Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 65-71

W. Nagorko (*)

Sulle soluzioni approssimate in Meccanica (**)

1 - Gli attributi comuni a molti modelli della Meccanica sono tre concetti primitivi: corpo, moto e forza. Conformi ad essi introduciamo le definizioni seguenti.

M - l'insieme dei corpi.

X - lo spazio di Banach, delle funzioni descriventi il moto del corpo, in breve: lo spazio dei moti. Gli elementi di X li indichiamo con x.

F - lo spazio di Banach, delle funzioni descriventi le forze agenti sul corpo, in breve: lo spazio delle forze. Gli elementi di F li indicheremo con f.

I concetti così introdotti devono soddisfare agli assiomi che nella descrizione matematica equivalgono ad introdurre un operatore chiamato: operatore dinamico A. L'operatore A è dato normalmente in forma analitica dalle equazioni di moto e agisce dallo spazio X allo spazio F.

Chiameremo soluzione corrispondente alla forza f la funzione x, che rende soddisfatta, per f scelto, la relazione $A(x) = f$.

Scelto f_0, sia x_0 tale, che $A(x_0) = f_0$. Sia $\eta = \eta(x_0) > 0$ un numero fisso che consideriamo piccolo nel modello. Chiameremo *soluzione approssimata* ogni funzione di $x \in X$ tale che

$$\|A(x) - A(x_0)\| \leqslant \eta . \tag{1.1}$$

La verifica della definizione che la funzione x è una soluzione approssimata non è comoda perchè bisogna conoscere la soluzione x_0. Introduciamo la definizione seguente.

(*) Indirizzo: Uniwersytet Warszawski, Instytut Mechaniki, PKiN, p. 937, Warszawa, Poland.

(**) La presente nota è stata preparata nell'Istituto di Matematiche Applicate « U. Dini » dell'Università di Pisa. — Ricevuto: 2-VII-1979.

Se, scelti f_0 e A; per x soddisfacente alla disuguaglianza

$$\|A(x)-f_0\|\leqslant\eta\ , \tag{1.2}$$

vale anche la disuguaglianza

$$\|x-x_0\|\leqslant\eta\ , \tag{1.3}$$

allora chiameremo A operatore che ammette soluzioni approssimate ad x_0.

Per ogni operatore A che ammette soluzioni approssimate, la disuguaglianza (1.2) permette di verificare che x è soluzione approssimata anche se non si conosce x_0.

Quel che si è detto ha per consequenza, che ogni operatore continuo A è operatore ammettente soluzioni approssimate in ogni punto $x\in X$. Sostanzialmente, con la definizione di continuità in ogni punto $x\in X$ e per tutti i valori di $\varepsilon>0$ esiste $\delta_\varepsilon>0$ tale, che se

$$\|x-x_0\|<\delta_\varepsilon\ , \tag{1.4}$$

sarà

$$\|A(x)-f_0\|<\varepsilon\ . \tag{1.5}$$

Ne segue che fissato x_0 basta prendere ε in modo, che sia max $(\varepsilon,\delta_\varepsilon)\leqslant\eta$, perchè per questi x che realizzano (1.4), (1.5), da (1.2) discenda (1.3).

Conviene osservare che, anche per operatori continui è opportuno calcolare ε e δ_ε a misura del grado di approssimazione nell'assumere x come soluzione approssimata di x_0.

2 – Sia l'operatore A lineare, invertibile e limitato. Allora l'operatore A^{-1} esiste ed è anche lineare e limitato [**1**]. Essendo A continuo, ammette soluzioni approssimate in ogni punto del suo spazio di definizione. La dimostrazione diretta di quest'ultimo punto conviene per precisare il legame fra ε e δ_ε in (1.4), (1.5).

Dalla definizione di norma dell'operatore abbiamo

$$\|A(x)\|\leqslant\|A\|\,\|x\|\ ,\qquad \|A^{-1}(f)\|\leqslant\|A^{-1}\|\,\|f\|\ , \tag{2.1}$$

per tutti gli $x\in X$ e $f\in F$.

Usando (2.1) e la linearità dell'operatore A e A^{-1} ricaviamo

$$\|x - x_0\| \leqslant \|A^{-1}\| \, \|A(x) - f_0\| , \tag{2.2}$$

per tutti gli $x \in X$ e per gli $f \in F$ scelti in modo arbitrari.

