Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 217-223

F. CAMMAROTO e G. LO FARO (*)

Spazi nearly-compact e spazi compatti (**)

Introduzione

In [2], tenendo conto di [1], [8], [9] si è pervenuti a caratterizzare gli spazi nearly-compact come spazi in cui ogni filtro particolarmente chiuso (cfr. [2] def. 5.1) e non nullo sullo spazio topologico S possiede almeno un punto di aderenza in S (cfr. [2] teor. 2.1).

In [6] Asha Mathur ha invece provato che: S è nearly-compact se e solo se ogni filtro su S ha almeno un δ-punto di aderenza in S.

Le due caratterizzazioni sono indipendenti per il fatto che non tutti i filtri su S sono particolarmente chiusi su S e non tutti i δ-punti di aderenza in S sono punti di aderenza in S.

In questo lavoro, tenendo conto di [2] e [6] diamo delle nuove caratterizzazioni degli spazi nearly-compact e degli spazi compatti. In tale ottica, considerato l'assioma di separazione $T_{2\frac{1}{2}}$ proviamo che uno spazio S di Hausdorff, è $T_{2\frac{1}{2}}$ se e solo se lo è ogni suo sottoinsieme proprio regolarmente chiuso (Lemma 1.1). Risultato che assieme al teor. 2.1 di [2] ed al teor. 2 di [5] ci permette di caratterizzare gli spazi nearly-compact come spazi in cui i loro sottoinsiemi propri regolarmente chiusi sono nearly-compact (Teor. 1.2). Completiamo così il risultato di Asha Mathur (cfr. [6], teor. 7) in cui è provata solo la necessarietà del Teor. 1.2.

Mediante quest'ultimo risultato e quelli riportati in [3] otteniamo inoltre una nuova serie di caratterizzazioni per gli spazi compatti (cfr. Teor. 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4), l'ultima delle quali (Teor. 2.4) migliora il noto risultato « S è compatto se e solo se ogni filtro su S ha un punto di aderenza in S » ed è perfettamente

(*) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica, Università, Via C. Battisti, 98100 Messina, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 13-XII-1978.

in linea con la caratterizzazione degli spazi nearly-compact di cui al punto (2) del Teor. 1.1.

Concludiamo con un controesempio di spazio almost-compact e T_{2a} (pertanto nearly-compact, [2] teor. 2.1) ma non compatto a conferma della non migliorabilità del toer. 3 di [5] con il seguente risultato: « S è compatto se e solo se è almost-compact e T_{2a} ».

Circa le notazioni usate per i filtri e le loro operazioni seguiamo le notazioni del Kowalshy [4] anzichè quelle del Bourbaki. Ricordiamo semplicemente: se $\mathscr{F}$ è un filtro su $(S,\mathscr{T})$ di base $\mathscr{B}$ (cfr. [4], def. 5c), indichiamo con $\overline{\mathscr{F}}$ il filtro chiuso (cfr. [4], pag. 39) su $(S,\mathscr{T})$ una cui base è $\overline{\mathscr{B}} = \{\bar{B}/B \in \mathscr{B}\}$, essendo $\bar{B}$ la chiusura di B in S ($\overset{\circ}{B}$ è l'interno di B in S). Inoltre se $\mathscr{G} = \overline{\mathscr{G}}$ è un altro filtro su $(S,\mathscr{T})$, indichiamo con $\mathscr{F}\wedge\mathscr{G}$ il filtro intersezione reticolare di $\mathscr{F}$ con $\mathscr{G}$ cioè, $\inf\{\mathscr{F}, \mathscr{G}\}$ (cfr. [4], pag. 24).

Diciamo inoltre che $\mathscr{F}$ è il filtro nullo $\mathscr{O}$ su $(S,\mathscr{T})$ se $\phi \in \mathscr{F}$. Per tutte le altre notazioni rimandiamo a [2].

