Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 125-133

MARIO GIONFRIDDO (*)

Alcuni risultati relativi alle colorazioni L_s d'un grafo (**)

1 - Sia $G=(V, S)$ un *grafo* non orientato, $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{N}\times \boldsymbol{P}(V) \to \boldsymbol{P}(V)$ l'applicazione che ad ogni $(s, A) \in \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{P}(V)$ associa $\boldsymbol{F}(s, A)=\{X\subseteq A: \operatorname{diam}_G X \leqslant s\}$. Siano inoltre $X_{1,s}, X_{2,s}, \ldots, Y_{0,s}, Y_{1,s}, \ldots$ due famiglie di s.i. non vuoti di V tali che $Y_{0,s}=V$ e, per $i \geqslant 1$, $X_{i,s}\in \boldsymbol{F}(s, Y_{i-1,s})$, $|X_{i,s}|=\max|X|\ X\in\boldsymbol{F}(s, Y_{i-1,s})$, $Y_{i,s}=Y_{i-1,s}-X_{i,s}$ (1).

Se γ_s è il *numero s-cromatico* di G [**9**]$_2$, $\mathscr{G}$ la classe di tutti i grafi, posto $d_s=|X_{1,s}|$, $\Delta_s=\gamma_s-d_s$, in [**4**]$_3$ abbiamo provato che

(i) $3=\operatorname{Min}|Y_{1,s}|$, *affinchè esista un grafo* G *tale che* $\Delta_s=1$.

In questo lavoro dimostreremo che

(ii) $6=\operatorname{Min}|Y_{1,s}|$, *affinchè esista un grafo* G *tale che* $\Delta_s=2$;

(iii) $9=\operatorname{Min}|Y_{1,s}|$, *affinchè esista un grafo* G *tale che* $\Delta_s=3$.

Nel provare la (iii) daremo un grafo (non planare) con $|V|=24$, $|X_{1,2}|=15$, $|Y_{1,2}|=9$, $\gamma_2=18$, $\Delta_2=3$, rispondendo così (ma solo parzialmente) ad un

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, via Cesare Battisti, 98100 Messina, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 11-X-1978.

(1) $\{X_{i,s}\}$ è una partizione di V, $\{X_{j,s}\}_{j\geqslant i}$ è una partizione di $Y_{i-1,s}$. Si ha inoltre $|X_{i,s}|\geqslant|X_{i+1,s}|$, $Y_{i,s}\supseteq Y_{i+1,s}$, $Y_{i,s}=C_V\bigcup_{j=1}^{i} X_{j,s}$.

quesito, segnalato in [4]$_1$ ed in [4]$_3$, relativo all'esistenza o meno di grafi tali che $\Delta_2 > 2$. Rimangono aperti altri problemi che segnaleremo in **4**.

2 – Dato un grafo $G = (V, S)$, indicheremo con G^s il grafo tale che $V(G^s) = V(G)$ e $\{x, y\} \in S(G^s)$ se e solo se $d(x, y) \leqslant s$, con $\bar{G}$ il grafo *complementare* di G. Per *accoppiamento* M di G s'intenderà un insieme $M \subseteq S$ i cui elementi siano a due a due non incidenti; un vertice x si dirà *saturo in* M se è estremo di uno spigolo $s \in M$. Se $A, B \subseteq V$, per *accoppiamento di* A *in* B s'intenderà un accoppiamento M di G che *saturi* tutti gli elementi di A e tale che se $x \in A$, $\{x, y\} \in M$, allora $y \in B$.

Teor. 2.1. (i) *Fissati* $Y_{i,s}$, $A \in \boldsymbol{F}(s, Y_{i,s})$, *per ogni* $j < i$, $j \geqslant 1$, *esiste in* $\overline{G^s}$ *un accoppiamento* M_j *di* A *in* $X_{j,s}$.

(ii) *Per ogni* $X_{i,s}$, $X_{j,s}$, $j < i$, *esiste in* $\overline{G^s}$ *un accoppiamento* M_{ij} *di* $X_{i,s}$ *in* $X_{j,s}$.

Dim. (i) Se J è il sottografo di G generato da $X_{j,s} \cup A$, proviamo che in J^s si ha $|\Gamma_{J^s}(Y)| \geqslant |Y|$ per ogni $Y \subseteq A$ ([2]).

Infatti se per un $Y \subseteq A$ fosse $|Y| > |\Gamma_{J^s}(Y)|$, si avrebbe

$$X_{j,s} \cup Y - \Gamma_{J^s}(Y) \in \boldsymbol{F}(s, Y_{j-1,s}), \qquad |X_{j,s} \cup Y - \Gamma_{J^s}(Y)| > |X_{j,s}|,$$

contro le ipotesi (cfr. def. $X_{j,s}$). Essendo $\overline{J^s}$ un grafo bipartito in A ed in $X_{j,s}$, la tesi segue dal teor. di König-Hall, [2]$_1$ p. 128, applicato a $\overline{J^s}$.

