

ROBERTO CIANCI (\*)

**Studio su alcune soluzioni singolari  
delle equazioni gravitazionali di Einstein (\*\*)**

**1 - Introduzione**

La fisica dei black holes presenta molte analogie matematiche con la teoria classica della termodinamica. Per chiarire meglio questo punto è conveniente notare che, allo stadio attuale della ricerca, si è in grado di descrivere in maniera soddisfacente solo soluzioni stazionarie del problema delle holes; al contrario cercando soluzioni dinamiche ci si imbatte in una formidabile difficoltà computativa che non permette in generale alcuna soluzione delle equazioni di campo.

Per questo motivo si è sviluppata nella letteratura la teoria delle holes assisimmetriche [4]<sub>2</sub>, [8] l'evoluzione temporale delle quali è pensata come un continuo passaggio tra stati contigui di equilibrio. Prescindendo in questo lavoro da ogni considerazione se un simile modello abbia riscontro o meno nella realtà fisica, è doveroso notare che l'analogia sopra citata non si arresta a questo punto. Definendo infatti in maniera adeguata grandezze quali massa, temperatura, entropia delle holes si possono enunciare quattro leggi che sono formalmente analoghe ai quattro principi della termodinamica classica <sup>(1)</sup> [2].

In questo lavoro ci occuperemo in dettaglio di una classe di soluzioni delle equazioni gravitazionali di Einstein la cui interpretazione è strettamente connessa con la validità della terza legge della « termodinamica delle holes » che, allo stadio attuale, non è ancora stata suffragata da una dimostrazione rigorosa.

---

(\*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Via L. B. Alberti 4, 16132 Genova, Italy.

(\*\*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 26-I-1979.

(<sup>1</sup>) Tra questi vi è incluso il principio zero della termodinamica [9].

Esplicitamente questa legge afferma — Non è possibile, con qualsiasi procedura comunque idealizzata ridurre a zero la « temperatura » delle holes tramite un insieme finito di operazioni —. Ciò naturalmente non vieta che possano esistere soluzioni assisimmetriche a temperatura nulla; alcune di esse sono state studiate in letteratura (e.g. [4]<sub>1</sub>).

Nel paragrafo seguente verranno trovate ed analizzate *tutte* le soluzioni, localmente fisicamente accettabili <sup>(2)</sup>, a simmetria sferica che hanno temperatura identicamente nulla in un certo aperto dello spazio-tempo  $V_4$ . Analizzando i risultati ottenuti si potrà concludere che le soluzioni così trovate sono estremamente difficili da accettare per la caratterizzazione assai artificiosa del loro tensore energia-impulso; una totale corrispondenza con la terza legge sarà inoltre trovata.

## 2 - Studio delle soluzioni singolari

Nell'ambito della teoria dello spazio-tempo assisimmetrico asintoticamente piatto sono state enunciate molte definizioni alcune delle quali, per completezza vengono qui riportate.

Def. 1. «  $\mathcal{I}$  » è il dominio di comunicazione esterna definito come la regione di  $V_4$  in cui esistono linee di tipo tempo (dirette tanto verso il futuro che verso il passato), che si estendono a distanze arbitrariamente grandi.

Def. 2.  $\mathcal{H}$  è l'orizzonte degli eventi, definito come la frontiera di «  $\mathcal{I}$  »; esso è una superficie nulla compatta con vettore normale  $l^i$ .

Def. 3.  $k/8\pi$  è la temperatura della hole definita implicitamente dalla relazione

$$(2.1) \quad l_{i;j}l^j = kl_i.$$

È da notare che la Def. 2 definisce il vettore  $l^i$  solo in punti  $p \in \mathcal{H}$ . La definizione generale è ottenuta ricordando che l'ipotesi di assisimmetria implica  $l^i(\partial/\partial x^i) = \partial/\partial t + \Omega(\partial/\partial \varphi)$  in punti  $p \in \mathcal{H}$  (2.2). Nella (2.2)  $\partial/\partial t$  e  $\partial/\partial \varphi$  sono i campi di killing fondamentali la cui esistenza è garantita dall'ipotesi di assisimmetria. In virtù del fatto che  $\Omega$  è costante su  $\mathcal{H}$  [4]<sub>2</sub>, il campo  $l^i$

---

<sup>(2)</sup> Con questa frase si intende che il corrispondente tensore energia-impulso può essere generato da una distribuzione fisica di materia [7].

è definito in grande utilizzando ovunque l'equazione (2.2) con questo particolare valore di  $\Omega$ . Ovviamente l'equazione  $l^i l_i = 0$  vale solo su  $\mathcal{H}$ . Per maggiori dettagli si veda per es. [4]<sub>2</sub>.