Ricordiamo ora le seguenti definizioni:

Definizione 1.1. *Diciamo che uno spazio topologico S è $T_{2\frac{1}{2}}(T_{2a})$* (cfr. [3] e [10], pag. 13) *se per ogni coppia di suoi punti distinti (x, y) esistono due intorni aperti a chiusure disgiunte (esiste una funzione continua $f\colon S \to [0, 1]$ tale che $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$).*

Definizione 1.2. *Diciamo che uno spazio topologico S è almost-compact* (cfr. [9] def. 3.1) *quando da ogni ricoprimento aperto $R = \{A_i\}_{i\in I}$ di S è possibile estrarre una sottofamiglia finita $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}\}$ tale che $\bar{A}_{i_1} \cup \bar{A}_{i_2} \cup \ldots \cup \bar{A}_{i_n} = S$.*

Definizione 1.3. *Diciamo che uno spazio topologico S è nearly-compact* (cfr. [8]) *quando da ogni ricoprimento aperto $R = \{A_i\}_{i\in I}$ di S è possibile estrarre una sottofamiglia finita $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}\}$ tale che $\overset{\circ}{\bar{A}}_{i_1} \cup \overset{\circ}{\bar{A}}_{i_2} \cup \overset{\circ}{\bar{A}}_{i_3} \cup \ldots \cup \overset{\circ}{\bar{A}}_{i_n} = S$.*

Definizione 1.4. *Diciamo che un sottoinsieme A di uno spazio topologico S è regolarmente chiuso (regolarmente aperto) se è la chiusura (l'interno) di un insieme aperto (chiuso) o equivalentemente se è la chiusura del suo interno (l'interno della sua chiusura).* (cfr. [9] def. 2.2 e [10] pag. 6).

Teorema 1.1. *Sia S uno spazio topologico di Hausdorff. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *S è nearly-compact;*

(2) *ogni filtro particolarmente chiuso e non nullo su S, possiede almeno un punto di aderenza in S;*

(3) *ogni famiglia di sottoinsiemi di S regolarmente chiusi, aventi la proprietà dell'intersezione finita (l'intersezione di un numero finito di elementi della famiglia è sempre diversa dall'insieme vuoto), ha intersezione diversa dall'insieme vuoto;*

(4) *S è almost-compact e soddisfa all'assioma di separazione $T_{2\frac{1}{2}}$* (cfr. [2] teor 2.1).

1 - Nearly-compact

Lemma 1. *Uno spazio topologico S di Hausdorff è $T_{2\frac{1}{2}}$ se e solo se lo è ogni suo sottoinsieme proprio e regolarmente chiuso.*

Dim. Per l'ereditarietà dell'assioma $T_{2\frac{1}{2}}$ la necessarietà è ovvia. Viceversa, supponiamo per assurdo che esistano $x, y \in S$ con $x \neq y$ tali che per ogni coppia di intorni aperti $W_x \in \mathscr{U}_x$ e $W_y \in \mathscr{U}_y$ si abbia $\overline{W}_x \cap \overline{W}_y \neq \emptyset$.

Gli insiemi del tipo $C = \overline{W}_x \cup \overline{W}_y$ sono, ovviamente, insiemi regolarmente chiusi di S; proviamo che al variare di $W_x \in \mathscr{U}_x$ e $W_y \in \mathscr{U}_y$ esiste un insieme $C = \overline{W}_x \cup \overline{W}_y$ che risulta un sottoinsieme proprio di S.

Sia $z \in S$ un elemento distinto sia da x che da y (1). Essendo S di Hausdorff esistono V_x e U_x intorni di x, V_y e U_y intorni di y e V_z e U_z intorni di z tali che $V_x \cap V_y = \emptyset$; $U_x \cap U_z = \emptyset$; $U_y \cap V_z = \emptyset$. Ponendo $V_x \cap U_x = Z_x$ e $V_y \cap U_y = Z_y$, ne segue che $z \notin \bar{Z}_x$ e $z \notin \bar{Z}_y$ onde $z \notin \bar{Z}_x \cup \bar{Z}_y$ e quindi $C = \bar{Z}_x \cup \bar{Z}_y$ è un insieme regolarmente chiuso e proprio di S e pertanto C è $T_{2/\frac{1}{2}}$.