(ii) Segue direttamente dalla (i) per $A = X_{i,s}$.

3 – In questo numero, dato un grafo $G = (V, S)$, indicheremo con K un'applicazione iniettiva di $X_{1,s}$ in un insieme C, i cui elementi si diranno *colori*. In alcuni dei teoremi seguenti, per pervenire alla tesi, si cercherà di *estendere* K a tutto V in modo che diventi un'opportuna colorazione L_s di G. Indicheremo, inoltre, con M, N elementi di $C - K(X_{1,s})$. Diremo che un vertice $y \in V - X_{1,s}$ è (L_s-) *colorabile* con un colore $w \in K(X_{1,s})$ se, indicato con x il vertice di $X_{1,s}$ tale che $K(x) = w$, si ha $d(x, y) \geqslant s + 1$. Se $y \in Y_{1,s}$, indicheremo, infine, con $C(y)$ l'insieme dei colori $w \in K(X_{1,s})$ tali che y sia *colorabile* con w.

Lemma. *Dato un grafo* $G = (V, S)$, *sia* $A \subseteq V$ *un insieme tale che*

$$A \in \boldsymbol{F}(s, Y_{1,s}) \tag{1}$$

([2]) Se $\Gamma_s(x) = \{y \in V : d(x, y) \leqslant s\}$, si ha, per $Y \subseteq V$, $\Gamma_G(Y) = \bigcup_{x \in Y} \Gamma_1(x)$.

oppure

(2) *esiste una partizione* $\{T_i\}$ *di* A *con* $T_i \in \boldsymbol{F}(s, Y_{1,s})$, $d(T_i, T_j) \geqslant s+1$, $i \neq j$.

Se $V-(A \cup X_{1,s})$ *è* L_s*-colorabile con* h *colori, allora* $\Delta_s \leqslant h$.

Dim. (1) In tali ipotesi esiste in $\overline{G^s}$ un accoppiamento M_A di A in $X_{1,s}$. Se $y \in A$, si può porre $K(y)=K(x)$, ove $x \in X_{1,s}$ è tale che $\{x, y\} \in M_A$ in $\overline{G^s}$. Si ha la tesi assegnando ai vertici di $V-(X_{1,s} \cup A)$ h colori $w_i \notin K(X_{1,s})$.

(2) Per ogni T_i esiste in $\overline{G^s}$ un accoppiamento M_i di T_i in $X_{1,s}$. $M_A = \cup M_i$ è un accoppiamento, in $\overline{G^s}$, di A in $X_{1,s}$. Procedendo, allora, come in (1) si perviene alla tesi.

Teor. 3.1. *Se* $G=(V, S)$ *è tale che* $|Y_{1,s}| \leqslant 8$, *allora* $\Delta_s \leqslant 2$.

Dim. Se $|Y_{1,s}| \leqslant 5$, per il Teor. 3.2 di [4]$_3$ si ha $\Delta_s \leqslant 1$. Supporremo, dunque, $|Y_{1,s}|=6, 7, 8$ ed indicheremo rispettivamente con (A), (B), (C) i casi in cui è $|Y_{1,s}|=6, 7, 8$. Porremo $Y_{1,s}=\{y_1, y_2, \ldots\}$ con $y_u \in X_{i,s}$, $y_v \in X_{j,s}$, per $u<v$, $1<i<j$; $X_{1,s}=\{x_1, x_2, \ldots\}$. Osserviamo che per $|Y_{2,s}| \leqslant 2$, oppure per $|Y_{2,s}|=3$ e diam $Y_{2,s} \geqslant s+1$, o per $|X_{3,s}|=1$, la tesi segue immediatamente dal Lemma (1) ove si ponga $A=X_{2,s}$ e $h=2$. Se $|Y_{2,s}|=3$ e diam $Y_{2,s} \leqslant s$, si ha $|X_{2,s}|=3, 4, 5$ in (A), (B), (C) rispettivamente. Se $Y_{2,s}=\{y_{u+1}, y_{u+2}, y_{u+3}\}$, per il Teor. 2.1 possiamo supporre $d(y_i, y_{u+i}) \geqslant s+1$, $u=1, 2, 3$. La (A) segue allora direttamente dal Lemma (2) ove si ponga, per fissare le idee, $T_1=\{y_1\}$, $T_2=\{y_{u+1}\}$. La (B) [risp. la (C)] segue dal fatto che, supposto $w_i \in C(y_i)$ per $y_i \in X_{2,s}$, poichè almeno uno dei vertici di $Y_{2,s}$, ad esempio y_{u+1}, è necessariamente colorabile con un colore $\omega \neq w_4$ [risp. $\omega \neq w_4, w_5$], si può porre $K(y_2)=K(y_{u+2})=M$, $K(y_3)=K(y_{u+3})=N$, $K(y_{u+1})=\omega$.

