Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6** (1980), 201-209

VITTORIO MANGIONE (*)

Sulla curvatura di una varietà riemanniana dotata di una $\mathscr{D}$-connessione simmetrica (**)

1 - Introduzione

Nei lavori [**6**]$_{1,2}$ sono state considerate e rappresentate, su una varietà riemanniana V, le *connessioni simmetriche della classe* $\mathscr{D}$ (1). Questo lavoro è dedicato allo studio delle proprietà di curvatura della varietà V in relazione a questa classe di connessioni e ad una sua sottoclasse notevole (n. **2**).

Sia Γ una connessione del tipo accennato. Si stabilisce anzitutto la simmetria del campo di curvatura di Ricci relativo a Γ (teor. $\mathbf{T}_1$, n. **3**). Si mette poi in evidenza come fra i campi tensoriali di *curvatura, curvatura proiettiva e di Ricci relativi a* Γ, sussistano alcune relazioni formali del tutto analoghe a quelle che legano i corrispondenti campi relativi alla connessione di Levi-Civita $\overset{\circ}{\Gamma}$ (rel. (12), (13), n. **3**). Interessanti proprietà dei campi di curvatura relativi a Γ sono poi contenute nei corollari $\mathbf{C}_1$-$\mathbf{C}_4$ del n. **3**. Semplici condizioni su Γ si traducono nella coincidenza fra i campi di curvatura relativi a Γ e quelli relativi a $\overset{\circ}{\Gamma}$ (teor. $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$). Se poi Γ è *speciale* (n. **2**), le differenze dei campi di curvatura omonimi, relativi a Γ e $\overset{\circ}{\Gamma}$, risultano parallele nella connessione di Levi-Civita (teor. $\mathbf{T}_4$, n. **3**).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italiy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 23-XI-1978.

(1) Ved. [**6**]$_{1,2}$. Tale classe è caso particolare della classe delle connessioni affini Λ per le quali la Λ-divergenza di un qualsiasi campo vettoriale contravariante della varietà coincide con la divergenza classica.

In alcune osservazioni, riunite al n. **4**, sono indicate condizioni necessarie e sufficienti, sulla connessione Γ, perchè la varietà V risulti *piatta*, *proiettivamente piatta*, *simmetrica*, *proiettivamente simmetrica*, *di Ricci o di Ricci speciale* (oss. $\mathbf{O}_1$-$\mathbf{O}_5$, n. 4).

Il n. **5** è dedicato alle varietà *proiettivamente piatte rispetto a* Γ.

Il teorema $\mathbf{T}_5$ dà una caratterizzazione di queste varietà, mediante una relazione tra i campi di curvatura relativi a Γ e segnala altre proprietà di tali campi. Altri risultati riguardano le varietà proiettivamente piatte e simmetriche rispetto a Γ (cor. $\mathbf{C}_5$). Nel teorema $\mathbf{T}_6$ si ottiene una notevole proprietà del campo vettoriale della trasformazione proiettiva e si mostra come condizioni su questo campo si riflettano sulla struttura di V. Infine, il teorema $\mathbf{T}_7$ mostra come le varietà proiettivamente piatte rispetto a Γ possano essere caratterizzate mediante la trasformazione di curvatura definita dalla connessione.

2 - Preliminari

Sia V una varietà riemanniana di dimensione $n > 2$ e classe C^t $(t \geqslant 4)$, x un punto di V, $\mathcal{T}^r_s$ lo spazio lineare dei campi tensoriali di tipo (r, s) su V. Sia poi g il campo tensoriale simmetrico di $\mathcal{T}^0_2$ e di classe C^3 che definisce la metrica su V (2).

Indicati con σ, ε gli *omomorfismi di simmetrizzazione*, *di emisimmetrizzazione* di $\mathcal{T}^r_s$ relativi ai primi due indici di covarianza, conviene considerare anche l'*isomorfismo involutorio* $\alpha = \sigma - \varepsilon$ (3); analogamente si denoti con E l'omomorfismo di emisimmetrizzazione sui primi tre indici di covarianza.

