Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 885-896

BIANCA MANFREDI (*)

Su certi moti asquasiperiodici (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

Introduzione

Nell'ambito della teoria qualitativa delle oscillazioni non lineari si è cercato in questa Nota di individuare criteri di *asintotica* quasiperiodicità (brev. *asquasiperiodicità*) che non presuppongano ipotesi di unicità e di stabilità alla Liapunov.

L'interesse dello studio di vibrazioni asquasiperiodiche discende dal fatto che l'esistenza di una oscillazione asquasiperiodica implica l'esistenza di una oscillazione quasiperiodica che, in particolare, può risultare un'armonica o una subarmonica. Ora, poichè la classe delle funzioni asquasiperiodiche è più generale della classe delle funzioni quasiperiodiche, risultano meno restrittive le ipotesi da farsi sui dati del problema meccanico al fine di ottenere una soluzione quasiperiodica e quindi un moto ricorrente.

Le oscillazioni non lineari esaminate sono rette da equazioni vettoriali del tipo

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad \left(x\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n, \quad \dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, x(t)\right), \tag{1}$$

ove

(i) $f(t, x) \in \mathrm{C}(\mathrm{R} \times \mathrm{D}, \mathrm{R}^n)$, essendo $\mathrm{D} \in \mathrm{R}^n$ aperto e connesso;

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 8-XI-1979.

(ii) $f(t, x)$ è periodica di periodo minimo positivo τ, cioè $\forall t$, $\forall x \in \mathrm{K} \subset \mathrm{D}$, $f(t+\tau, x) = f(t, x)$ (K compatto);

(iii) $f(t, x)$ è tale che esiste una soluzione $x(t)$ di (1) limitata in futuro, essendo $\forall t \in \mathrm{R}^+$ $\|x(t)\| < B$ (1) $(B > 0)$.

Si osserva che nel 1950 J. L. Massera, supponendo l'unicità della soluzione, provava in [**8**] che l'ipotesi (iii) assicura l'esistenza di un'armonica nel caso unidimensionale, mentre già nel caso bidimensionale la (iii) deve essere completata dall'ulteriore ipotesi che tutte le soluzioni siano definite in futuro. Qui si mostra che nel caso n-dimensionale, con n finito e del resto qualunque, l'ipotesi (iii) implica alcune affermazioni che conducono in modo spontaneo a caratterizzare quando $x(t)$ è asintoticamente periodica (brev. *asperiodica*) di asperiodo τ o un multiplo di τ, e quando $x(t)$ è asquasiperiodica e non asperiodica di asperiodo τ o un multiplo di τ. Si deducono così criteri di esistenza di armoniche, subarmoniche e di numero infinito di oscillazioni distinte che, nè armoniche, nè subarmoniche, sono equiquasiperiodiche.

1. - Alcune considerazioni preliminari

1.1. – Secondo Fréchet [**3**] una funzione continua $\psi(t)\colon \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}^n$ è *asquasiperiodica* quando è somma di una funzione (continua) quasiperiodica (2) $p(t)$ e di una funzione (continua) che tende a zero per t tendente a $+\infty$, cioè

$$\psi(t) = p(t) + q(t)\,, \qquad \lim_{t \to +\infty} q(t) = 0\,. \tag{2}$$

I quasiperiodici di $p(t)$ si dicono *asquasiperiodi* di $\psi(t)$.

In particolare, $\psi(t)$ è *asperiodica* quando in (2) la funzione $p(t)$ è periodica.

---

(1) Il simbolo $\|\cdot\|$ indica una qualunque norma in R^n.

(2) La quasiperiodicità quale naturale generalizzazione della periodicità può essere vista in due modi diversi.

Def. (secondo Bohr). Una funzione $g(t)\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$ è *quasiperiodica* se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists l = l(\varepsilon) > 0$, $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}$, $|\alpha - \beta| = l$, $\exists \eta \in [\alpha, \beta]$: $\forall t \in \mathrm{R}$, $\|g(t+\eta) - g(t)\| < \varepsilon$, essendo η un *quasiperiodo* di $g(t)$.

Def. (secondo Bochner). Una funzione $g(t)\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$ è *quasiperiodica* se $\forall \{h_k\} \in \mathrm{R}$, $\exists \{h_{k_r}\} \in \{h_k\}$: $\{g(t + h_{k_r})\}$ converge uniformemente in R. Le due definizioni risultano equivalenti (v. [**2**], [**5**]).