Sia

$$\|A^{-1}\| \leqslant c , \qquad \varepsilon \equiv \frac{\eta}{\alpha} , \tag{2.3}$$

dove $\alpha = \max(1, c)$; per questi x che realizzano

$$\|A(x) - f_0\| \leqslant \varepsilon , \tag{2.4}$$

abbiamo dalla (2.2) $\|x - x_0\| \leqslant \eta$. Allora le funzioni x che soddisfano (2.4) sono le soluzioni approssimate.

L'efficacia del criterio (2.2) dipende dalle valutazioni della norma dell'operatore A^{-1}. La forma analitica dell'operatore A^{-1} in generale non è conosciuta; malgrado ciò la valutazione stessa è possibile.

Notiamo innanzi tutto, che dalla definizione della norma dell'operatore consegue la disequazione

$$\|A^{-1}\| \leqslant c , \qquad c \in \{c > 0 ;\ \|A^{-1}(f)\| \leqslant c\|f\|,\ f \in F\} . \tag{2.6}$$

Consideriamo la funzione arbitraria $x \in X$, diversa da zero e calcoliamo per essa $f = A(x)$. Se $x \neq 0$ è $\|x\| \neq 0$ e

$$\|x\| = c^* \|f\| , \tag{2.7}$$

dove $c^* = \|x\| / \|f\|$. Dalla relazione (2.6), (2.7) abbiamo per la norma dell'operatore A^{-1}

$$\|A^{-1}\| \geqslant c^* . \tag{2.8}$$

Se $c^* \geqslant 1$ possiamo sostituire α nella (2.3) con 1.

3 – Un esempio di operatore A, che ammette soluzioni approssimate in tutti i punti del suo dominio è l'operatore dell'elasticità lineare. Per semplicità analizziamo il caso quasi-statico dei corpi limitati.

Supponiamo, che lo spazio delle funzioni che descrivono il moto sia lo spazio $X = \mathscr{C}_3^2(\bar{B})$, $F = \mathscr{C}_3^0(\bar{B}) \times \mathscr{C}_3^0(\partial B)$, dove $B \in M$ è il dominio del moto u e delle forze di volume b e ∂B il dominio delle forze di superficie p.

L'operatore A è definito dalle equazioni

$$\text{(3.1)} \qquad \operatorname{div} \sigma = -\varrho b\,, \qquad \sigma n = p\,, \qquad \sigma = \mu(\nabla u + \nabla u^T) + \frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}(\nabla u + \nabla u^T)\,\delta\,,$$

dove ϱ è la densità del corpo.

Le (3.1) implicano, che l'operatore A è lineare: dall'esistenza e unicità delle soluzioni, [2], consegue l'esistenza dell'operatore inverso.

Prendiamo per $u \in \mathscr{C}_3^2(\bar{B})$ la norma

$$\text{(3.2)} \qquad \|u\| = \max_{\bar{B},k,l,m} \left(|u_k|, |u_{kl}|, |u_{k,l,m}|\right),$$

e per f la norma

$$\text{(3.3)} \qquad \|f\| = \max_{\bar{B},k}\left(|\varrho b_k, |p_k|\right),$$

si ricava la limitazione per l'operatore A

$$\|Au\| \leqslant a\|u\|\,,$$

dove $a = \max\limits_{\bar{B}}(3|\lambda + 2\mu|, 1,$ λ, μ sono le costanti di Lamé.

Per le considerazioni del punto **2**, l'operatore (3.1) ammette soluzioni approssimate in ogni punto $\mathscr{C}_3^2(\bar{B})$.

Calcoliamo adesso il numero c^* della relazione (2.7); sia $u = (\lambda - 1)\,x$ e $\lambda \in (1, \infty)$, allora per $f = (\varrho b, p)$ abbiamo $b \equiv 0$, $p \equiv (\lambda - 1)\ (2\mu + \lambda)\delta n$.