Sia ora Γ una *connessione simmetrica su* V *appartenente alla classe* $\mathcal{D}$; cioè una connessione simmetrica soddisfacente alla relazione $\operatorname{div}_\Gamma v = \operatorname{div} v$ per ogni campo v di $\mathcal{T}^1_0$ di classe C^1 (4).

Posto, come è lecito,

$$\Gamma = \overset{\circ}{\Gamma} + \Sigma \text{ (5)}, \tag{1}$$

(2) Per le nozioni fondamentali che intervengono si veda, p.e., [**8**], cap. 1, 2, 3; [**9**], cap. 1; [**10**].

(3) Introdotti in $\mathcal{T}^r_s$ dagli analoghi omomorfismi di $\mathcal{T}^0_2$.

(4) Le connessioni della classe $\mathcal{D}$, definite mediante la nozione di divergenza generalizzata, sono state introdotte e studiate da V. Mangione e A. Vezzani nei lavori [**6**]$_{1,2}$. In virtù della formula generale di rappresentazione (13) del secondo lavoro, l'esistenza di connessioni simmetriche della classe $\mathcal{D}$ è ricondotta all'esistenza di campi simmetrici di $\mathcal{T}^1_2$.

(5) Ved. p. e. [**8**], cap. 3, p. 132-133; [**6**]$_2$, n. 5, p. 281.

essendo $\overset{\circ}{\Gamma}$ la connessione di Levi-Civita e Σ un campo tensoriale simmetrico di $\mathscr{T}^1_2$, le connessioni simmetriche della classe $\mathscr{D}$ sono caratterizzate dalla condizione

$$c^1_1 \Sigma = 0 \text{ (6)} . \tag{2}$$

Siano poi D e $\overset{\circ}{D}$ gli operatori di derivazione covariante rispetto a Γ, $\overset{\circ}{\Gamma}$, rispettivamente; se è soddisfatta anche la *condizione*

$$\overset{\circ}{D}\Sigma = 0 \text{ (7)} , \tag{3}$$

la connessione Γ verrà detta *speciale.*

In particolare, la connessione $\overset{\circ}{\Gamma}$ definita dalla metrica g è una connessione simmetrica della classe $\mathscr{D}$ speciale ($\Sigma = 0$).

È utile nel seguito la relazione

$$D\Sigma = \overset{\circ}{D}\Sigma + 2\varepsilon c^2_2(\Sigma \otimes \Sigma) - c^1_3(\Sigma \otimes \Sigma) . \tag{4}$$

Siano ora R, $\overset{\circ}{R}$; P, $\overset{\circ}{P}$; $\mathscr{R}$, $\overset{\circ}{\mathscr{R}}$ i campi tensoriali di *curvatura*, di *curvatura proiettiva* e di *Ricci*, relativi a Γ, $\overset{\circ}{\Gamma}$, rispettivamente. Come è noto, per Γ, in virtù della simmetria, sussistono le relazioni

$$R = \overset{\circ}{R} + 2\varepsilon \overset{\circ}{D}\Sigma + 2\varepsilon c^2_2(\Sigma \otimes \Sigma) , \tag{5}$$

$$P = R - 2(\varepsilon \mathscr{P}) \otimes \delta + 2\varepsilon(\delta \otimes \mathscr{P}) \text{ (8)} , \tag{6}$$

dove

$$\mathscr{P} = -\frac{n}{n^2-1}\mathscr{R} - \frac{1}{n^2-1}\alpha\mathscr{R} \text{ (9)} . \tag{7}$$

---

(6) Ved. [**6**]$_1$, teor. $\mathbf{T}_2$, p. 105. In generale c^i_j è la applicazione tensoriale di contrazione relativa allo i-esimo indice di contravarianza ed allo j-esimo indice di covarianza (ved. p.e., [**2**], p. 45).

(7) L'esistenza di Γ soddisfacenti la (3) è riportabile alla esistenza di campi tensoriali simmetrici di $\mathscr{T}^1_2$ paralleli nella connessione di Levi-Civita.