Una funzione asquasiperiodica risulta (v. ad esempio [**5**]) limitata e uniformemente continua in R^+, essendo poi unica la sua decomposizione espressa dalla relazione (2).

1.2. – Al fine di ottenere condizioni caratteristiche di asperiodictà e, più in generale, di asquasiperiodicità si sottolinea che le ipotesi fatte sull'equazione (1) inducono spontaneamente all'analisi della successione

$$x(t+\nu\tau)\,, \qquad t\in \mathrm{R}^+\,, \qquad \nu=0,1,2,\ldots. \tag{3}$$

Invero da (i), (ii) e (iii) si deducono le seguenti osservazioni.

Osservazioni. I. Ogni traslata di una soluzione di (1), secondo il parametro τ o un suo multiplo, è ancora soluzione di (1).

II. La soluzione limitata $x(t)$ (v. ipotesi (iii)), avendo necessariamente derivata temporale limitata, è uniformemente continua in R^+.

III. Poichè la funzione a secondo membro dell'equazione (1) risulta (v. [**1**]) uniformemente continua in $\mathrm{R}^+\times \mathrm{D}_B$, essendo $\mathrm{D}_B=\{x\in \mathrm{R}^n\colon \|x\|<\mathrm{B}\}$, la derivata temporale della soluzione limitata $x(t)$ è uniformemente continua in R^+.

IV. Dall'Osservazione II segue che, in corrispondenza della soluzione limitata $x(t)$, la successione (3) è formata da funzioni equilimitate ed equicontinue in R^+; pertanto, tenendo presente il teorema di Ascoli Arzelà, da (3) è possibile estrarre almeno una sottosuccessione uniformemente convergente in un intervallo temporale di ampiezza grande a piacere, ma finita. Se (e solo se) questa affermazione di Ascoli Arzelà viene estesa a R^+, la soluzione limitata e la sua derivata temporale risultano asquasiperiodiche; in particolare, potranno risultare asperiodiche di asperiodo τ o un multiplo di τ.

Ciò viene provato nei teoremi che seguono.

2. - Asperiodicità di $x(t)$. Esistenza di un'armonica e di subarmoniche

2.1. – Teorema 1. *Se, e solo se, la successione* (3) *è uniformemente convergente in* R^+, *la soluzione* $x(t)$ *di* (1) *è asperiodica di asperiodo* τ.

Inoltre, l'uniforme convergenza in R^+ *della successione* (3) *implica l'uniforme convergenza in* R^+ *della successione* $\{\dot{x}(t+\nu\tau)\}$, *onde, posto*

$$\lim_{\nu\to+\infty} x(t+\nu\tau)=\lambda(t)\,, \tag{4}$$

risulta

$$\lim_{\nu\to+\infty} \dot{x}(t+\nu\tau) = \dot{\lambda}(t)\,. \tag{5}$$

Infine, la funzione $\lambda(t)$, *definita dalla* (4), *è un' a r m o n i c a dell'equazione* (1).

D i m. Si osserva subito che le affermazioni del teorema sono certamente vere se $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ esiste (finito); in questo caso particolare, $x(t)$ è asperiodica costante e, quindi, di asperiodo un qualunque numero reale positivo, risultando il secondo membro di (4) una funzione periodica costante.

Pertanto, le considerazioni che seguono si riferiscono al caso in cui $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ non esiste.

(α) *Asperiodicità di* $x(t)$. La successione $\{x(t+\nu\tau)\}$ converga uniformemente in R^+; allora la funzione $\lambda(t)$ definita da (4) è una funzione (continua) periodica (oscillante) di periodo τ. Invero, fissato ad arbitrio un $\bar{t}\in R^+$, la successione $\{x(t+\nu\tau)\}$ è convergente non solo nell'istante $\bar{t}$ ma anche negli istanti $\bar{t}+k\tau$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ in quanto $\{x(t+\nu\tau)\}_{t=\bar{t}+k\tau}$ non è altro che la successione $\{x(t+\nu\tau)\}_{t=\bar{t}}$ accresciuta o privata di $k\tau$ termini. Dall'arbitrarietà di $\bar{t}$ e dall'uniforme convergenza di (3) segue l'asserto.

