_r^-(M) \in \boldsymbol{R}$, $\forall M \in \mathscr{M}$, e possiamo allora definire la seguente funzione vettoriale

$$\nu(M) = (\nu_1, \ldots, \nu_k)(M)\,, \qquad \text{con} \qquad \nu_r(M) = \mu_r^+(M) - \mu_r^-(M) \in \boldsymbol{R}\,. \tag{3.2}$$

Sussistono le seguenti proposizioni.

Teorema IX. *Siano verificate le ipotesi* (a), (b), (d), (Φ), (e)$''$. *In queste condizioni esiste una successione di insiemi* $\{G_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$, $G_n \in \mathscr{G}$, $G_n \supset M$, $n = 1, 2, \ldots$, *con le proprietà*: $V(G_n) \overset{n\downarrow\infty}{\longrightarrow} \mu(M)$, $V_r(G_n) \overset{n\downarrow\infty}{\longrightarrow} \mu_r(M)$, $V_r^+(G_n) \overset{n\downarrow\infty}{\longrightarrow} \mu_r^+(M)$,

(4) Abbiamo supposto naturalmente la φ *quasi additiva* in $\tilde{I}$ rispetto a $\mathscr{D}$ e a δ.

$V_r^-(G_n) \xrightarrow{n\downarrow\infty} \mu_r^-(M)$, $r = 1, \ldots, k$. *Se inoltre* $V(\tilde{I}) < +\infty$, *risulta*

$$\mathscr{B}_r(G_n) \xrightarrow{n\downarrow\infty} \nu_r(M)\,, \qquad r = 1, \ldots, k\,.$$

È possibile determinare delle successioni di insiemi di $\mathscr{G}$, $\{G_{0n}\}$, $\{G_{rn}\}$, $\{G_{rn}^+\}$, $\{G_{rn}^-\}$, i cui elementi contengono M e tali che

$$V(G_{0n}) \xrightarrow{n\downarrow\infty} \mu(M)\,, \qquad V_r(G_{rn}) \xrightarrow{n\downarrow\infty} \mu_r(M)\,,$$

$$V_r^+(G_{rn}^+) \xrightarrow{n\downarrow\infty} \mu_r^+(M)\,, \qquad V_r^-(G_{rn}^-) \xrightarrow{n\downarrow\infty} \mu_r^-(M)\,.$$

Ora osserviamo che se $\{G_n\}$, $\{G_n'\}$ sono successioni di insiemi con $M \subset G_n \subset G_n'$, $V(G_n') \xrightarrow{n\downarrow\infty} \mu(M)$, si ha pure $V(G_n) \xrightarrow{n\downarrow\infty} \mu(M)$.

Infatti, nelle condizioni in cui ci siamo posti, risulta (cfr. Teorema VI) $\mu(M) \leqq V(G_n) \leqq V(G_n')$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$, da cui $\lim\limits_{n\to\infty} V(G_n) = \mu(M)$.

Se consideriamo quindi la successione (di insiemi) $G_n = G_{0n} \cap G_{rn} \cap G_{rn}^+ \cap G_{rn}^-$, $r = 1, \ldots, k$, $n = 1, 2, \ldots$, risulta $G_n \supset M$ e inoltre $V(G_n) \xrightarrow{n\downarrow\infty} \mu(M)$, $V_r(G_n) \xrightarrow{n\downarrow\infty} \mu_r(M)$, $V_r^+(G_n) \xrightarrow{n\downarrow\infty} \mu_r^+(M)$, $V_r^-(G_n) \xrightarrow{n\downarrow\infty} \mu_r^-(M)$, $r = 1, \ldots, k$, c.v.d.

Teorema X. *Nelle ipotesi del Teorema IX, risulta*

$$\mu_r(M) = \mu_r^+(M) + \mu_r^-(M)\,, \qquad r = 1, \ldots, k,\ \forall M \in \mathscr{M}\,. \tag{3.3}$$

Se è inoltre $V(\tilde{I}) < +\infty$, *si ha*

$$|\nu_r(M)| \leqq \mu_r(M) \leqq \mu(M)\,, \tag{3.4}$$

$$\|\nu(M)\| = \{\sum_{r=1}^{k} \nu_r^2(M)\}^{\frac{1}{2}} \leqq \{\sum_{r=1}^{k} \mu_r^2(M)\}^{\frac{1}{2}} \leqq \mu(M) \leqq \sum_{r=1}^{k} \mu_r(M)\,. \tag{3.5}$$

Si perviene subito alle relazioni (3.3), (3.4) e (3.5) tenendo presente il Teorema IV e le (3.1).