(8) Per le (5), (6), ved. p.e. [**8**], (4.22a), p. 141; (1.12), p. 289. δ è il campo tensoriale di Kronecker.

(9) Ved. [**8**], (1.13), p. 289.

Nel seguito interviene anche la relazione

$$c_1^1 DR = 2\varepsilon D\mathscr{R} \text{ (10)} . \tag{8}$$

In particolare, operando sulla (5) con c_1^1 e tenuto conto della (2) segue

$$\mathscr{R} = \mathring{\mathscr{R}} + c_1^1 \mathring{D}\Sigma - q(\Sigma) , \tag{9}$$

avendo indicato con $q(\Sigma)$ *il campo tensoriale quadrato associato* a Σ, cioè $c_2^1 c_1^2(\Sigma \otimes \Sigma)$.

Se Γ è *speciale*, le (5), (9), tenuto conto della (3), divengono

$$R = \mathring{R} + 2\varepsilon c_2^2(\Sigma \otimes \Sigma) \text{ (11)} , \tag{10}$$

$$\mathscr{R} = \mathring{\mathscr{R}} - q(\Sigma) . \tag{11}$$

3 - Prime proprietà dei campi di curvatura

Le premesse del numero precedente permettono di mettere in evidenza alcune proprietà dei campi di tensori di curvatura relativi a Γ e di stabilire per essi alcune relazioni formali che, in base ad una osservazione del n. **2**, generalizzano quelle che legano i corrispondenti campi tensoriali relativi alla connessione di Levi-Civita $\mathring{\Gamma}$.

Innanzitutto, dalla (9), tenuta presente la simmetria dei campi tensoriali $\mathring{\mathscr{R}}$, $c_1^1 \mathring{D}\Sigma$ e $q(\Sigma)$, seguono subito i teoremi:

$\mathbf{T}_1$. *Il campo $\mathscr{R}$ di Ricci relativo a Γ è simmetrico.*

$\mathbf{T}_2$. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè sia $\mathscr{R} = \mathring{\mathscr{R}}$ è che $q(\Sigma) = c_1^1 \mathring{D}\Sigma$.*

In particolare da $\mathbf{T}_1$ discende che *la connessione Γ è equiaffine*, cioè *Γ conserva i volumi* (12). Inoltre tenute presenti le (7), (6), (8), *per i tensori P, R, $\mathscr{R}$*

---

(10) Cfr. nota precedente, (5.27), p. 147.

(11) La (10) sussiste, più in generale, per una arbitraria connessione simmetrica soddisfacente la (3).

(12) Ved. p.e. [**3**], p. 706; [**8**], p. 144. Il risultato segue subito dalla (5.8) a p. 145 di [**8**].

sussistono le relazioni

$$P = R - \frac{2}{n-1}\,\varepsilon(\delta \otimes \mathscr{R}) \text{ (13)}, \tag{12}$$

$$c_1^1 DP = \frac{n-2}{n-1}\, c_1^1 DR . \tag{13}$$

Sussistono inoltre i corollari:

C₁. *Se $P = R$ risulta $\mathscr{R} = 0$; e viceversa.*

C₂. *Se $\mathscr{R} = \overset{\circ}{\mathscr{R}}$ risulta $P - R = \overset{\circ}{P} - \overset{\circ}{R}$; e viceversa.*

C₃. *La simmetria del campo $D\mathscr{R}$ equivale alla condizione $c_1^1 DP = c_1^1 DR = 0$.*

C₄. *La simmetria del campo $D\mathscr{R}$ implica la seconda identità di Bianchi per il tensore di curvatura proiettiva relativo alla connessione Γ* (14).