Ora, posto

$$x(t) = \lambda(t) + q(t)\,, \tag{4$'$}$$

con $q(t)$ certamente continua, si ha da (4)$'$

$$x(t+\nu\tau) = \lambda(t) + q(t+\nu\tau)\,,$$

onde per (4) risulta $\lim\limits_{\nu\to+\infty} q(t+\nu\tau) = 0$ uniformemente in R^+, e quindi

$$\lim_{t\to+\infty} q(t) = 0\,.$$

La (4)$'$ esprime pertanto che la soluzione $x(t)$ ammette la decomposizione secondo Fréchet (v. (2)), con $\lambda(t)$ periodica di periodo τ, risultando così $x(t)$ asperiodica di asperiodo τ.

Viceversa, se $x(t)$ è asperiodica di asperiodo τ, dalla (2) segue

$$x(t) = p(t) + q(t)\,, \qquad p(t+\tau) = p(t)\,, \qquad \lim_{t\to+\infty} q(t) = 0\,. \tag{2$'$}$$

Ora, $(2)'_3$ scritta nella forma

$$\forall\varepsilon>0\,,\quad \exists T=T(\varepsilon)>0:\quad \forall t\geqslant T\,,\quad \|q(t)\|<\varepsilon\,,$$

implica la relazione

$$\forall\varepsilon>0\,,\quad \exists T=T(\varepsilon)>0:\quad \forall t\geqslant T \quad \text{e} \quad \forall\nu\in N^+\,,\quad \|q(t+\nu\tau)\|<\varepsilon\,,$$

onde

$$(2)''_3 \qquad \lim_{\nu\to+\infty} q(t+\nu\tau)=0 \qquad \text{uniformemente per } t\in \mathrm{R}^+\,.$$

Allora, leggendo $t+\nu\tau$ al posto di t in $(2)'_1$, e tenendo presente $(2)'_2$, $(2)''_3$, si conclude che

$$\lim_{\nu\to+\infty} x(t+\nu\tau) \qquad \text{esiste uniforme per } t\in \mathrm{R}^+,$$

ossia che la successione $\{x(t+\nu\tau)\}$ è uniformemente convergente in R^+.

(β) *Asperiodicità di* $\dot{x}(t)$. Poichè la funzione $f(t,x)$ è uniformemente continua in $\mathrm{R}^+\times \mathrm{D}_B$ (v. Oss. III), si ha

$$(6) \qquad \forall\varepsilon>0\,,\quad \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\quad \forall x_1,x_2\in \mathrm{D}_B\,,\quad \|x_1-x_2\|<\delta\,,$$

$$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|<\varepsilon \qquad \forall t\in \mathrm{R}^+\,.$$

D'altra parte per (4), in corrispondenza al parametro δ figurante in (6), esiste un $\bar\nu=\bar\nu(\delta)=\bar\nu(\varepsilon)$ tale che

$$(7) \qquad \forall\nu>\bar\nu\,,\quad \|\lambda(t)-x(t+\nu\tau)\|<\delta \qquad \text{uniformemente per } t\in \mathrm{R}^+\,.$$

Allora, appartenendo le funzioni $\lambda(t)$, $x(t+\nu\tau)_{\nu=0,1,\dots}$ al dominio D_B per $t\in \mathrm{R}^+$, dalle relazioni (6) e (7) segue

$$\forall\varepsilon>0\,,\ \exists\bar\nu=\bar\nu(\varepsilon)>0:\ \forall\nu>\bar\nu\,,\ \forall t\in \mathrm{R}^+\,,\ \|f(t,\lambda)-f(t,x(t+\nu\tau))\|<\varepsilon\,,$$

ossia $\lim\limits_{\nu\to+\infty} f(t,x(t+\nu\tau))=f(t,\lambda(t))$ uniformemente per $t\in \mathrm{R}^+$, cioè

$$(8) \qquad \lim_{\nu\to+\infty} \dot{x}(t+\nu\tau)=\lambda_1(t) \qquad \text{uniformemente per } t\in \mathrm{R}^+\,,$$

ove $\lambda_1(t)=f(t,\lambda(t))$ è una funzione uniformemente continua in R^+ e periodica di periodo τ. Questa relazione (8) implica che la successione $\{\dot{x}(t+\nu\tau)\}$ converga uniformemente in R^+ alla funzione $\lambda_1(t)$; allora, per concludere l'asperiodicità della funzione $\dot{x}(t)$ si può procedere come in (α). Precisamente, posto