Essendo $x, y \in C$, esisteranno $V_x \in \mathscr{U}_x$ e $V_y \in \mathscr{U}_y$ tali che $(\overline{V_x \cap C})^{(C)} \cap (\overline{V_y \cap C})^{(C)} = \emptyset$.

Poichè non è restrittivo supporre $V_x \subseteq W_x \subseteq C$ e $V_y \subseteq W_y \subseteq C$, otteniamo $\overline{V}_x^{(C)} \cap \overline{V}_y^{(C)} = \emptyset$.

Essendo C un chiuso di S contenente V_x e V_y ne segue che $\overline{V}_x^{(C)} \cap \overline{V}_y^{(C)} = \overline{V}_x \cap \overline{V}_y = \emptyset$, il che è assurdo avendo supposto $\overline{\mathscr{U}_x} \wedge \overline{\mathscr{U}_y} \neq 0$.

Osservazione 1. L'ipotesi che lo spazio topologico del Lemma precedente sia di Hausdorff non è superflua, infatti esiste il seguente esempio di spazio $(S, \mathscr{T})$ non di Hausdorff in cui i sottoinsiemi propri e regolarmente chiusi sono $T_{2\frac{1}{2}}$ senza che S lo sia.

Siano, $S = \{a, b, c\}$ e $\mathscr{T} = \{\emptyset, S, \{a\}, \{a, b\}\}$ la famiglia degli aperti di S. Poichè l'elemento $\{a\}$ appartiene ad ogni aperto, lo spazio $(S, \mathscr{T})$ non è di

---

(1) Se S fosse costituito solo da x ed y, essendo S T_2, ne seguirebbe che x e y sarebbero aperti e chiusi di S e quindi il Lemma sarebbe banalmente vero.

Hausdorff e quindi non è $T_{2\frac{1}{2}}$, non esistendo inoltre alcun sottoinsieme proprio e regolarmente chiuso di S l'esempio è valido.

Teorema 1.2. *Sia S uno spazio topologico di Hausdorff, risulta allora: S è nearly-compact se e solo se ogni suo sottoinsieme proprio e regolarmente chiuso è nearly-compact.*

Dim. Per (4), Teor. 1.1, risulta S almost compact e $T_{2\frac{1}{2}}$.

Per [**5**] teor. 2 e per il Lemma 1.1 segue la necessarietà.

Il viceversa segue immediatamente da (4), Teor. 1.1, dal Lemma 1.1, da [**5**] teor. 2 e nuovamente da (4), Teor. 1.1.

2 - Compact

Utilizzando in modo essenziale il Teor 1.1 otteniamo

Teorema 2.1. *Uno spazio S di Hausdorff è compatto se e solo se ogni suo sottoinsieme proprio e chiuso è nearly-compact.*

Dim. Sia S compatto, da [**9**] teor. 1.1, segue che ogni suo sottoinsieme proprio e chiuso è compatto e quindi nearly-compact.

Viceversa. Dal Teor. 1.2 segue che S è nearly-compact e quindi, per (4), Teor. 1.1, almost-compact e $T_{2\frac{1}{2}}$ assieme a tutti i suoi sottoinsiemi propri e chiusi. Da [**5**], teor. 3, (ii), segue l'asserto.

Osservazione 2. Questo teorema migliora il seguente: « S è compatto se e solo se lo è ogni suo sottoinsieme proprio e chiuso » (si veda [**9**] teor. 1.1).

Teorema 2.2. *Uno spazio S di Hausdorff è compatto se e solo se è almost-compact ed ogni suo sottoinsieme proprio e chiuso è a frontiera compatta.*

Dim. La condizione è, ovviamente, necessaria essendo la frontiera di un chiuso un chiuso.