Teorema XI. *Sotto le ipotesi del Teorema IX sussistono le relazioni*

$$\mu(G) = V(G)\,, \tag{3.6}$$

$$\mu_r(G) = V_r(G)\,, \qquad \mu_r^+(G) = V_r^+(G)\,, \qquad \mu_r^-(G) = V_r^-(G)\,, \qquad r = 1, \ldots, k\,, \tag{3.7}$$

che sono valide per ogni $G \in \mathscr{G}$. *Se* $V(\tilde{I}) < +\infty$ *risulta inoltre*

$$\nu(G) = \mathscr{B}(G)\,, \qquad \forall G \in \mathscr{G}\,. \tag{3.8}$$

Sia $G \in \mathscr{G}$; poiché $V(G) \leqq V(U)$, $\forall U \in \mathscr{G}$, $U \supset G$ segue

$$V(G) = \inf_{\substack{U \in \mathscr{G} \\ U \supset G}} V(U) = \mu(G) .$$

Analoghe relazioni sussistono per μ_r, μ_r^+, μ_r^-.

Teorema XII. *Siano verificate le ipotesi del Teorema IX e inoltre l'ipotesi* (H_1). *In queste condizioni si ha*

$$\mu(\emptyset) = \mu_r(\emptyset) = \mu_r^+(\emptyset) = \mu_r^-(\emptyset) = 0 , \qquad r = 1, \ldots, k . \tag{3.9}$$

Omettiamo la dimostrazione perché immediata.

Teorema XIII. *Nelle ipotesi* (a), (b), (d), (Φ), (e)$''$, (H_1), (H_3), $V(\tilde{I}) < +\infty$, *le funzioni* μ, μ_r, μ_r^+, μ_r^- *sono misure esterne in* $\mathscr{M}$.

Ci limiteremo a provare il Teorema per la funzione μ; per le altre funzioni la dimostrazione è del tutto analoga.

Osserviamo, intanto, (cfr. (3.1)) che μ è definita nella σ-algebra ereditaria $\mathscr{M}$ e che risulta

$$\mu(M) \geqq 0 , \qquad \forall M \in \mathscr{M} . \tag{3.10}$$

Andiamo a considerare due insiemi $E, F \in \mathscr{M}$, $E \subset F$. Poiché $\mu(E) = \inf\limits_{\substack{G \in \mathscr{G} \\ G \supset E}} V(G)$, $\mu(F) = \inf\limits_{\substack{G \in \mathscr{G} \\ G \supset F}} V(G)$, risulta

$$\mu(E) \leqq \mu(F) , \tag{3.11}$$

e pertanto la μ è una funzione *monotona*.

Sia ora $\{E_i\}_{i \in N}$, $E_i \in \mathscr{M}$, una successione di insiemi e poniamo $E = \bigcup\limits_i E_i$. Per ogni E_i consideriamo la successione $\{G_n^{(i)}\}$, $G_n^{(i)} \in \mathscr{G}$, $G_n^{(i)} \supset E_i$, con la proprietà $\lim\limits_{n \to \infty} V(G_n^{(i)}) = \mu(E_i)$.

Fissato arbitrariamente un numero $\varepsilon > 0$, esiste pertanto un elemento $G_{\bar{n}}^{(i)}$ di $\{G_n^{(i)}\}_{n \in N}$ in modo da aversi $\mu(E_i) \leqq V(G_{\bar{n}}^{(i)}) \leqq \mu(E_i) + \varepsilon/2^i$.

Poiché $E \subset \bigcup\limits_i G_{\bar{n}}^{(i)}$, tenendo presente (3.11), il Teorema XI e (H_3), si ha ancora $\mu(E) \leqq V(\bigcup\limits_i G_{\bar{n}}^{(i)}) \leqq \sum\limits_{i=1}^{\infty} V(G_{\bar{n}}^{(i)}) \leqq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon$, da cui $\mu(E) \leqq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$, cioè la μ è *contabilmente sub-additiva*.

Poiché poi $\mu(\emptyset) = 0$ (cfr. qui Teorema XII) è provato che la μ è una *misura esterna* in $\mathscr{M}$ (cfr. [**10**], pag. 42).