Fatte queste premesse, potremo supporre nel seguito $|Y_{2,s}| \geqslant 4$, $|X_{3,s}| \geqslant 2$. Necessariamente sarà $2 \leqslant |X_{2,s}| \leqslant 4$.

(1) Sia $|X_{2,s}|=2$. Segue $|X_{3,s}|=2$. Se $|X_{4,s}|=1$, la tesi segue dal Lemma (2), ove si consideri che, esistendo in $\overline{G^s}$ un accoppiamento di $X_{3,s}$ in $X_{2,s}$, l'insieme $X_{2,s} \cup X_{3,s}$ è L_s-colorabile con due colori. Sia, quindi, $|X_{4,s}|=2$.

(A) La tesi segue dal Teor. 2.1, (ii), per il quale esiste in $\overline{G^s}$ un accoppiamento di $X_{4,s}$ in $X_{3,s}$, e dal Lemma (1), ove si ponga $A=X_{2,s}$ e si consideri che $X_{3,s} \cup X_{4,s}$ è L_s-colorabile con due colori.

(B) Sia $d(y_7, y_i) \geqslant s+1$ per $i=1, 3, 5$. Per il Teor. 2.1 esistono in $\overline{G^s}$ un accoppiamento di $X_{2,s}$ in $X_{3,s}$ ed un accoppiamento di $X_{4,s}$ in $X_{2,s}$. Se, dunque, è $d(y_1, y_3) \geqslant s+1$, $d(y_2, y_4) \geqslant s+1$ (o, in modo analogo, $d(y_u, y_{u+4}) \geqslant s+1$ per $u=1, 2$), la tesi segue dal Lemma (1) poichè l'insieme $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_7\}$ è L_s-colorabile con due colori e si può porre $A = \{y_5, y_6\}$; se, invece, è $d(y_1, y_4) \geqslant s+1$, $d(y_2, y_5) \geqslant s+1$, $d(y_2, y_3) \geqslant s+1$, $d(y_1, y_6) \geqslant s+1$, la tesi segue dal Lemma (2) poichè l'insieme $\{y_1, y_4, y_6\}$ è ripartibile in insiemi T_i e $\{y_2, y_3, y_5, y_7\}$ è L_s-colorabile con due colori.

(C) Sia $|X_{5,s}| = 2$ (cioè $d(y_7, y_8) \leqslant s$). Per il Teor. 2.1 possiamo supporre $d(y_u, y_{u+2}) \geqslant s+1$ per $u = 1, \ldots, 6$. Se $d(y_u, y_{u+4}) \geqslant s+1$ per $u = 1, 2$ (o, in modo analogo, per $u=3, 4$), si ha la tesi per il Lemma (1), ponendo $A = \{y_7, y_8\}$. Se invece, è $d(y_u, y_{u+3}) \geqslant s+1$ per $u = 2, 4$, $d(y_u, y_{u+5}) \geqslant s+1$ per $u = 1, 3$, la tesi segue dal Lemma (2) poichè $W = \{y_1, y_3, y_6, y_8\}$ è ripartibile in insiemi T_i e $Y_{1,s} - W$ è L_s-colorabile con due colori. Sia, quindi, $|X_{5,s}| = |X_{6,s}| = 1$ con $d(y_u, y_{u+2}) \geqslant s+1$ per $u = 1, \ldots, 4$. Se $d(y_u, y_{u+4}) \geqslant s+1$ per $u = 1, 2$, si ha la tesi seguendo il medesimo procedimento fatto nel caso precedente. Supponiamo, dunque, $d(y_1, y_6) \geqslant s+1$, $d(y_2, y_5) \geqslant s+1$. Sia, inoltre, $d(y_1, y_7) \geqslant s+1$. Se è $d(y_8, y_3) \geqslant s+1$ [risp. $d(y_8, y_6) \geqslant s+1$], la tesi segue dal Lemma (2) poichè $W = \{y_1, y_3, y_7, y_8\}$ [risp. $W = \{y_1, y_6, y_7, y_8\}$] è ripartibile in insiemi T_i e $Y_{1,s} - W$ è L_s-colorabile con due colori. In caso contrario è $d(y_8, y_u) \leqslant s$ per $u = 3, 6$. Segue $d(y_3, y_6) \geqslant s+1$. Si ha, quindi, la tesi ponendo $K(y_1) = K(y_3) = K(y_6) = M$, $K(y_7) = K(y_8) = N$, ed osservando che $\{y_2, y_4, y_5\}$ è ripartibile in insiemi T_i.