Il corollario $\mathbf{C}_1$ segue subito dalla (12). Per $\mathbf{C}_2$, sottraendo dalla (12) l'analoga relativa alla connessione di Levi-Civita si perviene alla

$$P - \overset{\circ}{P} = R - \overset{\circ}{R} - \frac{2}{n-1}\,\varepsilon(\delta \otimes (\mathscr{R} - \overset{\circ}{\mathscr{R}})) , \tag{14}$$

da cui segue subito l'asserto. $\mathbf{C}_3$ segue immediatamente dalle (8) e (13). Infine, per dimostrare $\mathbf{C}_4$, facendo agire l'operatore D sulla (12) e successivamente l'omomorfismo E di emisimmetrizzazione (n. **2**), poichè risulta $E(DR) = 0$ (15), si ottiene

$$E(DP) = \frac{2}{1-n}\, ED(\varepsilon(\delta \otimes \mathscr{R})) . \tag{15}$$

Si verifica poi con calcolo diretto che il secondo membro della (15), nell'ipotesi di simmetria di $D\mathscr{R}$, risulta nullo.

Si supponga ora che la connessione Γ sia *speciale*. Sussistono i teoremi:

---

(13) Nel caso particolare della connessione di Levi-Civita ($\Gamma = \overset{\circ}{\Gamma}$) ved. p. e. [**9**], (3.33), p. 18.

(14) Ved. p.e., [**8**], (5.21), p. 147.

(15) Cfr. nota precedente.

$\mathbf{T}_3$. *La simmetria del campo* $D\Sigma$, *l'annullarsi del tensore quadrato* $q(\overset{\circ}{\Sigma})$, *è condizione necessaria e sufficiente perchè risulti* $R = \overset{\circ}{R}$, $\mathscr{R} = \overset{\circ}{\mathscr{R}}$, *rispettivamente.*

$\mathbf{T}_4$. *I campi* $R - \overset{\circ}{R}$, $P - \overset{\circ}{P}$, $\mathscr{R} - \overset{\circ}{\mathscr{R}}$, *sono paralleli nella connessione di Levi-Civita* (16).

In virtù del teorema $\mathbf{T}_4$, nelle (8), (13) e nel corollario $\mathbf{C}_3$, l'operatore D di derivazione covariante rispetto a Γ può essere sostituito con l'operatore $\overset{\circ}{D}$ relativo alla connessione di Levi-Civita (17).

Per stabilire $\mathbf{T}_3$ e $\mathbf{T}_4$ si procede così. Dalle (10), (11) tenuto conto che, in base alla (4), risulta $\varepsilon D\Sigma = 2\varepsilon c_2^2(\Sigma \otimes \Sigma)$ si perviene subito al teorema $\mathbf{T}_3$. L'asserto del teorema $\mathbf{T}_4$ si ottiene subito tenendo conto delle (10), (11) e, per il campo $P - \overset{\circ}{P}$, della (14).

4 - Conseguenze geometriche

Conviene ricordare che la varietà V si dice *simmetrica, proiettivamente simmetrica, di Ricci, relativamente alla connessione* Γ, se risulta $DR = 0$, $DP = 0$, $D\mathscr{R} = 0$, rispettivamente. In particolare V è *piatta, proiettivamente piatta, di Ricci speciale relativamente a* Γ, se risulta rispettivamente $R = 0$, $P = 0$, $\mathscr{R} = 0$.

Nel caso che Γ si riduca a $\overset{\circ}{\Gamma}$, le rispettive varietà si diranno, semplicemente, *simmetriche, proiettivamente simmetriche, di Ricci, piatte, proiettivamente piatte, di Ricci speciali* (18), rispettivamente.

Ciò premesso, nelle osservazioni che seguono sono indicate alcune condizioni relative alla connessione Γ, che implicano l'appartenenza della varietà V ad alcune delle classi sopra definite con riferimento alla connessione di Levi-Civita.

$\mathbf{O}_1$. *Se il campo* $\mathscr{R} - c_1^1 D\Sigma - q(\Sigma)$ *è parallelo rispetto a* $\overset{\circ}{\Gamma}$, V *è una varietà di Ricci; e viceversa.*

$\mathbf{O}_2$. *Se* $\mathscr{R} = c_1^1 D\Sigma + q(\Sigma)$, V *è una varietà di Ricci speciale; e viceversa. In particolare se* V *è di Ricci speciale rispetto a* Γ *la condizione si riduce alla* $q(\Sigma) = - c_1^1 D\Sigma$.