Viceversa. Per [**5**], teor. 3, (ii), basta provare che S è T_3 (si veda [**4**]). Sia C un qualsiasi chiuso di S, K la sua frontiera ed x un elemento di S non appartenente a C.

Per ogni $y \in K$, consideriamo due intorni $V_x^{(y)}$ di x e V_y di y, tali che $V_x^{(y)} \cap V_y = \emptyset$ ed in modo che $V_x^{(y)}$ sia incluso in $S - C$.

Poichè la famiglia $\{V_y\}_{y\in K}$ è un ricoprimento di K costituito da aperti di S, esistono $y_1, y_2, \dots, y_n$ di K tali che $\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \supseteq K$.

Allora $W_x = \bigcup_{i=1}^{n} V_x^{(y_i)}$ e $W_C = [\mathring{C} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i})]$ sono intorni aperti, di x e C, tali che $W_x \cap W_C = \emptyset$.

Dalla arbitrarietà di x e C segue l'asserto.

Teorema 2.3. *Uno spazio S di Hausdorff è compatto se e solo se è nearly-compact ed ogni suo sottoinsieme proprio e chiuso è a frontiera almost-compact.*

Dim. La necessarietà è ovvia. Proviamo il viceversa. Poichè ogni spazio nearly-compact è almost-compact, per [**5**], teor. 3, (ii), basta provare che S èT_3.

Sia C un chiuso di S, K la sua frontiera ed x un elemento di S non appartenente a C. Per ogni $y \in K$, per (4) Teor. 1.1, esisteranno due intorni aperti $U_x^{(y)}$ di x e V_y di y tali che $\overline{U}_x^{(y)} \cap \overline{V}_y = \emptyset$.

Se supponiamo $V_x^{(y)} = U_x^{(y)} \cap (S - C)$ otteniamo un intorno aperto di x la cui chiusura è disgiunta da quella di V_y ed inclusa in $S - \mathring{C}$ e pertanto ne segue che $\overline{V}_y \subseteq S - \overline{V}_x^{(y)}$.

Ovviamente $\{V_y\}_{y\in K}$ è un ricoprimento di K costituito da aperti di S, esisteranno allora $y_1, y_2, \dots, y_n \in K$ tali che $\overline{V}_{y_1} \cup \overline{V}_{y_2} \cup \dots \cup \overline{V}_{y_n} \supseteq K$. Essendo $\overline{V}_{y_i} \subseteq S - \overline{V}_x^{(y_i)}$, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, risulta $K \subseteq (S - \overline{V}_x^{(y_1)}) \cup (S - \overline{V}_x^{(y_2)}) \cup \dots \cup (S - \overline{V}_x^{(y_n)}) = S - (\overline{V}_x^{(y_1)} \cap \overline{V}_x^{(y_2)} \cap \dots \cap \overline{V}_x^{(y_n)})$ e pertanto $W_x = \bigcap_{i=1}^{n} V_x^{(y_i)}$ e $W_C = S - \bigcap_{i=1}^{n} \overline{V}_x^{(y_i)}$ sono rispettivamente intorni aperti di x e C tali che $W_x \cap W_C = \emptyset$. Dalla arbitrarietà di x e C segue che S è T_3 e quindi l'asserto.

Allo scopo di dare una caratterizzazione degli spazi compatti mediante i filtri chiusi (si veda [**4**]) premettiamo

Proposizione 2.1. *Siano S uno spazio topologico, $\mathscr{F}$ un ultra filtro chiuso (ultra filtro aperto) su S e $\mathscr{G}$ un filtro aperto o chiuso su S risulta allora $\mathscr{F} \wedge \mathscr{G} \neq \mathcal{O} \Leftrightarrow \mathscr{F} \leqslant \mathscr{G}$.*

Dim. Si veda [**2**], prop. 1.3.