(2) Sia $|X_{2,s}| = 3$. Essendo $|Y_{2,s}| \geqslant 4$, sono possibili solo i casi (B), (C).

(B) Se $|X_{3,s}| = 3$ la tesi segue dal Lemma (2). Infatti supposto $d(y_u, y_{u+3}) \geqslant s+1$, $u = 1, 2, 3$, $d(y_3, y_7) \geqslant s+1$, l'insieme $W = \{y_3, y_6, y_7\}$ è del tipo A e $Y_{1,s} - W$ è L_s-colorabile con due colori.

Se $|X_{3,s}| = 2$ la tesi segue dal Lemma (1). Infatti supposto $d(y_u, y_{u+3}) \geqslant s+1$, $u = 1, 2$, $d(y_5, y_6) \geqslant s+1$, l'insieme $Y_{2,s}$ è L_s-colorabile con due colori, essendo $d(y_7, y_u) \geqslant s+1$ per $u = 4$ o per $u = 5$, e si può porre $A = X_{2,s}$.

(C) Sia $|X_{3,s}| = 3$ e $d(y_u, y_{u+3}) \geqslant s+1$ per $u = 1, 2, 3$. Sia, inoltre, $|X_{4,s}| = 1$. Supponiamo, dapprima, che esista un vertice di $X_{2,s} \cup X_{3,s}$, ad esempio y_6, a distanza maggiore di s sia da y_7 che da y_8. Se $d(y_3, y_u) \geqslant s+1$ per $u = 7$ o per $u = 8$, la tesi segue dal Lemma (2), essendo $W = \{y_1, y_2, y_4, y_5\}$ L_s-colorabile con due colori e $Y_{1,s} - W$ ripartibile in insiemi T_i. Sia, dunque, $d(y_3, y_u) \leqslant s$ per $u = 7, 8$. Se $|C(y_7)| \geqslant 2$, o, in modo analogo, $|C(y_8)| \geqslant 2$ [risp. se $C(y_3) - (C(y_7) \cup C(y_8)) \neq \emptyset$], si ha la tesi attribuendo a y_6 un qualsiasi colore di $C(y_6)$, a y_3, y_8 una coppia di colori distinti [3] di $C(y_3)$, $C(y_8)$

---

[3] Una tale coppia di colori distinti esiste sicuramente essendo $d(y_3, y_8) \leqslant s$ (cfr. Teor. 2.1).

rispettivamente, a y_7 un colore di $C(y_7)-\{K(y_3)\}$ [risp. a y_6, y_7, y_8 colori qualsiasi appartenenti a $C(y_6)$, $C(y_7)$, $C(y_8)$ rispettivamente, a y_3 un colore di $C(y_3)-K\{y_7, y_8\}$], e ponendo $K(y_1)=K(y_4)=M$, $K(y_2)=K(y_5)=N$. Supponiamo, quindi, che sia $C(y_7)\cup C(y_8)=C(y_3)$, $|C(y_7)|=|C(y_8)|=1$ (4).

Poniamo $C(y_7)=\{\alpha\}$, $C(y_8)=\{\beta\}$, $C(y_3)=\{\alpha,\beta\}$, Poichè almeno un vertice $y_i\in X_{2,s}-\{y_3\}$ è tale che $C(y_i)-\{\alpha,\beta\}\neq\emptyset$, posto $i=2$, $\omega\in C(y_2)-\{\alpha,\beta\}$, si ha la tesi attribuendo a y_5 un colore qualsiasi di $C(y_5)$, a y_3 un colore di $C(y_3)-\{K(y_5)\}$, e ponendo $K(y_2)=\omega$, $K(y_1)=K(y_4)=M$, $K(y_6)=K(y_7)=K(y_8)=N$.