---

(16) L'essere $R = \overset{\circ}{R}$ (teor. $\mathbf{T}_3$) ed il parallelismo di $R - \overset{\circ}{R}$ (teor. $\mathbf{T}_4$), sussistono, più in generale, per qualunque connessione simmetrica soddisfacente la (3).

(17) Basta infatti ricordare che i risultati accennati sussistono in particolare con riferimento alla connessione di Levi-Civita $\overset{\circ}{\Gamma}$.

(18) Quest'ultime vengono anche dette di *Einstein speciali*.

In particolare, quando la connessione Γ è *speciale*, risulta:

O₃. *Se R, P, $\mathscr{R}$ sono paralleli nella connessione di Levi-Civita, V è, rispettivamente, una varietà simmetrica, proiettivamente simmetrica, di Ricci; e viceversa. La parte diretta sussiste, ovviamente, se V è, ordinatamente, una varietà piatta, proiettivamente piatta, di Ricci speciale, rispetto a Γ.*

O_4. *Se $\overset{\circ}{D}\mathscr{R}$ è simmetrico, anche $\overset{\circ\circ}{D\mathscr{R}}$ è simmetrico; e viceversa* (19).

O_5. *Condizione necessaria e sufficiente perchè la varietà V sia piatta, di Ricci speciale, è che si abbia, rispettivamente, $R = \varepsilon D\Sigma$, $\mathscr{R} = -q(\Sigma)$. In particolare, se V è piatta, di Ricci speciale rispetto a Γ, le condizioni precedenti si riducono, ordinatamente, a $\varepsilon D\Sigma = 0$, $q(\Sigma) = 0$.*

I risultati discendono senza difficoltà dalle relazioni e dai teoremi dei nn. **2**, **3**.

5 - Varietà proiettivamente piatte rispetto a Γ

Sussiste il teorema

T_5. *Se V è proiettivamente piatta rispetto a Γ, risulta*

$$R = \frac{2}{n-1}\,\varepsilon(\delta \otimes \mathscr{R})\,; \tag{16}$$

e viceversa. Inoltre il campo $c_1^1 DR$ è nullo e il campo $D\mathscr{R}$ è simmetrico.

L'asserto discende subito dalle (12), (13) e dal corollario **C_3** del n. **3**.

È immediato il corollario

C_5. *Sia V proiettivamente piatta rispetto a Γ. Se V è simmetrica, piatta, rispetto a Γ, V è rispettivamente di Ricci, di Ricci speciale rispetto a Γ.*

Sia ora x un punto di V ed U un intorno coordinato contenente x. Conviene ricordare che, se V è proiettivamente piatta rispetto a Γ, esiste in U un campo p di vettori covarianti (*campo della trasformazione proiettiva*) tale che

$$\mathscr{P} = p \otimes p - Dp \ \text{(20)}\,. \tag{17}$$

(19) Le varietà riemanniane a campo $\overset{\circ\circ}{D\mathscr{R}}$ simmetrico sono più generali delle varietà di Ricci e godono di interessanti proprietà. Ved. p.e. [4] e il lavoro [7] dove sono chiamate *varietà di tipo A_2*.

(20) Ved. p.e. [**8**], (1.5), p. 288.

Sussiste il teorema

T$_6$. *Se V è proiettivamente piatta rispetto a Γ, il campo p è Γ-irrotazionale. In particolare, se p è parallelo rispetto a Γ, il campo di Ricci $\mathscr{R}$ è singolare e V è una varietà di Ricci relativamente a Γ. Se p è Γ-solenoidale la curvatura scalare di V relativa a Γ è non negativa.*

Invero, poichè $\mathscr{R}$ è simmetrico (teor. $\mathbf{T}_1$, n. **3**), dalle (7), (17) segue

$$\mathscr{R} = (1-n)(p \otimes p - Dp)\,. \tag{18}$$

Dalla (18) appare che $\sigma Dp = 0$ onde p è Γ-irrotazionale ([21]). Anche nei casi particolari l'asserto segue senza difficoltà.

