Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 281-286

GIUSEPPE ARCA et RADU ROSCA (*)

# Variétés parakähleriennes possédant la propriété de Poisson (**)

Les varietés parakähleriennes ont été étudiées la première fois par P. Libermann [4] et d'une manière générale elles peuvent se définir comme étant des $C^\infty$-variétés pseudo-riemanniennes $(M, g)$ *neutrales* (de signature $(n, n)$) munies d'une structure kählerienne (ici l'opérateur $\mathcal{J}$ des structures complexes est remplacé par l'*automorphisme involutif* $\mathcal{U}$). Si $\Omega = \Sigma_\alpha \theta^\alpha \wedge \theta^{\alpha'}$ ($\alpha = 1, \dots, n$; $\alpha' = \alpha + n$) est la forme symplectique canonique sur $(M, g)$ les formes $\theta^\alpha$ et $\theta^{\alpha'}$ sont dites *associées* dans une base de Witt définie par $\Omega$. Dans cet article on étudie les variétés parakählériennes telles que les crochets de Poisson $\{\theta^\alpha, \theta^{\alpha'}\}_P$ par rapport à $\Omega$ de tous les couples $(\theta^\alpha, \theta^{\alpha'})$ soient nuls. On dit dans ce cas que la variété $(M, g)$ possède *la propriété de Poisson*. Eu égard à une définition de d'Atri et Nickerson [3] il est prouvé que toute variété parakählerienne qui possède la propriété de Poisson possède aussi *la propriété de la divergence*.

Si $\sigma_c$: $(M, \Omega) \to (\tilde{M}, \tilde{\Omega})$ est un *symplectomorphisme canonique* $(\sigma_c^* \tilde{\Omega} = \Omega)$, on établit les conditions nécessaires et suffisantes pour que la propriété de Poisson se conserve sur $(\tilde{M}, \tilde{\Omega})$. Finalement il est prouvé que toute variété parakählerienne qui possède la propriété de Poisson est *feuilletée* par $n$ surfaces parakähleriennes $S_\beta$ douée chacune d'une immersion $x$: $S_\beta \to M$ *cylindrique* dans $M$ et dont l'*invariant arithmétique* de Chern est 2.

(*) Indirizzo degli AA.: G. ARCA, Istituto Matematico, Via Ospedale 72, 09100 Cagliari, Italy; R. ROSCA, Faculté de Sciences et Techniques, Département de Mathématiques, Sfax, Tunisie.

(**) Ricevuto: 6-II-1979.

1 – Soit $(M, g)$ une variété parakählerienne de dimension $2n$ (une telle variété peut se définir comme étant une variété pseudo-riemannienne de signature $(n, n)$ et ayant une structure kählerienne [4] et soit $T_p(M)$ l'espace tangent à $M$ en chaque point $p \in M$. On sait [3] qu'à une base réelle de $T_p(M)$ est injectivement associée une base réelle de Witt (ou $W$-base). Si $S_p$ et $S'_p$ sont deux espaces vectoriels *self-orthogonaux* [7] de même dimension $n$, on a la décomposition de Witt

$$T_p(M) = S_p(M) \oplus S'_p(M) . \tag{1.1}$$

Le couple $(S_p, S'_p)$ définit un automorphisme $\mathscr{U}$ satisfaisant $\mathscr{U}^2 = +1$ [5] et si $h_\alpha \in S_p$, $h_{\alpha'} \in S'_p$ ($\alpha = 1, \ldots, n$; $\alpha' = \alpha + n$) sont les vecteurs isotropes (réels) de la $W$-base, on a $\mathscr{U} h_\alpha = h_\alpha$, $\mathscr{U} h_{\alpha'} = -h_{\alpha'}$. Si $\mathscr{R}(M)$ est le fibré des repères parahermitiens [4] et $\mathscr{R} = \{h_A\}_{1 \leqslant A \leqslant 2n} \in \mathscr{R}(M)$ un tel repère, on a

$$\langle h_\alpha, h_{\beta'} \rangle = \delta_{\alpha\beta} . \tag{1.2}$$

Soit $\{\theta^A\}$ la base duale de $\{h_A\}$ et $j$ et $\mu$ les isomorphismes définis respectivement par la métrique $g = 2\Sigma_\alpha \theta^\alpha \otimes \theta^{\alpha'}$ de $M$ et la 2-forme symplectique $\Omega = \Sigma_\alpha \theta^\alpha \wedge \theta^{\alpha'}$ échangeable avec $g$ ($\mu$: $X \to i_X \Omega$; $X \in T_p(M)$; $i_X$: produit intérieur par le champ $X$). La métrique $g$ et la 2-forme $\Omega$ sont les deux laissées invariantes par le groupe symplectique $Sp(n, R)$.

