Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 127-131

R. BALLI e A. C. GRIOLI (*)

Sulle rotazioni non uniformi di un satellite girostatico simmetrico in orbita circolare (**)

1 – In questa nota si dimostra, per un satellite simmetrico, dotato di un girostato del tipo di Volterra [4] ed il cui baricentro si muova su un'orbita circolare, l'impossibilità dinamica di moti attorno al baricentro che siano rotazioni non uniformi.

Nell'usuale approssimazione della Meccanica Celeste [3], [2] i moti in esame sono regolati dal seguente sistema di equazioni

$$(C-A)\omega^2\gamma_2\gamma_3+\omega(I_3\gamma_2-I_2\gamma_3)=\eta(C-A)c_2c_3\,, \tag{1$_1$}$$

$$A\dot\omega\gamma_2+\omega I_1\gamma_3=\eta(A-C)c_1c_3\,, \tag{1$_2$}$$

$$C\dot\omega\gamma_3-\omega I_1\gamma_2=0\,, \tag{1$_3$}$$

$$\dot c_1=c_2(\omega\gamma_3-\nu_3)-c_3(\omega\gamma_2-\nu_2)\,, \tag{2$_1$}$$

$$\dot c_2=-c_3\nu_1-c_1(\omega\gamma_3-\nu_3)\,, \tag{2$_2$}$$

$$\dot c_3=c_1(\omega\gamma_2-\nu_2)+c_2\nu_1\,, \tag{2$_3$}$$

$$\dot\nu_1=\omega(\nu_2\gamma_3-\nu_3\gamma_2)\,, \tag{3$_1$}$$

$$\dot\nu_2=-\omega\,\nu_1\gamma_3\,, \tag{3$_2$}$$

$$\dot\nu_3=\omega\nu_1\gamma_2\,. \tag{3$_3$}$$

(*) Indirizzo degli A.A.: R. BALLI, Dipartimento di Matematica, Università, 06100 Perugia, Italy; A. C. GRIOLI, Seminario Matematico, Via Belzoni 7, 35100 Padova, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 27-VII-1979.

In esse si è indicato con ω il modulo della velocità angolare; con γ_i, c_i, ν_i, I_i le componenti, su una delle terne centrali di inerzia, del versore dell'asse di rotazione $\boldsymbol{\gamma}$, del versore del raggio orbitale $\boldsymbol{c}$, della velocità angolare $\boldsymbol{\nu}$ associata al moto orbitale e del momento girostatico $\boldsymbol{I}$ rispettivamente; A e C indicano i momenti principali d'inerzia del satellite che è simmetrico rispetto al terzo asse, η è infine una costante positiva legata alla massa del corpo attraente, al raggio orbitale ed alla costante di gravitazione.

Stante la simmetria del satellite si è potuta assumere, in tutta generalità, la terna di proiezione in modo tale che sia $\gamma_1 = 0$.

Il sistema (1), (2), (3), ammette gli integrali primi

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = \nu^2\,, \tag{4}$$

$$\omega^2(A\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) + \eta(C - A)\,c_3^2 - 2\omega A\nu_2\gamma_2 - 2\omega C\nu_3\gamma_3 - 2I_1\nu_1 - 2I_2\nu_2 - 2I_3\nu_3 = E_0\,, \tag{5}$$

$$\nu_2\gamma_2 + \nu_3\gamma_3 = l\,. \tag{6}$$

Un moto di rotazione (non uniforme) dinamicamente possibile per il satellite girostatico simmetrico corrisponde ad una soluzione del sistema differenziale (1), (2), (3) che verifichi anche le relazioni in termini finiti

$$\nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 + \nu_3 c_3 = 0\,, \tag{7}$$

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1\,. \tag{8}$$

2 – Si dimostra che condizione necessaria per la possibilità dinamica di una rotazione non uniforme è che l'asse di rotazione appartenga alla sezione equatoriale del satellite.

Poichè si escludono le rotazioni uniformi, si escluderà nel seguito che sia $A = C$ oppure $\gamma_2 = 0$; nel primo caso si può assumere, in tutta generalità, la terna di proiezione in modo che sia anche $\gamma_2 = 0$, ed in questo secondo caso dalla $(1)_3$ si ottiene direttamente $\dot\omega = 0$.

Supposto $\gamma_3 \neq 0$, eliminando $\dot\omega$ tra la $(1)_2$ e $(1)_3$ si ottiene

$$CI_1\gamma_3^2\omega - \eta C(A - C)\gamma_3 c_1 c_3 + AI_1\gamma_2^2\omega = 0\,. \tag{9}$$

Il problema si riconduce allora a quello di riconoscere se, tra i moti determinati dalle soluzioni del sistema differenziale $(1)_3$, (2), (3), nelle incognite $\omega(t)$, $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$, $\nu_3(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$, ce ne è qualcuna che verifichi le relazioni in termini finiti $(1)_1$, (4), (5), (6), (7), (8), (9); si ottiene una condizione necessaria dalla compatibilità di queste ultime.

