Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 413-418

A. Morelli e L. Nicolò-Amati Gori (*)

Sulla convergenza di certe formule di quadratura (**)

1 - Introduzione

Dati un intervallo $[a, b]$ e un intervallo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ si consideri una funzione $p(x)$ definita in $[a, b]$ nel modo seguente

$$(1.1) \qquad p(x) = \begin{array}{ll} 0 & \text{per } a \leqslant x < \alpha\,,\ \beta < x \leqslant b \\ g(x) & \text{per } \alpha \leqslant x \leqslant \beta\,, \end{array}$$

con $g(x) \in L[\alpha, \beta]$, q. ov. positiva in $[\alpha, \beta]$.

Fissati tre interi p, q, m e posto $l = p + m + q$, si scelgano p punti in $[a, \alpha]$ e q punti in $[\beta, b]$ nel modo seguente

$$(1.2) \qquad a < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_p = \alpha\,, \qquad \beta = \xi_{p+m+1} < \xi_{p+m+2} < \ldots < \xi_l < b\,;$$

detti poi s un intero > 0 e $x_1, x_2, \ldots, x_m$ gli zeri del polinomio di grado m del sistema di polinomi s-ortogonali in $[\alpha, \beta]$ rispetto al peso $(-1)^q \prod_{i=1}^{p} (x - \xi_i)^{2s+1} \cdot \prod_{j=p+m+1}^{l} (x - \xi_j)^{2s+1} g(x)$, zeri che (cfr. [**1**] e [**2**]) sono reali, distinti e interni a $[\alpha, \beta]$, si ponga

$$(1.3) \qquad \xi_{p+i} = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)\,.$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Applicata, Facoltà di Ingegneria, Via A. Scarpa 10, 00161 Roma, Italy.

(**) Ricevuto: 11-VI-1979.

È allora possibile costruire (cfr. [**1**]), per ogni funzione $f(x)$, analitica in $[a, b]$ (¹), il funzionale lineare puntuale

$$\mathscr{A}_m[f] = \sum_{h=0}^{2s} \sum_{i=1}^{l} A_{hi} f^{(h)}(\xi_i) , \tag{1.4}$$

con ξ_i dati da (1.2) e (1.3), in modo tale che la formula di quadratura

$$\int_a^b p(x) f(x) \, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta g(x) f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{h=0}^{2s} \sum_{i=1}^{l} A_{hi} f^{(h)}(\xi_i) + \mathscr{R}[f]$$

abbia grado di precisione $l(2s+1)+m-1$, ossia risulti

$$\int_a^b p(x) P(x) \, \mathrm{d}x = \mathscr{A}_m[P(x)] , \tag{1.5}$$

per ogni polinomio di grado $\leqslant l(2s+1)+m-1$.

Scopo della presente nota è di dimostrare una proprietà di convergenza, relativa al funzionale (1.4), ed espressa da

$$\lim_{m\to\infty} \mathscr{A}_m[f] = \int_a^b p(x) f(x) \, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta g(x) f(x) \, \mathrm{d}x \tag{1.6}$$

per ogni $f(x)$, che basterebbe supporre di classe $\mathscr{C}^{2s}[a, b]$.

Questa proprietà verrà dimostrata in **3**, dopo avere fatto alcune premesse in **2**.

2 - Considerazioni preliminari

Si considerino, nell'intervallo $[a, b]$, n punti arbitrari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, e i seguenti polinomi

$$\omega_k(x) = \frac{\prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^{2s+1}}{(x - x_k)^{2s+1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) , \tag{2.1}$$

(¹) Si suppone senz'altro $f(x)$ analitica in $[a, b]$, giacchè, in tale ipotesi, la conoscenza di $f(x)$ nel solo intervallo $[\alpha, \beta]$ (su cui si calcola l'integrale) individua anche i valori di $f(x)$ nei punti (1, 2) (fuori di $[\alpha, \beta]$ e presi in considerazione nella formula di quadratura).

$$\Omega_{hk}(x) = \sum_{t=0}^{2s-h} \binom{h+t}{t} \left[D^t \frac{1}{\omega_k(x)}\right]_{x=x_k} \cdot \omega_k(x) \frac{(x-x_k)^{h+t}}{(h+t)!} \tag{2.2}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n\,; \quad h = 0, 1, \ldots, 2s)\,.$$

I polinomi (2.2), per i valori di h e k ivi indicati, verificano notoriamente le

$$\Omega_{hk}^{(j)}(x_i) = \delta_{hj}\delta_{ki} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n\,; \quad j = 0, 1, \ldots, 2s)\,. \tag{2.3}$$