Vogliamo ora determinare il più generale elemento di linea a simmetria sferica che dia origine ad un orizzonte a temperatura identicamente nulla in un aperto di  $V_4$ .

Si consideri perciò la generale espressione [5]

$$(2.3) \quad ds^2 = -2F(r, u) dr du + H(r, u) d^2\Omega,$$

ove

$$d^2\Omega = \text{sen}^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2 \quad (3).$$

Le varietà  $H(r, u) = \text{cost.}$  sono superfici sferiche con vettore normale  $l_i = (\partial/\partial x^i)H$ .

D'altra parte un facile calcolo mostra che dalla (2.1) discende la

$$(2.4) \quad (l_i l^i)_{,j} = 2kl_j,$$

ove la richiesta  $k = 0$  implica

$$(2.5) \quad \frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

Ciò implica (1)  $H = H(r)$ , (2)  $H = H(u)$ , (3)  $H = \text{cost.}$

È ovvio che i casi (1) e (2) sono equivalenti tramite una ridenominazione delle variabili  $r, u$ . Al contrario il caso (3) già studiato in [5] è da scartare per i nostri scopi.

Limitando quindi l'interesse al solo caso (1), usando segnatura  $+2$  è sempre possibile scegliere la coordinata  $r$  in modo che  $H(r) = r^2$ .

La (2.3) diventa così

$$(2.6) \quad ds^2 = -2F(r, u) dr du + r^2 d^2\Omega.$$

Il tensore energia-impulso corrispondente, calcolato tramite l'equazione di Einstein

$$(2.7) \quad G_{ij} = -8\pi T_{ij},$$

---

(3) Si noti che la (2.3) esprime il più generale elemento di linea a simmetria sferica.

risulta così

$$(2.8) \quad T_{ij} = -\frac{1}{8\pi} \begin{pmatrix} 0 & -F/r^2 & 0 & 0 \\ -F/r^2 & -2F_u/rF & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (r^2/F)(F_u/F)_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta / F (F_u/F)_r \end{pmatrix}.$$

Risolvendo l'equazione

$$(2.9) \quad (T_{ij} - \lambda g_{ij})v^j = 0,$$

è facile mostrare che  $T_{ij}$  ha due autovettori spaziali ed uno nullo doppio. L'unico tensore energia-impulso con questa struttura spettrale, accettabile nel senso di Hawking [7] è quello relativo al campo elettromagnetico di radiazione (Tipo II della classificazione a pag. 89 in [7]) il quale però dovrebbe soddisfare la

$$(2.10) \quad T = T^{ij}g_{ij} = 0.$$

Questa equazione non è verificata dal tensore (2.8). Se però si suppone  $F_r = 0$ , il tensore  $T_{ij}$  diventa del tipo I (caso materiale) e perciò accettabile per quanto riguarda i requisiti sull'energia a riposo del fluido.

Conformemente a ciò è possibile ridefinire  $u$  in modo che risulti  $F(u) = 1$ .

Ci si riconduce così a studiare l'elemento di linea

$$(2.11) \quad ds^2 = -2 dr du + r^2 d^2\Omega.$$

L'eq. (2.9) ora fornisce

$$(2.12) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0; \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -\frac{1}{8\pi r^2}.$$

Studiamo ora la struttura conforme della soluzione (2.11).

Per far ciò poniamo  $r = \operatorname{tg} q$ . Con questa scelta la (2.11) diventa

$$(2.13) \quad ds^2 = \frac{1}{\cos^2 q} d\bar{s}^2, \quad \text{ove} \quad d\bar{s}^2 = 2 du dq + \sin^2 q d^2\Omega.$$

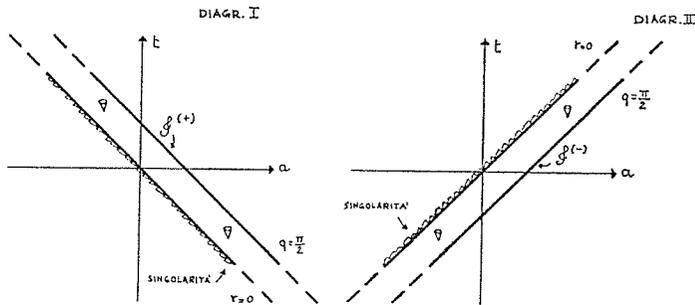
A seconda che si ponga

$$(2.14)_a \quad r = t + a, \quad u = a - t$$

od

$$(2.14)_b \quad r = t + a, \quad u = t - a,$$

si hanno, rispettivamente, i due seguenti diagrammi



È facile vedere che la soluzione (2.11) ha le caratteristiche cercate: il diagramma I si interpreta come una « continua white hole » ed il diagramma II come una « continua black hole ».