Le norme (3.2), (3.3) per queste funzioni sono $\|u\| = \max\,[\lambda - 1, (\lambda - 1)\,a]$, $\|f\| = \max\,[(\lambda - 1)\ (2\mu + 3\lambda), (\lambda - 1)\,a]$ quindi

$$c^* = \begin{cases} 1 & \text{per } a > 2\mu + 3\lambda \\ \dfrac{a}{2\mu + 3\lambda} & \text{per } a \leqslant 2\mu + 3\lambda, \end{cases} \qquad \text{e} \quad 1 < a = \max_{\bar{B},k} |x_k|\,.$$

4 – Come esempio consideriamo il metodo seguente per ottenere le soluzioni approssimate dell'elasticità.

Prendiamo in esame le deformazioni descritte da funzioni $u = u(z, y)$, $B = \Pi \times (0, h)$, $z \in \Pi \subset \mathscr{R}^2$, $y \in (0, h)$ della forma

$$u(z, y) = \left(1 - \frac{y}{h}\right) u^0(z) + \frac{y}{h} u^1(z) . \tag{4.1}$$

Le funzioni $u^0 = u(z, 0)$, $u^1 = u(z, h)$ descrivono il moto delle superfici superiori ed inferiori del corpo. Allora conoscendo il moto dei punti materiali delle superfici bidimensionali ricaviamo, tramite la (4.1), il moto di ogni punto materiale del corpo tridimensionale.

Le equazioni per i vettori u^0, u^1 si ottengono dal principio dei lavori virtuali [**3**].

$$\operatorname{div} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla u^\alpha} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial u^\alpha} + b^\alpha = 0 \qquad (\alpha = 0, 1) , \tag{4.2}$$

per ogni $z \in \Pi$, div significa in questo caso la divergenza in Π e b^α, ε sono definiti nel seguente modo:

$$\begin{aligned} &b^0 = \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right) C \, dy + p_0^0 , \qquad b^1 = \int_0^h \frac{y}{h} b \, dy + p_0^1 , \\ &\varepsilon = \int_0^h \varrho \sigma\left(\nabla\left[\left(1 - \frac{y}{h}\right) u^0 + \frac{y}{h} u^1\right]\right) dy , \end{aligned} \tag{4.3}$$

dove p_0^0 e p_1^0 sono rispettivamente le forze agenti sulla faccia inferiore e superiore del corpo.

Sia $u_1^\alpha(z^1, z^2) = \varphi^\alpha(z_1)$, $u_2^\alpha(z^1, z^2) = \text{const}$, $u_3^\alpha(z^1, z^2) = \psi^\alpha(z_1)$ $(\alpha = 0, 1)$; allora il moto delle superfici inferiore e superiore dipende solo dalla sola coordinata spaziale z_1. Risolviamo il sistema di equazioni (4.2) nel caso dello strato limitato: le forze sulle superfici inferiore e superiore siano determinate dalle funzioni $\pm\, \omega \sin z_1$ $(\omega > 0)$. Allora $f = (\varrho b, p_0)$, dove $b \equiv 0$, $p_0 = (0, \pm\, \omega \sin z_1)$. Non ci occuperemo in questo caso delle forze delle superfici laterali.

È facile verificare che le funzioni

$$\varphi^0 = a(\cos z_1 - 1) , \qquad \varphi^1 = \varphi^0 , \qquad \psi^0 = b \sin z_1 , \qquad \psi^1 = -\, \psi^0 , \tag{4.4}$$

con $a = 4\lambda e \omega h$, $b = 2\omega e h^2(\lambda + \mu)$ e $1/e = h^2(\lambda + 2\mu) + 48(\lambda + \mu)$ sono le soluzioni delle equazioni (4.2).

Sostituendo le soluzioni (4.4) nelle relazioni (4.1) e successivamente le funzioni (4.1) nelle equazioni del moto (3.1) otteniamo $f = (\varrho b, p^\alpha)$ con le coordinate

$$
\begin{aligned}
&b_{z_1} = 4\mu(\lambda+\mu)\,\omega e h \cos z_1\,, \qquad b_y = -\Big(1-\frac{2y}{h}\Big)2\mu(\lambda+2\mu)\,e\omega h^2 \sin z_1\,,\\
(4.5)\qquad &p^\alpha_{z_1} = 2\mu(\lambda+2\mu)\,\omega e h^2\cos z_1\,, \qquad p^0_y = -p^1_y = -16\mu(\lambda+\mu)\,\omega e h \sin z_1\,.
\end{aligned}
$$