$$\dot{x}(t)=\lambda_1(t)+q_1(t)\,, \tag{9}$$

la funzione $q_1(t)$ risulta uniformemente continua, essendo tale sia $\lambda_1(t)$ che $\dot{x}(t)$: ora, per la periodicità di $\lambda_1(t)$, si ha da (9)

$$\dot{x}(t+\nu\tau)=\lambda_1(t+\nu\tau)+q_1(t+\nu\tau)\,,$$

da cui essendo $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dot{x}(t+\nu\tau)=\lambda_1(t)$ (uniformemente in R^+) si ha $\lim\limits_{\nu\to+\infty}q_1(t+\nu\tau)=0$ uniformemente in R^+, onde $\lim\limits_{t\to+\infty}q_1(t)=0$. Pertanto la funzione $\dot{x}(t)$ ammette, in virtù di (9), una scomposizione del tipo (2) e quindi, essendo $\lambda_1(t)$ periodica, si può affermare che $\dot{x}(t)$ è asperiodica secondo Fréchet.

(γ) *Validità della relazione* (5). Per il teorema degli incrementi finiti si ha

$$\forall h\neq 0\,,\quad \frac{x(t+\nu\tau+h)-x(t+\nu\tau)}{h}=\dot{x}(t+\theta h+\nu\tau)\,,\qquad |\theta|<1\,. \tag{10}$$

Se qui si fa $\nu\to+\infty$, in virtù di (4) e (8), risulta

$$\forall h\neq 0\,,\quad \frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}=\lambda_1(t+\theta h)\,,\qquad |\theta|<1\,,$$

da cui, poichè $\lim\limits_{h\to 0}\lambda_1(t+\theta h)=\lambda_1(t)$, segue che la funzione $\lambda(t)$ è derivabile in R^+, avendosi precisamente

$$\dot{\lambda}(t)=\lambda_1(t)\,. \tag{11}$$

Quando si tenga presente la (8), si vede che la (11) coincide proprio con la relazione (5).

(δ) *Esistenza di un'armonica per l'equazione* (1). Questa oscillazione armonica è rappresentata dalla funzione $\lambda(t)$ periodica di periodo τ, in quanto in virtù di (11), la funzione $\lambda(t)$ risulta soluzione dell'equazione (1), essendo, per definizione, $\lambda_1(t)=f(t,\lambda(t))$.

2.2. – Teorema II. *Se, e solo se, esiste un intero* $k^* > 1$ *tale che*

$$\lim_{\nu\to+\infty} x(t+\nu\tau^*) \qquad \textit{esiste uniforme in } \mathrm{R}^+,$$

(*ove* $\tau^* = k^*\tau$ *è il minimo multiplo di* τ *per cui vale* (4)*) *la soluzione* $x(t)$ *è asperiodica di asperiodo* τ^* *e non di asperiodi* $\tau, 2\tau, \ldots, (k^*-1)\tau$.

Inoltre, posto

$$\text{(4)*} \qquad \lim_{\nu\to+\infty} x(t+\nu\tau^*) = \lambda^*(t),$$

le funzioni $\lambda^*(t), \lambda^*(t+\tau), \ldots, \lambda^*\big(t+(k^*-1)\tau\big)$ *rappresentano* k^* *subarmoniche* *distinte*, *di periodo* τ^*, *dell'equazione* (1).

Dim. La dimostrazione di questo teorema è analoga a quella fatta nel caso di $k^* = 1$ (v. n. **2.1**). Qui si sottolinea solamente che la $x(t)$ non può essere asperiodica di asperiodo $\tau, 2\tau, \ldots, (k^*-1)\tau$: invero, se, ad esempio fosse $x(t)$ asperiodica di asperiodo τ, varrebbe necessariamente (v. [**6**]$_1$) la relazione (4), contro l'ipotesi. Da questa osservazione segue l'esistenza di k^* subarmoniche distinte dell'equazione (1), essendo ottenute queste subarmoniche dalla relazione (4)* leggendo in essa $t + s\tau$ $(s = 1, \ldots, k^*-1)$ al posto di t.

2.3. – Se l'equazione (1) si particolarizza nella cosiddetta «equazione di Fink»

$$\text{(1)}' \qquad \dot{x} = g(x) + \varphi(t),$$

vale il seguente

Corollario. *Se esistono soluzioni periodiche oscillanti di* (1)′, *i periodi (positivi) minimi di queste soluzioni appartengono tutti alla successione* $\tau, 2\tau, \ldots$. *Pertanto, le armoniche e le subarmoniche sono le* *sole* *soluzioni periodiche possibili per l'equazione* (1)′.