Proposizione 2.2. *Sia S uno spazio topologico.*

Ogni filtro su S ha un punto di aderenza se e solo se ogni filtro chiuso su S ha un punto di aderenza.

Dim. $\Rightarrow$ Ovvia. Proviamo la $\Leftarrow$.

Sia $\mathcal{F}$ un filtro su S e $\overline{\mathcal{F}}$ il filtro chiuso ottenuto considerando la chiusura di tutti gli elementi di una base di $\mathcal{F}$ e facendone il completamento in S. Per l'ipotesi fatta, esiste un punto $x \in S$ tale che $\overline{\mathcal{F}} \wedge \mathcal{U}_x \neq \emptyset$, cioè x appartiene a tutti gli elementi del filtro $\overline{\mathcal{F}}$ (essendo quest'ultimo un filtro chiuso) e pertanto a tutte le chiusure degli elementi del filtro $\mathcal{F}$. Ne segue che x è un punto di aderenza per il filtro $\mathcal{F}$.

Teorema 2.4. *Sia S uno spazio topologico di Hausdorff. Le seguenti condizioni sono tra loro equivalenti.*

(i) *S è compatto.*

(ii) *Ogni filtro chiuso su S possiede almeno un punto di aderenza.*

(iii) *Ogni ultra filtro chiuso su S converge.*

Dim. Proviamo le seguenti implicazioni.

$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \quad \text{e} \quad \text{(ii)} \Rightarrow \text{(i)}$$

$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(iii)} \quad \text{e} \quad \text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)}$$

Le prime due seguono da ([7] teor. III 5, (ii)) e Prop. 2.2 mentre le seconde due seguono dalla Prop. 2.1.

Osservazione 3. Questo risultato, citato in [7] (eser. 16, pag. 104), migliora la nota caratterizzazione dei compatti mediante i filtri ed è in linea con la condizione (2) del Teor. 1.1.

Concludiamo con un controesempio di spazio topologico almost-compact e T_{2a} (quindi nearly-compact per (4) Teor. 2.2) a conferma della non migliorabilità del risultato « S è compatto se e solo se è almost-compact e T_3 » con il seguente « S è compatto se e solo se è almost-compact e T_{2a} ».

Controesempio. Tenendo conto che l'assioma T_{2a} (come il T_0, T_1, T_2, $T_{2\frac{1}{2}}$) si conserva passando a topologie più fini, il controesempio 1 di [5] costituisce un controesempio al miglioramento suddetto essendo lo spazio, ovviamente, almost-compact e T_{2a} ma non compatto.

Bibliografia

[1] F. Cammaroto, *Filtri particolarmente chiusi e filtri particolarmente aperti*, Matematiche (Catania) **32** (1977), 343-358.

[2] F. Cammaroto e G. Lo Faro, *Proprietà dei filtri particolarmente chiusi e nuove caratterizzazioni degli spazi nearly-compact*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15** B (1978), 638-648.

[3] R. Garbaccio Bogin, *Spazi quozienti e proprietà di separazione*, Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino **34** (1975-76), 165-173.

[4] H. J. Kowalshy, *Topological spaces*, Acad. Press, N. Y. 1964.

[5] G. Marchisa, *Spazi compatti e spazi T_2-chiusi*, Atti Acc. Sci. Torino **108** (1973-74), 1-7.

[6] A. Mathur, *Some weaker forms of compactness*, General topology and its relations to modern analysis and algebra, Proceedings of the Kanpur topological conference, 1968.

[7] J. I. Nagata, *Modern general topology*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1968.

[8] M. K. Singal and Asha Mathur, *On nearly compact spaces*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **2** (1969), 702-710.

[9] M. K. Singal and Shashi Prabha Arya, *On a characterization of compactness*, Rend. Circ. Mat. Palermo (1970) 213-216.

[10] L. A. Steen and J. A. Seebach Jr., *Counterexamples in topology*, Rinehart and Winston, New York 1970.

Summary

Some new characterizations on nearly-compact spaces and compact spaces are given.

* * *