Sia ora (a, b) una coppia di vettori controvarianti tangenti a V in x, linearmente indipendenti, ed $R(a, b)$ la corrispondente *trasformazione di curvatura* ([22]). Se v è un vettore contravariante tangente a V in x, risulta $R(a, b)v = c_1^2 c_1^2 c_1^2 (R \otimes a \otimes b \otimes v)$.

Geometricamente, $-\frac{1}{2}R(a, b)v$ rappresenta la parte principale dell'incremento subito da v nel trasporto parallelo mediante la connessione Γ lungo un ciclo infinitesimo relativo ad x, appartenente al 2-spazio vettoriale definito dalla coppia (a, b) ([23]).

Ciò premesso, tenuta presente la (16) ed una osservazione di E. Bortolotti ([24]), sussiste il teorema

T$_7$. *Se V è proiettivamente piatta rispetto a Γ, allora, per ogni v, il vettore $R(a, b)v$ appartiene al 2-spazio definito da (a, b); e viceversa.*

Come è noto, vari Autori hanno considerato la classe delle varietà V a connessione affine Λ per le quali il trasformato di un qualunque campo vettoriale contravariante, mediante la *trasformazione di curvatura* relativa ad una qualunque giacitura in un punto x di V, appartenga sempre a quest'ultima. Il teorema $\mathbf{T}_7$ afferma che se Λ è una connessione simmetrica della classe $\mathscr{D}$, le varietà V appartenenti alla classe sopra accennata sono, tutte e sole, quelle proiettivamente piatte rispetto a Λ.

([21]) Si noti che il campo vettoriale p, in virtù della simmetria di Γ, risulta anche irrotazionale in senso classico. Ved. [**6**]$_1$, teor. $\mathbf{T}_1$.

([22]) Ved. [**5**], p. 133.

([23]) Ved. p. e. [**8**], (4.1), p. 138; [**3**], (1), p. 703; [**1**], p. 57.

([24]) [**1**], nota ([64]), p. 80; [**3**], p. 703.

Bibliografia

[1] E. Bortolotti, *Geometria delle varietà a connessione affine*, Ann. of Math. (IV) **8** (1930-31), 53-101.

[2] N. Bourbaki, *Algebre*, **3**, Hermann, Paris 1958.

[3] A. Cossu, *Proprietà di curvatura di una particolare classe di varietà a connessione affine*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (VI) **8** (1949), 702-707.

[4] P. Desai and K. Amur, *On symmetric spaces*, Tensor, **29** (1975), 119-124.

[5] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential Geometry*, I, II, Interscience, New York 1963-1969.

[6] V. Mangione e A. Vezzani; $[\cdot]_1$ *Due classi di connessioni sulle varietà riemanniane e quasi hermitiane*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **34** (1975-76), 97-110; $[\cdot]_2$ *Teoremi di rappresentazione per le connessioni della classe $\mathscr{D}$ e di alcune sue sottoclassi notevoli*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **2** (1976), 277-285.

[7] G. B. Rizza, *Campi irrotazionali e di Killing su una varietà compatta*, Rend. Mat. (1-2) **19** (1960), 143-167.

[8] J. A. Schouten, *Ricci calculus*, Springer, Berlin 1954.

[9] K. Yano, *Differential geometry on complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, Oxford 1965.

[10] K. Yano and S. Bochner, *Curvature and Betti numbers*, Princeton Univ. Press, Princeton 1953.

Summary

Properties for the curvature tensor fields of the riemannian spaces with a symmetric $\mathscr{D}$-connection Γ, are studied. A geometric condition gives a characterization for the case of Γ-projectively flat manifolds. Some properties of projective transformation vector field are also obtained. Conditions on Γ lead to characterize Ricci spaces, special Ricci spaces, symmetric spaces and riemannian spaces for which the covariant derivative of Ricci tensor is symmetric.

* * *