Dim. Sia $x(t)$ una soluzione periodica di (1)′ e sia $\bar{\tau}$ il suo periodo positivo minimo. Posto $h(t) = \dot{x}(t) - g\big(x(t)\big)$, questa funzione $h(t)$ risulta periodica di periodo $\bar{\tau}$, in quanto in essa la variabile t figura soltanto tramite le funzioni periodiche $x(t)$ e $\dot{x}(t)$. D'altra parte, avendosi per (1)′, $h(t) = \varphi(t)$, con $\varphi(t)$ funzione periodica di periodo minimo τ (> 0), necessariamente $\bar{\tau}$ sarà uno dei numeri $\tau, 2\tau, 3\tau, \ldots$.

3. - Asquasiperiodicità di $x(t)$. Esistenza di soluzioni distinte, in numero infinito, equiquasiperiodiche [3]

3.1. – Si osserva subito che l'equazione (1), può avere soluzioni quasiperiodiche e non periodiche. Ad esempio, se l'equazione (1) si traduce nel sistema differenziale non lineare e periodico (di periodo 2π)

$$(12) \qquad \dot{x}_1 = (1 - r^2)x_1 - \alpha x_2\,, \qquad \dot{x}_2 = (1 - r^2)x_2 + \alpha x_2\,, \qquad \dot{x}_3 = -\operatorname{sen} t\,,$$

ove $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ ed il parametro reale α è positivo, la soluzione del sistema (12)

$$x\colon x_1 = \cos \alpha t\,, \qquad x_2 = \operatorname{sen} \alpha t\,, \qquad x_3 = \cos t\,,$$

risulta: (a) armonica per α intero; (b) subarmonica per $\alpha = p/q$ (con $p < q$, e p, q interi primi fra loro) di periodo $2\pi q$, essendo poi subarmoniche di (12) anche le funzioni (v. Teorema II)

$$x_1 = \cos \frac{p}{q}(t + 2\pi s)\,, \qquad x_2 = \operatorname{sen} \frac{p}{q}(t + 2\pi s)\,, \qquad x_3 = \cos t\,, \qquad (s = 1, \ldots, q-1)\,;$$

(c) quasiperiodica, e non periodica, per α irrazionale.

3.2. – Come i precedenti Teoremi I e II assicurano quando, e sol quando, esiste per l'equazione (1) un armonica o una subarmonica, si mostra ora come una ulteriore analisi delle accumulazioni della successione $\{x(t + \nu\tau)\}$ permetta di caratterizzare l'asquasiperiodicità della soluzione limitata e quindi l'esistenza di soluzioni quasiperiodiche che non sono armoniche, nè subarmoniche.

Teorema III. *La soluzione $x(t)$ è asquasiperiodica e non asperiodica di asperiodo τ o un multiplo di τ se, e solo se, valgono le condizioni* (A) *e* (B) *seguenti.*

(A) *Ogni sottosuccessione di $\{x(t + \nu\tau)\}$ contiene una successione $\{x(t + \nu_k \tau)\}$ uniformemente convergente in* R^+ (condizione di asquasiperiodicità per $x(t)$).

[3] Le funzioni $g(t)$ di un insieme G, definite su R ed ivi continue, si dicono *equiquasiperiodiche* se

$$\forall \varepsilon > 0\,, \quad \exists l = l(\varepsilon) > 0\,, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}\,, \quad |\alpha - \beta| = l\,, \quad \exists \eta \in [\alpha, \beta]\colon$$
$$\forall t \in \mathrm{R}\,, \quad \forall g(t) \in \mathrm{G}\,, \quad \|g(t + \eta) - g(t)\| < \varepsilon\,,$$

essendo η un quasiperiodo delle funzioni di G.

(B) *Per ogni successione* $\{x(t+\nu_k\tau)\}$, *uniformemente convergente in* R^+, *la differenza* $\nu_{k+1}-\nu_k$ *non è ultimamente costante* (condizione di non asperiodicità per $x(t)$ asquasiperiodica).

Nelle ipotesi (A) *e* (B), *esistono, in un numero infinito, soluzioni distinte quasiperiodiche che, nè armoniche, nè subarmoniche, sono equiquasiperiodiche.*

Dim. (α) Si osserva subito che in [**6**]$_3$ è stato provato come l'ipotesi (A) sia condizione caratteristica di asquasiperiodicità per la funzione $x(t)$. Qui si sottolinea soltanto che la condizione (A) è meno restrittiva della condizione di asquasiperiodicità data, ad esempio, da T. Yoshizava in [**5**] (v. Proprietà L, p. 25), in quanto (A) si avvale solo della particolare famiglia di traslate (secondo τ) della funzione $x(t)$.