Dimostrato questo caso, supporremo che y_7 e y_8 non siano entrambi a distanza maggiore di s da un medesimo vertice di $X_{2,s}\cup X_{3,s}$. Osserviamo che se esiste un indice $u\in\{1,2,3\}$ tale che $d(y_u,y_v)\geqslant s+1$, $d(y_{u+3},y_{v'})\geqslant s+1$, ove $\{v,v'\}=\{7,8\}$, la tesi segue dal Lemma (2), essendo $W=\{y_u, y_{u+3}, y_v, y_{v'}\}$ ripartibile in insiemi T_i e $Y_{1,s}-W$ L_s-colorabile con due colori. Supporremo, quindi, che una tale condizione non sia verificata (5). Sia, per fissare le idee, $d(y_8,y_3)\geqslant s+1$. Segue $d(y_7,y_6)\leqslant s$, $d(y_7,y_3)\leqslant s$, $d(y_7,y_u)\geqslant s+1$ per $u\in\{4,5\}$. Sia $u=5$ (se è $u=4$ si procede in modo analogo). Segue $d(y_8,y_v)\leqslant s$ per $v=5$ e per $v=2$. Necessariamente è $d(y_u,y_v)\leqslant s$ per $(u,v)\in\{(1,7),(4,8)\}$. Segue $d(y_v,y_{u'})\geqslant s+1$, ove $u'=(2+4u)/3$. La tesi segue allora dal Lemma (2), essendo $W=\{y_{10-v}, y_{13-v}, y_{15-v}\}$ ripartibile in insiemi T_i e $V-(W\cup X_{1,s})$ L_s-colorabile con due colori.

Esaminiamo, adesso, il caso in cui è $|X_{4,s}|=2$ (ossia $d(y_7,y_8)\leqslant s$). Sia $d(y_u,y_{u+3})\geqslant s+1$ per $u=1,\dots,5$. Se $d(y_u,y_{u+6})\geqslant s+1$ per $u=1$ o per $u=2$, si ha la tesi per il Lemma (2), ponendo $A=Y_{1,s}-W$ dove $W=\{y_u, y_{u+3}, y_{u+6}, y_3, y_6\}$ è L_s-colorabile con due colori. Sia, dunque, $d(y_u,y_{u+6})\leqslant s$ per $u=1$ e per $u=2$. Essendo $\operatorname{diam}\{y_1,y_2,y_7,y_8\}\geqslant s+1$, possiamo supporre $d(y_1,y_8)\geqslant s+1$. Supponiamo, dapprima, $d(y_2,y_7)\geqslant s+1$. Se $d(y_u,y_v)\leqslant s$ per ogni $(u,v)\in H=\{(2,4),(5,1),(8,4),(5,7)\}$, si ha una partizione di $Y_{1,s}$ in insiemi $X_{i,s}$ del tipo $\{y_2,y_4,y_8\}$, $\{y_1,y_5,y_7\}$, $\{y_3\}$, $\{y_6\}$, già esaminata. Sia, dunque, $d(y_u,y_v)\geqslant s+1$ per almeno un elemento di H. La tesi segue, allora, dal Lemma (2), essendo $W=\{y_{u-1}, y_{v+1}, y_{13-(u+v)+R[u+1/2]}\}$ (6) ripartibile in insiemi T_i e $Y_{1,s}-W$ $L_s$colorabile con due colori. Sia $d(y_2,y_7)\leqslant s$. Segue $d(y_3,y_7)\geqslant s+1$. Si ha, inoltre, $d(y_3,y_8)\leqslant s$: infatti se fosse $d(y_3,y_8)\geqslant s+1$ si avrebbe una partizione di $Y_{1,s}$ in insiemi $X_{i,s}$ del tipo $\{y_1,y_2,y_7\}$, $\{y_4,y_5,y_6\}$, $\{y_3\}$, $\{y_8\}$,

---

(4) Infatti dev'essere $|C(y_7)|<2$, $|C(y_8)|<2$, $C(y_3)-(C(y_7)\cup C(y_8))=\phi$. Se fosse inoltre $C(y_7)=C(y_8)=\{\alpha\}$, sarebbe necessariamente $C(y_3)-(C(y_7)\cup C(y_8))\neq\phi$ (cfr. Teor. 2.1).

(5) Cioè se $\{v,v'\}=\{7,8\}$, allora $d(y_v,y_u)\geqslant s+1\Rightarrow d(y_{v'},y_{u+3})\leqslant s$ e $d(y_v,y_{u+3})\geqslant s+1\Rightarrow d(y_{v'},y_u)\leqslant s$.

(6) Se $z,z'\in\mathbf{R}$, $z'\neq 0$, $R[z/z']$ è il resto della divisione di z per z'.

già esaminata. In modo analogo è $d(y_7, y_u) \geqslant s+1$ per $u \in \{5, 6\}$ [7]. Si ha la tesi per il Lemma (2) considerando che, se $u = 5$ [risp. $u = 6$], l'insieme $W = \{y_2, y_5, y_7, y_8\}$ [risp. $W = \{y_2, y_5, y_8\}$] è ripartibile in insiemi T_i e $Y_{1,s} - W$ è L_s-colorabile con due colori. Procedendo in modo analogo, si ha la tesi anche per $|X_{3,s}| = 2$.