Nello spazio proiettivo $R^7(\omega, \nu_1, \nu_2, \nu_3, c_1, c_2, c_3, z)$ le $(1)_1$, (4), (5), (6), (7), (8), (9) rappresentano altrettante ipersuperficie algebriche: la possibilità dinamica di un moto di rotazione non uniforme implica l'esistenza di almeno una curva reale propria comune alle dette ipersuperficie che non sia in un iperpiano $\omega = hz$ con h costante. Il sistema delle equazioni suddette deve dunque definire in R^7 una famiglia di varietà nella cui unione sarà contenuta detta curva. Tra queste varietà ce ne deve essere almeno una V di dimensione $k \geqslant 1$ non contenuta in uno dei detti iperpiani.

Poichè V deve avere dimensione non nulla, essa deve intersecare un qualunque iperpiano di R^7 ed in particolare l'iperpiano improprio π_∞, in una varietà non nulla. Scritte le equazioni in forma omogenea, si riconosce che, nelle ipotesi assunte, l'intersezione di V con l'iperpiano improprio ha dimensione nulla essendo costituita dai punti

$$P_1(0, i, -\gamma_3, \gamma_2, 0, 0, 0, 0)\,, \qquad \tilde{P}_1(0, -i, -\gamma_3, \gamma_2, 0, 0, 0, 0)\,,$$
$$P_2(0, 0, 0, 0, 1, i, 0, 0)\,, \qquad \tilde{P}_2(0, 0, 0, 0, 1, -i, 0, 0)\,,$$

contati con opportuna molteplicità. La V ha quindi al più dimensione 1. Si riconosce che in nessuno dei punti P_1, $\tilde{P}_1$, P_2, $\tilde{P}_2$ le varietà tangenti t_1, $\tilde{t}_1$, t_2, $\tilde{t}_2$ alla eventuale V appartengono all'iperpiano improprio π^∞. Il numero delle intersezioni che V ha con π^∞ è dunque al più pari alla molteplicità dei punti P_1, $\tilde{P}_1$, P_2, $\tilde{P}_2$ molteplicità determinata dall'ordine delle varietà tangenti t_1, $\tilde{t}_1$, t_2, $\tilde{t}_2$.

V ha allora un numero di intersezioni pari al suo ordine con lo spazio lineare S_3 per i punti P_1, $\tilde{P}_1$, P_2, $\tilde{P}_2$; essa si spezza quindi in parti appartenenti ciascuna ad una degli S_4 del fascio che ha S_3 come supporto. Poichè ogni S_4 di questo fascio, che non sia contenuto in π_∞, appartiene ad un iperpiano di equazione $\omega = hz$, anche la eventuale varietà V si spezza, contrariamente a quanto richiesto, in parti appartenenti ciascuna ad uno degli iperpiani di questo tipo.

3 – Posto ora $\gamma_3 = 0$ e quindi senza ledere la generalità $\gamma_2 = 1$ la $(1)_3$ diviene una relazione in termini finiti che non è verificata da alcun moto (che non sia la quiete) se non è $I_1 = 0$, nel qual caso essa diviene una identità; la $(3)_2$ comporta la costanza di $\nu_2(t)$ e consente di ridurre il numero delle incognite, così facendo la (6) risulta inespressiva.

Il problema si riporta allora a quello di riconoscere se tra le soluzioni del sistema differenziale $(1)_2$, (2), $(3)_1$, $(3)_3$ nelle incognite $\omega(t)$, $\nu_1(t)$, $\nu_3(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$ ce ne è qualcuna che verifichi anche la relazione in termini finiti $(1)_1$ e le relazioni invarianti (4), (5), (7), (8). Per una soluzione siffatta risulterà verificata anche la relazione in termini finiti che si ottiene per derivazione rispetto al tempo (derivata di Lie) della $(1)_1$ stessa (la $(1)_1$ non è in generale un invariante del sistema differenziale considerato, nè costituisce un sistema invariante quando sia associato alle (4), (5), (7), (8); la relazione in termini finiti che si ottiene per derivazione della $(1)_1$ non è infatti una conseguenza delle altre relazioni in termini finiti). Detta relazione ha la forma

$$I_3 c_1 c_3 + c_3 A(c_1 \nu_3 - c_3 \nu_1) + c_2 A(c_1 \omega - c_1 \nu_2 + c_2 \nu_1) = 0 \,. \tag{10}$$

Le equazioni $(1)_1$, (4), (5), (7), (8), (10) costituiscono un sistema in termini finiti che può essere interpretato come un sistema di ipersuperficie algebriche dello spazio proiettivo $R^6(\omega, \nu_1, \nu_3, c_1, c_2, c_3, z)$. Per queste e per le loro proiezioni su ogni sottospazio di R^6, devono valere le stesse proprietà richieste precedentemente per le ipersuperficie di R^7. Conviene proiettare le $(1)_1$, (4), (5), (7), (8), (10) nel sottospazio di R^6: $R^3(\omega, \nu_1, \nu_3, z)$.