Posto

$$d = \min_{k=1,2,\ldots,n} (x_{k+1} - x_k)\,; \qquad N = (n-1)(2s+1)\,, \tag{2.4}$$

non è difficile dimostrare che dalla (2.1) segue

$$\left|\left[D^t \frac{1}{\omega_k(x)}\right]_{x=x_k}\right| \leqslant \frac{(2s+1)^t}{d^{N+t}} \frac{(n+t-2)!}{(n-2)!} \tag{2.5}$$

e che, da questa e dalla (2.2), segue la

$$|\Omega_{hk}^{(r)}(x)| \leqslant \frac{(b-a)^{N+h-r}}{d^N} B_{h,2s}^{(r)} = M_{h,2s}^{(r)}\,, \tag{2.6}$$

dove $B_{h,2s}^{(r)}$ indica la seguente somma

$$B_{h,2s}^{(r)} = \sum_{t=0}^{2s-h} \binom{h+t}{t} \frac{(N+h+t)!}{(N+h+t-r)!} \frac{(n+t-2)!\,(2s+1)^t}{(n-2)!\;\;(h+t)!} \left(\frac{b-a}{d}\right)^t .$$

Verrà ora dimostrato il teorema seguente, che sarà utilizzato nel prossimo numero allo scopo di dimostrare la proprietà (1.6).

Teorema 1. *Sia* $f(x) \in \mathscr{C}^{2s}[a, b]$, *e siano* $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ n *punti di tale intervallo* $[a, b]$. *Allora, per ogni* $\varepsilon > 0$, *esiste un polinomio* $R(x)$ *tale che*

$$R^{(h)}(x_k) = f^{(h)}(x_k) \qquad (h = 0, 1, \ldots, 2s\,;\; k = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{2.7}$$

$$|R^{(h)}(x) - f^{(h)}(x)| < \varepsilon \qquad (h = 0, 1, \ldots, 2s\,;\; \forall x \in (a, b))\,. \tag{2.8}$$

Dim. È noto che, per ogni $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un polinomio di Stieltjes $S(x)$ tale che risulti

$$|S^{(h)}(x) - f^{(h)}(x)| < \frac{\varepsilon}{1 + n(2s+1)M_{2s}} \quad (h = 0, 1, \ldots, 2s\,;\; \forall x \in (a, b))\,, \tag{2.9}$$

dove M_{2s} è dato da (cfr. (2.6))

$$M_{2s} = \max_{h,r=0,1,\dots,2s} M_{h,2s}^{(r)}. \tag{2.10}$$

Posto allora

$$\varrho_{hk} = S^{(h)}(x_k) - f^{(h)}(x_k) \qquad (k = 1, 2, \dots, n\,;\ h = 0, 1, \dots, 2s)\,, \tag{2.11}$$

il seguente polinomio di Hermite

$$\varrho(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=0}^{2s} \varrho_{hk} \Omega_{hk}(x) \tag{2.12}$$

verifica, come è noto (cfr. (2.3)),

$$\varrho^{(h)}(x_k) = \varrho_{hk} \qquad (k = 1, 2, \dots, n\,;\ h = 0, 1, \dots, 2s)\,, \tag{2.13}$$

risultando inoltre, in base a (2.5) e (2.6),

$$|\varrho^{(h)}(x)| < \frac{n(2s+1)M_{2s}}{1 + n(2s+1)M_{2s}}\,\varepsilon\,; \tag{2.14}$$

dunque il polinomio

$$R(x) = S(x) - \varrho(x)\,, \tag{2.15}$$

in base a (2.13), verifica la (2.7) e, in base a (2.9) e (2.14), verifica la (2.8), essendo

$$|R^{(h)}(x) - f^{(h)}(x)| \leqslant |S^{(h)}(x) - f^{(h)}(x)| + |\varrho^{(h)}(x)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{1 + n(2s+1)M_{2s}} + \varepsilon \frac{n(2s+1)M_{2s}}{1 + n(2s+1)M_{2s}} = \varepsilon\,.$$

3 - Proprietà di convergenza del funzionale $\mathscr{A}_m[f]$

Verrà ora dimostrata la proprietà (1.6) del funzionale $\mathscr{A}_m[f]$ dato da (1.4), formulando il seguente

Teorema 2. *Sia $f(x)$ un funzione di classe $\mathscr{C}^{2s}[a, b]$, e siano ξ_i, A_{hi}, $(i = 1, 2, \dots, l;\ h = 0, 1, \dots, 2s)$ i nodi (1.2), (1.3) e i coefficienti della (1.4);*

per ogni $p(x)$ *verificante* (1.1) *si ha*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{h=0}^{2s} \sum_{i=1}^{l} A_{hi} f^{(h)}(\xi_i) = \int_a^b p(x) f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta g(x) f(x)\, dx\,. \tag{3.1}$$