Teorema XIV. *Condizione necessaria e sufficiente perché un insieme* $E \in \mathscr{M}$ *sia* μ*-misurabile è che risulti*

$$\mu(G) \geqq \mu(G \cap E) + \mu(G - E)\,, \qquad \forall G \in \mathscr{G}\,. \tag{3.12}$$

Infatti se $E \in \mathscr{M}$ è un insieme μ-misurabile, si ha $\mu(M) \geqq \mu(M \cap E) + \mu(M - E)$, $\forall M \in \mathscr{M}$, da cui segue la (3.12).

Inversamente, fissato arbitrariamente un insieme $M \in \mathscr{M}$, sia $U \in \mathscr{G}$ un altro insieme tale che $U \supset M$; risulta (cfr. Teorema XI, (3.12) e (3.11)): $V(U) = \mu(U) \geqq \mu(U \cap E) + \mu(U - E) \geqq \mu(M \cap E) + \mu(M - E)$ e quindi $\mu(M) \geqq \mu(M \cap E) + \mu(M - E)$, $\forall M \in \mathscr{M}$, cioè l'insieme E è μ-misurabile.

Introduciamo ora l'assioma

(H_4) *Dato* $G_0 \in \mathscr{G}$, *esiste una successione di insiemi* $G_n \in \mathscr{G}$, $n = 1, 2, \ldots$, *tale che, detta* $\bar{G}_n$ *la chiusura di* G_n *nella topologia* $\mathscr{G}$, *si ha* $G_n \subset G_0$, $G_n \subset \bar{G}_n \subset G_{n+1}$ $n = 1, 2, \ldots$ *e inoltre* $\lim_{n\to\infty} V(G_n) = V(G_0)$. *Analoghe relazioni sussistono per* $\mathscr{B}$, V_r, V_r^+, V_r^-, $r = 1, \ldots, k$.

Per brevità, indicheremo con (H') gli assiomi (H_1), (H_2), (H_3) e (H_4).

Siamo finalmente in grado di provare il seguente

Teorema XV. *Sotto le ipotesi* (a), (b), (d), (Φ), (e), (H') *e* $V(\tilde{I}) < +\infty$, *tutti gli insiemi* $B \in \boldsymbol{B}$ *sono misurabili rispetto alle misure* μ, μ_r, μ_r^+, μ_r^-, $r = 1, \ldots, k$.

Ci limiteremo a provare la misurabilità rispetto a μ degli insiemi $G \in \mathscr{G} \subset \boldsymbol{B}$: la misurabilità di tutti gli insiemi $B \in \boldsymbol{B}$ discende dal fatto che $\boldsymbol{B}$ è la più piccola σ-algebra contenente $\mathscr{G}$. Basta pertanto provare (cfr. il Teorema XIV e il Teorema XI) la seguente relazione

$$V(G) \geqq V(G \cap G') + \mu(G - G')\,, \qquad \forall G,\ G' \in \mathscr{G}\,. \tag{3.13}$$

Intanto per la (H'), in corrispondenza dell'insieme $G \cap G' \in \mathscr{G}$ esiste una successione di insiemi $G_n \in \mathscr{G}$, $n = 1, 2, \ldots$, tale che $G_n \subset G \cap G'$, $G_n \subset \bar{G}_n \subset G_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} V(G_n) = V(G \cap G')$. Se ora consideriamo gli insiemi $\overline{G - G'}$ e $\bar{G}_n$, essendo la chiusura presa nella topologia $\mathscr{G}$, è subito visto che $\overline{G - G'} \subset \tilde{I} - G'$ e, per essere inoltre $\bar{G}_n \subset G \cap G' \subset G'$, segue che i due insiemi $\bar{G}_n$ e $\overline{G - G'}$ sono disgiunti.

Indicato quindi con $W_n \in \mathscr{G}$ un insieme con le proprietà

$$W_n \supset G - G', \quad W_n \cap \bar{G}_n = \emptyset \text{ (5)}, \tag{3.14}$$

essendo $G \supset G - G'$, seguono le relazioni

$$W_n \cap G \supset G - G', \quad (W_n \cap G) \cap \bar{G}_n = \emptyset, \quad W_n \cap G \in \mathscr{G}, \tag{3.15}$$

e quindi risulta

$$(W_n \cap G) \cup G_n \in \mathscr{G}, \quad (W_n \cap G) \cap G_n = \emptyset; \tag{3.16}$$

da cui

$$V\big((W_n \cap G) \cup G_n\big) = V(W_n \cap G) + V(G_n). \tag{3.16$'$}$$

Tenendo poi presente che $(W_n \cap G) \cup G_n \subset G$, risulta (cfr. Teorema VI): $V\big((W_n \cap G) \cup G_n\big) \leqq V(G)$. Da questa relazione, dalla (3.16)$'$, dalla prima delle (3.15) e dal Teorema XI, segue pertanto $V(G) \geqq V(W_n \cap G) + V(G_n) \geqq \mu(G - G') + V(G_n)$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$, da cui $V(G) \geqq \mu(G - G') + V(G \cap G')$.