(3) Sia, infine, $|X_{2,s}| = 4$. Si ha $|Y_{2,s}| = 4$ (caso (C)). Se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \prod_{i=1}^{4} C(y_i)$, $(w_1, w_2, w_3, w_4) \in \prod_{i=5}^{8} C(y_i)$, per il Teor. 2.1 possiamo supporre $\alpha_i \neq \alpha_j$ per ogni $i, j = \{1, \ldots, 4\}$, $i \neq j$, e $w_i \neq w_j$ per ogni $i, j = \{1, \ldots, |X_{3,s}|\}$ $i \neq j$ [8]. Indicheremo, inoltre, con μ un colore, se esiste, distinto da α_1, α_2, α_3, α_4. Sarà inoltre $d(y_u, y_{u+4}) \geqslant s + 1$ per $u = 1, \ldots, |X_{3,s}|$.

Sia $|X_{3,s}| = 4$. Poichè $|\{w_1\} \cap \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}| \leqslant 1$, possiamo supporre $w_1 \neq \alpha_3, \alpha_4$. Se $\{w_3, w_4\} \cap \{\mu, \alpha_3, \alpha_4\} \neq \emptyset$, si ha subito la tesi. Infatti se w_3 [risp. w_4] $\in \{\mu, \alpha_3, \alpha_4\}$, si può porre $K(y_1, \ldots, y_8) = (\alpha_1, M, \alpha_3[N], N[\alpha_4], w_1, M, w_3[N], N[w_4])$. Sia quindi, $\{w_3, w_4\} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. In tal caso si ha la tesi ponendo $K(y_1, \ldots, y_8) = (M, N, \alpha_3, \alpha_4, M, N, w_3, w_4)$.

Sia $|X_{3,s}| = 3$. Possiamo supporre $d(y_7, y_8) \geqslant s + 1$. Nel caso $\{\mu, \alpha_1, \alpha_2\} \cap \{w_1, w_2\} \neq \emptyset$ la tesi è immediata. Infatti se w_1 [risp. w_2] $\in \{\mu, \alpha_1, \alpha_2\}$ si può porre $K(y_1, \ldots, y_8) = (\alpha_1[M], M[\alpha_2], \alpha_3, \alpha_4, w_1[M], M[w_2], N, N)$. Sia, quindi, $\{w_1, w_2\} = \{\alpha_3, \alpha_4\}$. Supponiamo $d(y_6, y_8) \geqslant s+1$ (o $d(y_8, y_5) \geqslant s+1$: in tal caso si procederebbe in modo analogo). Se $\alpha_3 = w_1$ si ha la tesi [9]. Sia $w_1 = \alpha_4$. Segue $w_2 = \alpha_3$, e quindi $w_3 \in \{\mu, \alpha_1, \alpha_2\}$. Osserviamo che, se $w_4 \in \{\mu, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ si ha la tesi. Infatti se $w_4 \in \{\mu, \alpha_1, \alpha_2\}$ si può porre $K(y_1, \ldots, y_8) = (M, N, \alpha_3, \alpha_4, M, N, w_3, w_4)$. Se $w_4 = \alpha_3$, si può porre $K(y_1, \ldots, y_8) = (M, \alpha_2, N, \alpha_4, M, \alpha_3, N, \alpha_3)$. Sia, quindi, $w_4 = \alpha_4$. Segue $d(y_5, y_8) \geqslant s+1$ [10]. Si ha allora la tesi ponendo $K(y_1, \ldots, y_8) = (\alpha_1, \alpha_2, M, N, \alpha_4, \alpha_3, M, \alpha_4)$. Se, invece, è $d(y_8, y_u) \leqslant s$ per $u = 5$ e per $u = 6$, si ha $w_4 \in \{\mu, \alpha_1, \alpha_2\}$ e, quindi, la tesi per $K(y_1, \ldots, y_8) = (M, N, \alpha_3, \alpha_4, M, N, w_3, w_4)$.

Se è $|X_{3,s}| = 2$, la tesi segue direttamente dal Lemma (1), ove si consideri che $Y_{2,s}$ è L_s-colorabile con due colori e che si può porre $A = X_{2,s}$.

Il teorema risulta così completamente dimostrato.

---

(7) Se fosse, infatti, $d(y_7, y_5) \leqslant s$, $d(y_7, y_6) \leqslant s$, si avrebbe una partizione di $Y_{1,s}$ in insiemi $X_{i,s}$ del tipo $\{y_2, y_3, y_8\}$, $\{y_5, y_6, y_7\}$, $\{y_1\}$, $\{y_4\}$.