La variété $(M, g, \Omega)$ est structurée par la connexion

$$\nabla h_A = \theta^B_A \otimes h_B , \tag{1.3}$$

où $\theta^B_A = l^B_{AC} \theta^C$ sont les formes de connexion sur le fibré $\mathscr{R}(M)$ et $l^B_{AC} \in C^\infty(M)$ sont les coefficients de connexion. De (1.2) on trouve facilement

$$\theta^\alpha_\beta + \theta^{\beta'}_{\alpha'} = 0 . \tag{1.4}$$

D'autre part la structure kählerienne de $M$ implique que la matrice $M$ de la connexion $\nabla$ soit une matrice de Chern-Libermann, $\mathscr{M}_{C-L} = \begin{bmatrix} \theta^\alpha_\beta & 0 \\ 0 & \theta^{\alpha'}_{\beta'} \end{bmatrix}$.

La connexion $\nabla$ étant sans torsion les équations de structure sont en vertu de l'expression de $\mathscr{M}_{C-L}$

$$d\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \theta^\alpha_\beta , \qquad d\theta^{\alpha'} = \theta^{\beta'} \wedge \theta^{\alpha'}_{\beta'} , \tag{1.5}$$

et

$$\mathrm{d}\theta^{\alpha}_{\beta} = \Omega^{\alpha}_{\beta} + \theta^{\gamma}_{\beta}\wedge\theta^{\alpha}_{\gamma}\,, \qquad \mathrm{d}\theta^{\alpha'}_{\beta'} = \Omega^{\alpha'}_{\beta'} + \theta^{\gamma'}_{\beta'}\wedge\theta^{\alpha'}_{\gamma'}\,, \tag{1.6}$$

où $\Omega^{\alpha}_{\beta}$ et $\Omega^{\alpha'}_{\beta'}$ sont les 2-formes de courbure. Par la suite, dans la $W$-base considérée, le covecteur $\theta^{\alpha'} \in S'^{*}_{p}(M)$ sera appelé l'*associé* de $\theta^{\alpha} \in S^{*}_{p}(M)$ (resp. $h_{\alpha}$ l'associé de $h_{\alpha'}$) et $S_{p}(M)$ et $S'_{p}(M)$ respectivement le premier et le second espace self-orthogonal.

**2** – Nous disons que la variété parakählerienne $(M, g, \Omega)$ possède la propriété de Poisson si au voisinage de chaque point $p \in M$ il existe un repère $\mathscr{R} \equiv \{h_A\}$ tel que le crochet de Poisson $\{\theta^{\alpha}, \theta^{\alpha'}\}_P$ par rapport à la structure symplectique $Sp(n, R)$ de $(M, g, \Omega)$ soit nul pour tous les couples de covecteurs associés. En vertu de la définition générale on devra écrire

$$\{\theta^{\alpha}, \theta^{\alpha'}\}_P = \mathscr{L}_{\mu^{-1}(\theta^{\alpha})}\, i_{\mu^{-1}(\theta^{\alpha'})}\, \Omega - i_{\mu^{-1}(\theta^{\alpha'})}\, \mathscr{L}_{\mu^{-1}(\theta^{\alpha})}\, \Omega = 0\,, \tag{2.1}$$

où $\mathscr{L}_X = i_X\cdot \mathrm{d} + \mathrm{d}\cdot i_X$ est la dérivée de Lie dans la direction $X$. Mais $\Omega$ étant fermée on déduit de (2.1)

$$i_{h_{\alpha}}(\mathrm{d}\theta^{\alpha}) + i_{h_{\alpha'}}(\mathrm{d}\theta^{\alpha'}) = 0\,. \tag{2.2}$$

A l'aide de (1.5) on obtient de (2.2) pour tout couple d'indices $(\alpha, \alpha')$ les relations

$$l^{\alpha}_{\alpha\alpha} = 0\,, \quad l^{\alpha}_{\alpha\alpha'} = 0\,, \quad l^{\alpha}_{\beta\alpha} = 0\,, \quad l^{\beta}_{\alpha\alpha'} = 0 \qquad (\beta \neq \alpha)\,. \tag{2.3}$$

Eu égard à (2.3) on déduit de (1.3)

$$(\nabla_{h_{\alpha'}} h_{\alpha'} = 0\,, \quad \nabla_{h_{\alpha'}} h_{\alpha} = 0) \Rightarrow [h_{\alpha}, h_{\alpha'}] = 0\,, \tag{2.4}$$

et les champs vectoriels associés *commutent*.