Valendo (A), poichè, per l'ipotesi (B), non esiste un intero $k^*\geqslant 1$ tale che $\nu_{k+1}-\nu_k=k^*$ per k abbastanza grande, la successione $\{x(t+\nu\tau)\}$ non contiene alcuna sottosuccessione del tipo $\{x(t+\nu\tau^*)\}$, con $\tau^*=k^*\tau$, uniformemente convergente in R^+. Allora, quando si tenga presente il Teorema II, si conclude che la funzione asquasiperiodica $x(t)$ non può essere, asperiodica di asperiodo τ o un multiplo di τ.

Viceversa, se la funzione $x(t)$ è asquasiperiodica, necessariamente (v. [**6**]$_3$) vale la condizione (A); inoltre, se la $x(t)$ è asquasiperiodica e non asperiodica di asperiodo τ o un multiplo di τ, non vale (4)* (v. Teorema II); allora, per ogni sottosuccessione di $\{x(t+\nu\tau)\}$ uniformemente convergente in R^+, risulta necessariamente soddisfatta la condizione (B).

In conseguenza delle ipotesi (A) e (B) vale quindi per la funzione $x(t)$ la decomposizione (2) di Fréchet,

$$(2)' \qquad x(t)=p(t)+q(t)\,, \qquad \lim_{t\to+\infty} q(t)=0\,,$$

essendo $p(t)$ una funzione quasiperiodica e non periodica di periodo τ o un multiplo di τ; inoltre, in corrispondenza a una qualunque successione $\{x(t+\nu_k\tau)\}$ uniformemente convergente in R^+, esiste uniforme in R^+ $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t+\nu_k\tau)$. Allora, posto

$$(13) \qquad \lim_{k\to+\infty} x(t+\nu_k\tau)=\lambda(t)\,,$$

dalle (2)$'$, quando in esse si legga $t+\nu_k\tau$ al posto di t e si faccia $k\to+\infty$, segue

$$\lim_{k\to+\infty} x(t+\nu_k\tau)=\lim_{k\to+\infty} p(t+\nu_k\tau)\,,$$

e quindi per (13)

$$\lambda(t) = \lim_{k\to+\infty} p(t + \nu_k \tau) .$$

Questa relazione implica che $\lambda(t)$ sia quasiperiodica (v. [**5**], p. 10) e non periodica di periodo τ o un multiplo di τ (v. [**6**]$_4$, p. 396).

Per provare poi che le funzioni $\lambda(t)$ distinte sono in numero infinito, si ragiona per assurdo: siano, se possibile, le $\lambda(t)$ distinte in numero finito m, esistano cioè m, e soltanto m, sottosuccessioni di $\{x(t + \nu\tau)\}$ uniformemente convergenti in R^+. Allora $\{x(t+\nu\tau)\}$ può decomporsi nelle m successioni seguenti

$$
\begin{array}{lllll}
(14)_1 & x(t)\,, & x(t+m\tau)\,, & x(t+2m\tau)\,, & \dots, \\
(14)_2 & x(t+\tau)\,, & x\big(t+(m+1)\tau\big)\,, & x\big(t+(2m+1)\tau\big)\,, & \dots, \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots, \\
(14)_m & x\big(t+(m-1)\tau\big)\,, & x\big(t+(2m-1)\tau\big)\,, & x\big(t+(3m-1)\tau\big)\,, & \dots .
\end{array}
$$

Ora, poichè $x(t)$ è asquasiperiodica (v. condizione (A)), ciascuna delle m successioni (14) ha almeno una sottosuccessione uniformemente convergente in R^+; d'altra parte, poichè le (14) nella loro totalità esauriscono la successione $\{x(t+\nu\tau)\}$, ciascuna delle (14) è uniformemente convergente in R^+, avendosi così, in virtù di (13),

$$\lim_{\nu\to+\infty} x\big(t+\nu(m\tau)\big) = \lambda(t) .$$

Questa equaglianza, che coincide con la (4)* per $k^* = m$, implica (v. Teorema II) che $x(t)$ sia asperiodica di asperiodo $m\tau$: ma questa affermazione è in contrasto con la prima affermazione del teorema.