Osservazione II. Si vede facilmente (cfr. [**10**], § 0, § 52 teorema F) che le misure μ, μ_r, μ_r^+, μ_r^- sono *regolari.*

Teorema XVI. *Sotto le ipotesi del Teorema XV le componenti v_r della restrizione di v su $\boldsymbol{B}$ sono misure con segno per $r = 1, \dots, k$.*

Bibliografia

[1] A. Averna, *Teoremi di esistenza e di rappresentazione per l'integrale alla Weierstrass-Burkill-Cesari sopra una coppia di varietà,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **22** (1973), 295-334.

[2] A. Averna e C. Lodovici, *L'integrale di Burkill-Cesari in una diversa assiomatica,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **23** (1974), 140-151.

[3] M. Boni: $[\cdot]_1$ *L'integrale di Weierstrass non parametrico e quasi additività,* Rend. Circolo Mat. Palermo (2) **22** (1973), 128-144; $[\cdot]_2$ *Quasi additività e quasi sub-additività nell'integrale ordinario del Calcolo delle Variazioni alla Weierstrass,* Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **6** (1974), 51-70.

---

(5) Esistono insiemi con queste proprietà; uno di essi è ad esempio $\check{I} - \bar{G}_n$.

[4] M. BONI e C. GORI, *Quasi additività e integrali non parametrici 2-dimensionali nel Calcolo delle Variazioni*, Rend. Circolo Mat. Palermo (2) **22** (1973), 217-238.

[5] M. BONI e M. RAGNI, *Approssimata sub-additività e integrali non parametrici 2-dimensionali del Calcolo delle Variazioni*, Rend. Circolo Mat. Palermo (2) **22** (1973), 289-313.

[6] P. BRANDI e A. SALVADORI: $[\cdot]_1$ *Sull'integrale debole alla Burkill-Cesari*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **27** (1978), 14-38; $[\cdot]_2$ *Sull'estensione dell'integrale debole alla Burkill-Cesari ad una misura*, Rend. Circolo Mat. Palermo (in corso di stampa); $[\cdot]_3$ *Un teorema di rappresentazione per l'integrale parametrico del Calcolo delle Variazioni*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **124** (1980), 39-58.

[7] J. C. BRECKENRIDGE, *Burkill-Cesari integrals of quasi additive integral functions*, Pacific J. Math. (3) **37** (1971), 635-654.

[8] L. CESARI: $[\cdot]_1$ *Quasi additive set functions and the concept of integral over a variety*, Trans. Amer. Mat. Soc. **102** (1962), 94-113; $[\cdot]_2$ *Extension problem for quasi additive set functions and Radon-Nikodym derivatives*, Trans. Amer. Math. Soc. **102** (1962), 114-146.

[9] A. FIACCA, *Sulla quasi-additività e sulla quasi sub-additività rispetto a una coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ *di famiglie di sistemi finiti e alla mesh* δ, Rend. Circolo Mat. Palermo (2) **26** (1977), 289-301.

[10] P. R. HALMOS, *Measure theory*, Van Nostrand, New York 1950.

[11] T. NISHIURA, *Integrals over a product variety and Fubini theorems*, Rend. Circolo Mat. Palermo (2) **14** (1965), 207-236.

[12] M. RAGNI: $[\cdot]_1$ *Sui concetti di approssimata sub-additività e quasi sub-additività* Atti Accad. Sci. Lett. Arti Palermo Parte I (4) **34** (1974-75), 345-359. $[\cdot]_2$ *Sull'esistenza dell'integrale alla Burkill-Cesari*, Rend. Circolo Mat. Palermo (2) **24** (1975), 125-139.

[13] A. W. STODDART, *Semicontinuity of integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **122** (1966), 120-135.

[14] C. VINTI: $[\cdot]_1$ *L'integrale di Weierstrass*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **92** (1958), 423-434; $[\cdot]_2$ *L'integrale di Weierstrass-Burkill*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **18** (1969), 295-316.

[15] G. WARNER: $[\cdot]_1$ *The Burkill-Cesari integral*, Duke Math. J. **35** (1968), 61-78; $[\cdot]_2$ *The generalized Weierstrass-tipe integral* $\int f(\xi, \varphi)$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) **22** (1968), 163-192.

* * *