(8) Se $y_1, \ldots, y_h \in Y_{1,s}$, $d(y_i, y_j) \leqslant s$, $i, j \leqslant h$, esistono in $X_{1,s}$ h vertici distinti $x_1, \ldots, x_h$ tali che $d(y_i, x_i) \geqslant s + 1$. Si ha allora $K(x_i) \in C(y_i)$ e $K(x_i) \neq K(x_j)$ per ogni $i, j = 1, \ldots, h$, $i \neq j$.

(9) Basta porre $K(y_1, \ldots, y_8) = (\alpha_1, \alpha_2, M, \alpha_4, \alpha_3, N, M, N)$.

(10) Infatti si ha $C(y_5) = C(y_8) = \{\alpha_4\}$ e quindi, per il Teor. 2.1, non può essere $d(y_5, y_8) \leqslant s$.

4 – In [4]$_3$ abbiamo provato che

Teor. 4.1. *Se in un grafo G si ha* $|Y_{1,s}| \leqslant 5$, *allora* $\Delta_s \leqslant 1$.

Dimostriamo che

Teor. 4.2. (i) $6 = \mathrm{Min}\,|Y_{1,s}|$, *affinchè esista un grafo G tale che* $\Delta_s = 2$.

(ii) $9 = \mathrm{Min}\,|Y_{1,s}|$, *affinchè esista un grafo G tale che* $\Delta_s = 3$.

Dim. Per provare la tesi basterà dimostrare che esistono almeno due grafi G_i, $i = 1, 2$, ed un $s \in \boldsymbol{N}$ tali che $|Y_{1,s}(G_i)| = 3(i+1)$, $\Delta_s(G_i) = i+1$. La (i) e la (ii) seguiranno, allora, rispettivamente dai Teor. 4.1 e 3.1.

Sia, dunque, $K_{3(i+1)}$ un grafo di vertici $y_1, y_2, \ldots$ ed isomorfo al grafo completo con $3(i+1)$ vertici, $H_{2(i+1)}$ un grafo di vertici $z_1, z_2, \ldots$ ottenuto dal grafo completo costruito sui suoi vertici con l'esclusione degli spigoli $\{z_j, z_{j+i+1}\}$ per $j = 1, \ldots, i+1$. Siano, inoltre, T_1 il grafo costituito dal ciclo di vertici (nell'ordine) $x_1, x_2, x_6, x_3, x_4, x_5$ e dallo spigolo $\{x_5, x_6\}$, T_2 il grafo costituito dai cicli di vertici (nell'ordine) $x_1, x_6, x_2, x_4, x_3, x_5$ e x_7, x_8, x_9 e dagli spigoli $\{x_6, x_7\}$, $\{x_j, x_{j+6}\}$ per $j = 1, 2, 3$, $\{x_j, x_{j+4}\}$ per $j = 4, 5$. Il grafo $G_i = (V_i, S_i)$ tale che $V_i = V(T_i) \cup V(K_{3i+3}) \cup V(H_{2i+2})$, $S_i = S(T_i) \cup S(K_{3i+3}) \cup S(H_{2i+2}) \cup U$, dove (11)

$$U = \bigcup_{j \in N_{3i+3}} \{\{x_j, y_j\} \cup\} \bigcup_{j \in N_{i+1}} \{\{z_j, x_{j+i+1}\}\} \cup \bigcup_{\substack{(j,u) \in N_{3i+3} \times N_{2i+2} \\ u \neq j-2i-2,\ j-i-1,\ j}} \{\{y_j, z_u\}\},$$

è tale che $|V_i| = 8i+8$, $|Y_{1,2}| = 3i+3$, $d_2 = 5i+5$, $\gamma_2 = 6i+6$, $\Delta_2 = i+1$. Da cui la tesi. Per verificare tali valori si può osservare che il grafo $\overline{G_i^2}$ è costituito da $3i+3$ vertici isolati e da $i+1$ cicli di lunghezza 5. Segue che un insieme $B \in \boldsymbol{F}(2, V(G_i))$ è costituito dai $3i+3$ vertici isolati di $\overline{G_i^2}$ e da una coppia di vertici p_1, p_2, tale che $\{p_1, p_2\} \notin S(\overline{G_i^2})$, per ogni ciclo di lunghezza 5. Da cui $d_2(G_i) = 5i+5$, $|Y_{1,2}| = |V_i| - d_2 = 3i+3$. Per determinare il numero 2-cromatico di G_i, osserviamo che agli elementi di un insieme del tipo B vanno attribuiti $5i+5$ colori distinti e che si può porre $K(q_1) = K(p_1)$, $K(q_2) = K(p_2)$, per ogni coppia q_1, q_2 tale che $\{p_j, q_j\} \in S(\overline{G_i^2})$. Ai vertici rimanenti, che sono $i+1$ (uno per ogni ciclo), bisogna necessariamente attribuire colori tutti distinti. Da cui $\gamma_2 = 6i+6$. Segue, infine, $\Delta_2 = \gamma_2 - d_2 = i+1$.