D'autre part si $\eta = \theta^{1}\wedge\ldots\wedge\theta^{n}\wedge\theta^{1'}\wedge\ldots\wedge\theta^{n'}$ est la forme volume canonique sur $M$, on a par définition

$$\mathscr{L}_{h_A}\eta = (\operatorname{div} h_A)\eta\,. \tag{2.5}$$

Conformément à D'Atri et Nickerson [**3**] si au voisinage de chaque point $p \in M$ d'une variété $M$ (orientable) il existe un repère dont les vecteurs de base soient de divergence nulle, on dit que $M$ possède *la propriété de* *la divergence.* Dans le cas qui nous occupe il vient à l'aide de (1.4) e (1.5)

$$\operatorname{div} h_\alpha = \Sigma_\beta l^\beta_{\alpha\beta}\,, \qquad \operatorname{div} h_{\alpha'} = \Sigma_\beta l^\alpha_{\beta\beta'} \tag{2.6}$$

et compte tenu de (2.4) on trouve aussitôt

$$\operatorname{div} h_\alpha = 0\,, \qquad \operatorname{div} h_{\alpha'} = 0\,. \tag{2.7}$$

Ainsi tout variété parakählerienne qui possède la propriété de Poisson possède aussi la propriété de la divergence.

Si nous considérons maintenant le *symplectomorphisme canonique* $\sigma_c$ [**5**]

$$\tilde\theta^\alpha = t_\alpha \theta^\alpha + \lambda_\alpha \theta^{\alpha'}, \qquad \tilde\theta^{\alpha'} = \frac{1}{t_\alpha}\theta^{\alpha'}, \quad t_\alpha,\, \lambda_\alpha \in C^\infty(M) \quad \text{(ne pas sommer sur } \alpha) \tag{2.8}$$

les champs vectoriels *duaux symplectiques* sont définis par

$$\zeta_\alpha = \mu^{-1}(\tilde\theta^\alpha) = \lambda_\alpha h_\alpha - t_\alpha h_{\alpha'}\,, \qquad \zeta_{\alpha'} = \mu^{-1}(\tilde\theta^{\alpha'}) = \frac{h_\alpha}{t_\alpha}\,. \tag{2.9}$$

Cherchons sous quelles conditions la propriété de Poisson est invariante par $\sigma_c$. Eu égard aux propriétés du crochet de Poisson dans $T^*_p(M)$ et compte tenu de (2.2) on trouve après calcul

$$i_{h_\alpha} dt_\alpha = 0\,, \qquad i_{h_\alpha} d\lambda_\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dt_\alpha}{t_\alpha} = \left(i_{h_\alpha} \frac{dt_\alpha}{t_\alpha}\right) \theta^{\alpha'}. \tag{2.10}$$

Les conditions ci-dessus sont aussi suffisantes et elles expriment que les fonctions $t_\alpha$ et $\lambda_\alpha$ sont *invariantes par* $h_\alpha$ (les indices se correspondent) et que les covecteurs $\theta^{\alpha'}$ sont conformes à $dt_\alpha/t_\alpha$. On a donc le

Théorème. *Toute variété parakählerienne qui possède la propriété de Poisson possède aussi la propriété de la divergence et les vecteurs associés de la W-base commutent. En outre les conditions nécessaires et suffisantes pour que la propriété de Poisson soit invariante par un symplectomorphisme canonique* $\sigma_c$ *sont:* (i) *les fonctions* $t_\alpha$, $\lambda_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ *qui définissent* $\sigma_c$ *sont invariantes par les vecteurs* $h_\alpha$ *(les indices se correspondent) qui forment la base vectorielle du premier espace self-orthogonal associé à la W-base*; (ii) *les covecteurs* $\theta^{\alpha'}$ $(\alpha' = \alpha + n)$ *qui correspondent au second espace self-orthogonal associé à la W-base sont conformes à* $dt_\alpha/t_\alpha$.

**3** – A l'aide des relations (2.3) il est facile de voir que toute distribution bidimensionnelle parahermitienne est *involutive*. Considérons par exemple la distribution $D \equiv \{h_\beta, h_{\beta'}\}$ dont les variétés intégrales maximales (feuilles) sont des surfaces parakähleriennes $S_\beta$. Si nous notons pour des raisons de simplicité avec les mêmes lettres les éléments induits par l'immersion (proprie) $x$: $S_\beta \to M$, la *forme de soudure* de $S_\beta$ est

$$\mathrm{d}p = \theta^\beta \otimes h_\beta + \theta^{\beta'} \otimes h_{\beta'} \qquad \text{(ne pas sommer sur } \beta') \,. \tag{3.1}$$

En tant que sousvariétés parakähleriennes d'une variété parakählerienne, on sait que ces surfaces sont *minimales* [**5**] (le vecteur de courbure moyenne, ou de Bompiani, est nul en chaque point de $S_\beta$) et que l'immersion $x$ est substantielle [**8**].