Dim. Per ogni $\varepsilon > 0$, sia ν (dipendente da ε) il grado del polinomio $R_\nu(x)$ verificante, per ogni $x \in (a, b)$,

$$|R_\nu^{(h)}(x) - f^{(h)}(x)| < \varepsilon \qquad (h = 0, 1, \ldots, 2s)\,, \tag{3.2}$$

e tale che

$$\begin{aligned} &R_\nu^{(h)}(\xi_j) = f^{(h)}(\xi_j) && (j = 1, 2, \ldots, p\,;\; h = 0, 1, \ldots, 2s)\,,\\ &R_\nu^{(h)}(\xi_r) = f^{(h)}(\xi_r) && (r = p + m + 1, \ldots, l\,;\; h = 0, 1, \ldots, 2s)\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

l'esistenza di $R_\nu(x)$ è provata dal Teorema 1 (cfr. (2.7) e (2.8)).

Detto allora m un intero tale che risulti

$$(p + m + q)(2s + 1) + m - 1 > \nu\,, \tag{3.4}$$

si ha certo (cfr. (1.5))

$$\int_a^b p(x) R_\nu(x)\, dx = \mathscr{A}_m[R_\nu(x)]\,. \tag{3.5}$$

Inoltre risulta, in base a (3.2), (3.3), (3.5),

$$\begin{aligned} &\Big|\int_a^b p(x) f(x)\, dx - \sum_{h=0}^{2s} \sum_{i=1}^{l} A_{hi} f^{(h)}(\xi_i)\Big| \\ &\leqslant \Big|\int_\alpha^\beta g(x)[f(x) - R_\nu(x)]\, dx\Big| + \Big|\int_\alpha^\beta g(x) R_\nu(x)\, dx - \sum_{h=0}^{2s} \sum_{i=1}^{l} A_{hi} R_\nu^{(h)}(\xi_i)\Big| \\ &+ \Big|\sum_{h=0}^{2s} \sum_{j=1}^{p} A_{hj} [R_\nu^{(h)}(\xi_j) - f^{(h)}(\xi_j)]\Big| + \Big|\sum_{h=0}^{2s} \sum_{i=p+1}^{p+m} A_{hi} [R_\nu^{(h)}(\xi_i) - f^{(h)}(\xi_i)]\Big| \\ &+ \Big|\sum_{h=0}^{2s} \sum_{r=p+m+1}^{l} A_{hr}[R_\nu^{(h)}(\xi_r) - f^{(h)}(\xi_r)]\Big| < \varepsilon \int_\alpha^\beta g(x)\, dx + \varepsilon \sum_{h=0}^{2s} \sum_{i=p+1}^{p+m} |A_{hi}|\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Per quel che riguarda i coefficienti A_{hi}, con $h = 0, 1, \ldots, 2s$; $i = p + 1, \ldots$

$\ldots, p+m$ si tenga presente la maggiorazione data in [**3**], in base alla quale

$$|A_{hi}| < \frac{(\beta-\alpha)^h}{h!} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_{i+1}} g(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad (i = p+1, \ldots, p+m\,;\ h = 0, 1, \ldots, 2s)\,.$$

Dunque risulta

$$\sum_{h=0}^{2s} \sum_{i=p+1}^{p+m} |A_{hi}| < \sum_{h=0}^{2s} \frac{(\beta-\alpha)^h}{h!} \sum_{i=p+1}^{p+m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_{i+1}} g(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.7}$$

$$< (1+\beta-\alpha)^{2s}\cdot 2 \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Da (3.6) e (3.7) segue infine

$$\left|\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{h=0}^{2s}\sum_{i=1}^{l} A_{hi} f^{(h)}(\xi_i)\right| < \varepsilon[1 + 2(1+\beta-\alpha)^{2s}] \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,\mathrm{d}x$$

e dunque, tenendo conto di (3.4), la tesi (3.1) del teorema.

Bibliografia

[1] A. Morelli, *Formula di quadratura con valori della funzione e delle sue derivate anche in punti fuori dell'intervallo di integrazione*, Atti Accad. Sci. Torino, **102** (1967-68), 569-579.

[2] A. Ossicini, *Costruzione di formule di quadratura di tipo gaussiano*, Annali Mat. Pura Appl. (4) **72** (1966), 213-237.

[3] A. Ossicini e F. Rosati, *Sulla convergenza dei funzionali ipergaussiani*, Rend. Mat. (4) **11** (1978), 97-108.

Summary

A convergence theorem is given for a continuous linear functional.

* * *