In parole semplici temperatura nulla in un aperto di  $V_4$  equivale ad « orizzonte spesso ».

### 3 - Commento finale e conclusioni

La metrica (2.11) non è stazionaria. Infatti il campo  $\partial/\partial t$  è time-like ma non di Killing. Al contrario i campi di Killing sono: (1)  $\partial/\partial r$  e  $\partial/\partial u$  entrambi nulli; (2) gli operatori di momento angolare  $J_x, J_y, J_z$ .

Un attento esame della struttura causale mostra però che sorgono delle anomalie rispetto alle altre soluzioni note [7]<sub>2</sub>, [3]. Si consideri per es. la soluzione relativa al diagramma II. Si può notare facilmente che, mentre una particella fisica non può in alcuna maniera incrementare il valore della sua coordinata  $r$ , può peraltro evitare di collassare seguendo una adatta linea di universo non geodetica. Al contrario qualsiasi particella che viaggi su geodetiche di tipo tempo deve collassare in un tempo proprio finito.

Si consideri invece l'evoluzione temporale della luce emessa ad un certo istante da una superficie spaziale compatta  $S$ . È facile vedere che dei due fronti d'onda creati solo uno diminuisce sempre la sua area. Al contrario, il fronte d'onda « uscente » è sempre descritto dall'equazione  $r = \text{cost}$ . Rigorosamente  $S$  è una superficie intrappolata marginalmente [6].

Questa osservazione ci induce a pensare che, in un certo senso euristico, la varietà sia un continuo di orizzonti. Per ultimo è doveroso notare che le soluzioni ottenute sono, da un punto di vista fisico, estremamente artificiali.

Risolviendo l'equazione (2.9) ci si accorge che il tensore  $T_{ij}$  non definisce in maniera univoca un sistema di riferimento in quiete col fluido. Matematicamente ciò è dovuto alla duplice degenerazione dell'autovalore  $\lambda = -1/(8r^2)$ . In ogni caso, scegliendo localmente come velocità del fluido un qualsiasi vettore temporale nell'autospazio bidimensionale del suddetto autovalore è facile vedere che il tensore (spaziale) di stress è del tipo

$$S_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1/8\pi r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anche questa peculiarità è estremamente anomala e riesce difficile pensare che possa esistere un fluido che la realizzi.

Si può quindi concludere che, almeno nel caso sferico (ma verosimilmente anche nel caso assisimmetrico sotto ipotesi molto deboli [1]) le soluzioni dell'equazione di Einstein che descrivono holes a temperatura nulla in un aperto di  $V_4$  sono difficilmente accettabili ed in ogni caso altamente instabili. Infatti è facile vedere che la più piccola (arbitraria) perturbazione del tensore metrico porta ad una rottura della degenerazione dell'autovalore  $\lambda = -1/(8\pi r^2)$  distruggendo così la soluzione.

### Bibliografia

- [1] F. BAMPI and R. CIANCI, *Generalized axisymmetric spacetimes*, Comm. Math. Phys. **70** (1979), 69-74.
- [2] J. BARDEN, B. CARTER and S. HAWKING, *The four laws of black holes mechanics*, Comm. Math. Phys. **31** (1973), 161-170.
- [3] R. BOYER and R. LINDQUIST, *Maximal analytic extension of the kerr metric*, J. Mathematical Phys. **8** (1967), 265-281.
- [4] B. CARTER: [ $\bullet$ ]<sub>1</sub> *The complete analytic extension of the Reissner-Nordström metric in the special case  $e^2 = m^2$* , Phys. Lett. **21** (1966), 423-424; [ $\bullet$ ]<sub>2</sub> *Black holes*, Gordon & Breach, New York 1973.
- [5] J. EHLERS, *Relativity, Astrophysics and Cosmology*, Israel, Reidel Publ. Company, Boston 1973.

- [6] S. HAWKING, *Black holes*, Gordon & Breach, New York 1973.
- [7] S. HAWKING and G. ELLIS, *The large scale structure of space-times*, Cambridge University Press 1973.
- [8] C. REINA and A. TREVES, *Axisymmetric gravitational fields*, General Relativity and Gravitation 7 (1976), 817-838.
- [9] M. ZEMANSKY, *Heat and thermodynamics*, Mc Graw Hill Book Company Inc., New York 1957.

### A b s t r a c t

*A class of singular, extreme (0-temperature) spherically symmetrical solution is studied. In the spite of the third law of black hole-mechanics (still exencially a conjecture) it is shown that an arbitrary perturbation of the metric usually destroy the solution.*

\* \* \*