Le funzioni quasiperiodiche $\lambda(t)$, in numero infinito, risultano poi equiquasiperiodiche: ciò è ampiamente provato in [**7**].

Infine, ogni funzione $\lambda(t)$ è soluzione dell'equazione (1). Procedendo, invero come nel n. **2.1**, si ottiene

$$\lim_{k\to+\infty} \dot{x}(t+\nu_k\tau) = \dot{\lambda}(t)\,, \tag{15}$$

uniformemente per $t \in \mathrm{R}^+$; d'altra parte da (1) segue

$$\lim_{k\to+\infty} \dot{x}(t+\nu_k\tau) = \lim_{k\to+\infty} f\big(t, x(t+\nu_k\tau)\big)\,,$$

onde, per (13) e (15), quando si tenga presente l'Oss. III, si ottiene

$$\dot{\lambda}(t) = f(t, \lambda(t)) \qquad \forall t > 0 ,$$

cioè ogni funzione $\lambda(t)$ è soluzione di (1).

Il Teorema III è così concluso.

Corollario. *Se $x(t)$ è asquasiperiodica e se le accumulazioni distinte della successione $\{x(t + \nu\tau)\}$ sono in numero infinito, allora $x(t)$ non è asperiodica di asperiodo τ o un multiplo di τ.*

Bibliografia

[1] A. Dall'Aglio Angelotti, *Un criterio di periodicità per le soluzioni di sistemi periodici*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **2** (1976), 347-358.

[2] A. M. Fink, *Almost periodic differential equations*, Lecture Notes in Math. **377**, Springer-Verlag, New York 1974.

[3] M. Fréchet, *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques*, Rev. Sci. **79** (1941), 341-354.

[3] A. Halanay, *Differential equations: stability, oscillations, time lags*, Academic Press, New York 1956.

[5] T. Yoshizawa, *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions*, Appl. Math. Sci. **14**, Springer-Verlag, New York 1975.

[6] B. Manfredi: $[\bullet]_1$ *Su le funzioni asperiodiche in* $+\infty$ - (I), Riv. Mat. Univ. Parma (2) **12** (1971), 281-308 (in collaborazione con A. Mambriani); $[\bullet]_2$ *Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solutions périodiques de certaines équations differentielles non linéaires d'ordre* $n \geqslant 2$, Colloque de Mons (pp. 56-65) Vander, Louvain, 1970; $[\bullet]_3$ *Su l'esistenza di certi moti quasiperiodici*, Actas del V Congresso de la Agrupaciòn de Matemàticos de Expresiòn Latina (Palma de Mallorca 19-23 septiembre 1977), 470-474; $[\bullet]_4$ *Asperiodicità e asquasiperiodicità*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 395-402.

[7] S. Marchi, *Alcune proprietà sugli insiemi di funzioni asquasiperiodiche*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6** (1980).

[8] J. L. Massera: $[\bullet]_1$ *The number of subharmonic solutions of non-linear differential equations of the second order*, Ann. of Math. **50** (1949), 118-126; $[\bullet]_2$ *The existence of periodic solutions of systems of differential equations*, Duke Math. J. **17** (1950), 457-475.

Summary

We consider the vectorial nonlinear and τ-periodic equation (1) *and we assume that a bounded solution $x(t)$ exists on* R^+. *After analyzing the accumulations of the sequence* $\{x(t + \nu\tau)\}$, *we prove*: (i) $x(t)$ *is* τ^**-asperiodic function* ($\tau^* = k^*\tau$, $k^* \in \boldsymbol{N}$), *and for* (1) *the harmonic* ($k^* = 1$) *and subharmonic exist if and only if the subsequence* $\{x(t + \nu\tau^*)\}$ *is uniformly convergent on* R^+. (ii) $x(t)$ *is as-almost-periodic and not* τ^**-asperiodic function if and only if from every subsequence of* $\{x(t + \nu\tau)\}$ *one can extract a sequence* $\{x(t + \nu_k\tau)\}$ *uniformly convergent on* R^+, *and every sequence* $\{x(t + \nu_k\tau)\}$ *uniformly convergent on* R^+ *is such that* $\nu_{k+1} - \nu_k$ *is not eventually constant; as a consequence there is an infinity of oscillations for* (1) *which are neither harmonic nor subharmonic but equi-almost-periodic functions.*

* * *