Le componenti b_{z_1}, b_y delle forze di massa per il moto (4.4) sono calcolate dalla $(3.1)_1$, mentre le componenti delle forze di superficie $p^\alpha_{z_1}$, p^α_y sono calcolate dalla $(3.1)_2$. Calcolando le norme per le coordinate $f - f_0$ otteniamo

$$
\begin{aligned}
&\|b_{z_1} - b_{0z_1}\| = 4\mu(\lambda+2\mu)\,\omega e h\,, \qquad \|b_y - b_{0y}\| = \frac{h}{2}\|b_{z_1} - b_{0z_1}\|\,,\\
(4.6)\qquad &\|p^\alpha_{z_1} - p^\alpha_{0z_1}\| = \|b_y - b_{0y}\|\,, \qquad \|p^\alpha_y - p^\alpha_{0y}\| = |\omega\,\omega - 16\mu(\lambda+\mu)\,\omega e h|\,.
\end{aligned}
$$

Prendiamo ora valori delle costanti di Lamé, della densità e del modulo delle forze di superficie: $\lambda = 1$, $\mu = 1{,}25$, $\varrho = 1$, $\omega = 1$.

Dalla (4.6) troviamo le funzioni

$$
\|b_{z_1} - hb_{0z_1}\| = \frac{5h}{h^2+31}\,, \qquad \|p^\alpha_y - p^\alpha_{0y}\| = \Big|1 - \frac{17h}{h^2+31}\Big|\,,
$$

$$
\|p^\alpha_{z_1} - p^\alpha_{0z_1}\| = \|b_y - b_{0y}\| = \frac{5h^2}{2(h^2+31)}\,.
$$

Le funzioni stesse sono riportate nella Tabella 1.

Tabella 1

h	0	1	1,5	2	3	4	∞
$\|b_{z_1} - b_{0z_1}\|$	0	0,15	0,21	0,28	0,37	0,42	0
$\|p^\alpha_y - p^\alpha_{0y}\|$	1	0,47	0,21	0,03	0,13	0,38	1
$\|p^\alpha_{z_1} - p^\alpha_{0z_1}\|$	0	0,11	0,19	0,21	0,28	0,56	1

Le norme delle forze $\|b_{z_1} - b_{0z_1}\|$ e $\|b_y - b_{0y}\|$ tendono a zero al diminuire dello spessore dello strato; lo stesso vale per le norme delle forze delle superfici $\|p^{\alpha}_{z_1} - p^{\alpha}_{0z_1}\|$. Nel caso che nelle forze $p^{\alpha}_y - p^{\alpha}_{0y}$ sia $h = 0$, abbiamo $\|p^{\alpha}_y - p^{\alpha}_{0y}\| = 1$, per cui la (4.4) non può essere la soluzione approssimata per ogni h.

Sia $\eta = 0{,}25$; in questo caso è facile verificare che per $1.25 \leqslant h \leqslant 1{,}75$ valgono le disuguaglianze

$$(4.7) \qquad \|b_{z_1} - b_{0z_1}\| \leqslant \eta\,, \qquad \|p^{\alpha}_y - p^{\alpha}_{0y}\| \leqslant \eta\,, \qquad \|p^{\alpha}_{z_1} - p^{\alpha}_{0z_1}\| \leqslant \eta\,.$$

Anche $\alpha = 1$, perchè $c^* \geqslant 1$ e sono soddisfatte le disequazioni $\|u - u_0\| \leqslant \eta$, e quindi le soluzioni ottenute (4.4) sono le soluzioni approssimate.

Notiamo infine, che la costante η non può in questo caso diminuire arbitrariamente poichè se $\eta < 0{,}20$ la disuguaglianza (4.7) non è soddisfatta per alcun valore di h.

Bibliografia

[1] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators*, Interscience Publ., N. Y. 1958.

[2] G. Fichera, *Existence theorems in Elasticity*, Handbuch der Physik, v. 6a/2.

[3] Cz. Woźniak, *Analytical mechanics of elastic media*, CISM, Udine 1975.

Summary

The paper represents an attempt to present the concept of approximate solutions in Mechanics. An example of an approximate solutions in linear Elasticity is given.

* * *