(11) Se $h \in \boldsymbol{N}$, si pone $\boldsymbol{N}_h = \{1, 2, \ldots, h\}$.

5 – I risultati ottenuti sono in relazione con altri determinati in lavori precedenti. Fissato un $s \geqslant 3$, in [**4**]$_1$ avevamo provato che $\sup_{G \in \mathscr{P}} \Delta_s(G) = +\infty$ ove $\mathscr{P}$ è la classe dei grafi planari. Per $s = 2$ avevamo solo segnalato l'esistenza di grafi (planari) tali che $\Delta_2 = 0$, $\Delta_2 = 1$, $\Delta_2 = 2$. Il grafo G_2 del Teor. 4.1 è un grafo con $|V| = 24$ e $\Delta_2 = 3$, ma non planare. In [**4**]$_3$ avevamo, tra le altre cose, dimostrato che per $|V| \leqslant 11$ si ha $\Delta_2 \leqslant 1$. Tali risultati sono tutti parziali e, quindi, si può cercare di migliorarli. Un problema, che riteniamo importante, è quello della determinazione del sup $\Delta_2(G)$, per G planare, anche se si può cercare di risolvere il problema prima in $\mathscr{G}$ e poi in $\mathscr{P}$. Un altro problema è quello di stabilire se esistono grafi con $|V| < 24$ tali che $\Delta_2 = 3$. In altre parole, proseguendo la ricerca intrapresa in [**4**]$_3$, si tratta di stabilire qual'è il Min$|V|$ affinchè si abbia $\Delta_2 = 3$. Per il Teor. 4.1, tale minimo è minore o uguale a 24. Analogamente, fissato $u \in \boldsymbol{N}$, si può cercare di determinare (se esiste) il Min$|Y_{1,s}|$ o il Min$|V|$ affinchè esista un grafo (possibilmente planare) tale che $\Delta_2 = u$.

Bibliografia

[1] S. Antonucci, *Generalizzazioni del concetto di cromatismo d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-B (1978), 20-31.

[2] C. Berge: [•]$_1$ *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970; [•]$_2$ *Problèmes de coloration en théorie des graphes*, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **9** (1960), 123.

[3] G. Chartrand, D. P. Geller and S. Hedetniemi, *A generalization of the chromatic number*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **64** (1968), 265-271.

[4] M. Gionfriddo: [•]$_1$ *Sulle colorazioni L_s d'un grafo finito*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-A (1978), 444-454; [•]$_2$ *Automorfismi colorati e colorazioni $L(r, s)$ in un grafo G*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **16**-B (1979); [•]$_3$ *Su un problema relativo alle colorazioni L_2 d'un grafo planare e colorazioni L_s*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6** (1980).

[5] S. Hedetniemi, *Disconnected coloring of graphs*, Combinatorial Structures, Gordon & Breach, New York 1970, 163-167.

[6] F. Kramer, *Sur le nombre chromatique $K(p, G)$ des graphes*, R.A.I.R.O., R-**1** (1972), 67-70.

[7] F. Kramer and H. Kramer, *Un problème de coloration des sommets d'un graphe*, C.R. Acad. Science Paris Ser. A 2 **8** (1969), 46-48.

[8] O. Ore, *The four color-problem*, Academic Press, New York 1967.

[9] F. Speranza: [•]$_1$ *Numero cromatico, omomorfismi, colorazioni d'un grafo*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **102** (1975), 359; [•]$_2$ *Colorazioni di specie superiore d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **12** suppl. fasc. 3 (1975), 53-62.

Sommario

Dato un grafo $G = (V, S)$, *si dimostra che detti* $X_{1,s}$, $Y_{1,s}$ *due* s.i. *di* V *tali che* $X_{1,s} \subseteq V$, diam $X_{1,s} \leqslant s$, $|X_{1,s}| = \max\{|X| : X \subseteq V, \text{diam } X \leqslant s\}$, $Y_{1,s} = V - X_{1,s}$ *allora* $3h = \min\limits_{s \in N} Y_{1,s}$, $h = 2, 3$, *affinchè esista un grafo* G *tale che* $\Delta_s(G) = h$. *Tale risultato sussiste anche per* $h = 1$. *La dimostrazione relativa a tale caso si trova in* $[\mathbf{4}]_3$.

* * *