Les sections normales (isotropes) du sous-fibré normal $T(S_\beta)^\perp$ sont définies par les $(2n-2)$ vecteurs isotropes $h_r$, $h_{r'}$ $(r=1, \dots, \beta-1, \beta+1, \dots, n;\ r'=r+n)$. En nous rapportant à (1.3) et compte tenu de (2.3) on trouve que les secondes formes quadratiques fondamentales $l_r = \langle \mathrm{d}p, \nabla h_r \rangle$, $l_{r'} = \langle \mathrm{d}p, \nabla h_{r'} \rangle$ associées à $x$ sont définies par

$$l_r = l^\beta_{r\beta'} \cdot \theta^{\beta'} \otimes \theta^{\beta'} , \qquad l_{r'} = l^r_{\beta\beta} \cdot \theta^\beta \otimes \theta^\beta \qquad \text{(ne pas sommer sur } \beta) \,. \tag{3.2}$$

Eu égard à (2.3), l'expression ci-dessus de $l_r$ et $l_{r'}$ montre aussitôt que l'immersion $x$ est *cylindrique* et que l'*invariant arithmétique* de Chern associé à $x$ est 2.

Supposons maintenant que les deux champs vectoriels $h_\beta$ et $h_{\beta'}$ qui définissent le plan tangent $T_p(S_\beta)$ soient des *champs de Killing*. Cette propriété s'exprime d'une manière intrinsèque par

$$\langle \nabla_Z h_\beta, Z' \rangle + \langle \nabla_{Z'} h_\beta, Z \rangle = 0 \,, \qquad \langle \nabla_Z h_{\beta'}, Z' \rangle + \langle \nabla_{Z'} h_{\beta'}, Z \rangle = 0 \,, \tag{3.3}$$

$\forall Z, Z' \in T_p(S_\beta)$. Eu égard à (1.3) et compte tenu de (2.3) on trouve après calcul

$$l^\beta_{r\beta'} = 0 \,, \qquad l^r_{\beta\beta} = 0 \,, \tag{3.4}$$

et par conséquent $l_r = l_{r'} = 0$.

Toutes les secondes formes fondamentales associées à l'immersion $x$ étant nulles, cette immersion est, conformément à la définition générale [**2**], *totalement géodésique*, propriété qui est en accord avec le caractère général minimal de $S$. On a donc le

Théorème. *Toute variété parakählerienne possèdant la propriété de Poisson est feuilletée par $n$ surfaces parakähleriennes $S_\beta$ douées chacune d'une immersion $x: S_\beta \to M$ cylindrique dans $M$ et dont l'invariant arithmétique de Chern est 2. Si en outre les deux vecteurs isotropes qui définissent le plan tangent en chaque point de $S_\beta$ sont des champs de Killing, l'immersion $x: S_\beta \to M$ est totalement géodésique.*

## Bibliographie


[1] G. Arca, *Variétés pseudo-riemennies structurées par une connexion spin- euclidienne et possedant la proprieté de Killing*, C. R. Acad. Sc. Paris, Ser. A **290** (1980), 839-842.

[2] B. Y. Chen, *Geometry of submanifolds*, M. Dekker Inc., New York 1973.

[3] J. E. D'Atri and H. K. Nickerson, *The existence of special orthonormal frames*, J. Differential Geometry **2** (1968), 393-409.

[4] P. Libermann, *Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **36** (1954), 27-120.

[5] R. Rosca, *Quantic manifolds with para-cohermitian structure*, Ködai Math. Sem. Rep. **27** (1976), 51-61.

[6] H. Slebodzinski, *Formes extérieures et leurs applications*, Polska Akad. Nauk, Warszawa 1963.

[7] J. M. Souriau, *Structures des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris 1970.

[8] G. Vranceanu and R. Rosca, *Introduction in relativity and pseudo Riemannian geometry*, Acad. R. S. R., Bucharest 1976.


## Summary


*Let $(M, \Omega, g)$ be a parakählerian manifold and let $\Omega = \sum_\alpha \theta^\alpha \wedge \theta^{\alpha'}$ $(\alpha = 1, \ldots, n;$ $\alpha' = \alpha + n)$ be the canonical symplectic 2-form on $M$. The paper studies the case in which $M$ has the Poisson property,* i.e. *in the neighborhood of any point $p \in M$ there exists a coframe $(\theta^\alpha, \theta^{\alpha'})$ such that all the Poisson brachets $\{\theta^\alpha, \theta^{\alpha'}\}_P$ with respect to $\Omega$ vanish. It is shown that in this case also the divergence property holds on $M$. Moreover $M$ is foliated by $n$ parakahlerian surfaces whose immersion in $M$ is cylindrical.*


* * *