Con un calcolo diretto (eliminando c_1, c_2, c_3) si ottengono le tre equazioni

$$\nu_1^2 + \nu_3^2 = \nu^2 - \nu_2^2 \,, \tag{4}$$

$$(\nu^2 - \nu_2^2) H^2 + [\eta(C - A)\nu_1^2 - 2I_3 \nu_2 \omega \nu_3] H + I_3^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)\omega^2 = 0 \,, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} A(\nu - \nu_2^2) H^2 - I_3(2A\nu_2\omega\nu_3 + 2I_3\nu_3^2 + E\nu_3 + I_3\nu_2\omega) H \\ - A I_3^2(\nu_1^2 + \nu_2^2 - \nu_2\omega)\omega^2 = 0 \,, \end{aligned} \tag{12}$$

con $H = A\omega^2 - 2A\nu_2\omega - 2I_3\nu_3 - E$.

Eliminando dalle (11) e (12) i termini che non contengono a fattore H, si ottiene una equazione che si fattorizza nella $H = 0$ e nella

$$\begin{aligned} A(\nu_1^2 + \nu_2^2 - \nu_2\omega)[(\nu^2 - \nu_2^2) H + \eta(C - A)\nu_1^2 - 2I_3\nu_2\omega\nu_3] \\ + (\nu_1^2 + \nu_2^2)[A(\nu^2 - \nu_2^2) H - I_3(2A\nu_2\omega\nu_3 + 2I_3\nu_3^2 + E\nu_3 + I_3\nu_2\omega])] = 0 \,. \end{aligned} \tag{13}$$

La eventuale curva proiezione si spezza dunque in una parte contenuta sulla superficie $H = 0$ ed in un'altra contenuta sulla superficie (13).

Per quanto riguarda la prima parte, dalle (4), (11), (12) e dalla $H = 0$ si riconosce che, se non è $I_3 = 0$, è $\omega = \text{cost}$, contrariamente a quanto richiesto.

Per quanto riguarda la seconda parte, si verifica che, se è $\nu_2^2 < \nu^2$ le superficie (4), (11), (12), (13) hanno intersezioni comuni con il piano improprio di R^3 soltanto quando sia verificata la condizione: $2I_3^2 + \eta A(C - A) = 0$.

Le intersezioni comuni cadono nei punti ciclici dei piani $\omega = \text{cost}$ e sono intersezioni semplici se non è $\nu_2 = 0$; l'eventuale curva comune alle dette superficie è allora al più una circonferenza di uno di questi piani. Se è invece $\nu_2 = 0$, le equazioni (11), (12), (13) assumono una forma semplificata ed è agevole verificare che la eventuale curva comune a queste ed alla (4) si proietta sull'$R^1(\omega, z)$ in un numero finito di punti e si spezza quindi in parti appartenenti a piani del tipo $\omega = \text{cost}$.

Se è infine $\nu_2^2 = \nu^2$, per la parte reale della (4) è anche: $\nu_1 = \nu_3 = 0$; dalla (11) si ottiene allora che, se non è $I_3 = 0$, è $\omega = 0$.

4 – Si conclude quindi che non sono possibili moti rotatori non uniformi se non quando è $I_3 = 0$, cioè quando il momento girostatico è parallelo all'asse di rotazione. In tal caso le equazioni di moto non contengono più alcun termine relativo al momento girostatico e coincidono con quelle relative ai moti rotatori del satellite rigido.

Sono dunque dinamicamente possibili rotazioni non uniformi, per un satellite girostatico simmetrico in orbita circolare, soltanto se il momento girostatico è parallelo all'asse di rotazione; in questo caso, l'intera classe delle rotazioni non uniformi coincide con quella determinata in [**1**] per il satellite simmetrico rigido.

Bibliografia

[**1**] R. Balli *Rotazioni non uniformi di un satellite in orbita circolare*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **57** (1974).

[**2**] G. Grioli, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Cortina, Padova 1974.

[**3**] F. Tisserand, *Traité de Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris 1960.

[**4**] V. Volterra, *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre*, Astronom. Nachr. **138** (1895) su Opere Mat. **2**, Accad. Naz. Lincei.

* * *