

DIONIGI G A L L E T T O (*)

Una proprietà del campo newtoniano (**)

A GIORGIO S E S T I N I per il suo 70° compleanno

1. — In alcuni recenti lavori ([**3**]_{1,2,3}, [**1**]₂, [**3**]_{4,5}, ecc. ⁽¹⁾) si è provato come, dalle ipotesi suggerite dall'osservazione astronomica che l'Universo sia su larga scala omogeneo e abbia comportamento isotropo ⁽²⁾ rispetto alla nostra Galassia discendano necessariamente, nell'ambito della meccanica newtoniana, i seguenti risultati:

(a) *la legge di Hubble* (la velocità di fuga delle galassie è proporzionale alla distanza dalla nostra Galassia, con il fattore di proporzionalità dipendente unicamente dal tempo), la quale risulta verificata non solo rispetto al riferimento \mathcal{T}_o , ma rispetto ad ogni riferimento co-mobile ⁽³⁾;

(b) *la legge di gravitazione universale*, nel senso che l'azione esercitata da una generica galassia su un'altra risulta necessariamente espressa dalla legge di gravitazione universale;

(c) rispetto ad un qualsiasi riferimento co-mobile \mathcal{T}_o la forza risultante che agisce su una qualsiasi galassia P è uguale all'azione gravitazionale esercitata su P da quella parte dell'Universo \mathcal{U} contenuto nella sfera S_{oP} di centro O e raggio $|OP|$;

(*) Indirizzo: Istituto di Fisica Matematica, Università, 10123 Torino, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 22-II-1979.

⁽¹⁾ Si veda anche [**3**]₆, ove vengono riportati alcuni complementi e soprattutto fatte alcune precisazioni relative alle dimostrazioni e ai risultati contenuti nei lavori ora citati.

⁽²⁾ Con ciò si intende dire che, considerato il riferimento \mathcal{T}_o con l'origine nel baricentro della nostra Galassia e individuato da tre altre galassie lontane ad essa non complanari, le velocità delle generiche galassie rispetto a \mathcal{T}_o risultano puramente radiali.

⁽³⁾ Viene chiamato *co-mobile* ogni riferimento con l'origine in una generica galassia e in moto traslatorio rispetto al riferimento \mathcal{T}_o .

(d) tutti i riferimenti co-mobili sono tra loro equivalenti, nel senso che \mathcal{U} ha, sia dal punto di vista cinematico che da quello dinamico, lo stesso comportamento rispetto ad essi;

(e) ogni riferimento co-mobile (in particolare il riferimento \mathcal{T}_o) può essere considerato come inerziale, pur essendo detti riferimenti in moto traslatorio l'uno rispetto all'altro (4).

2. - Nelle trattazioni concernenti la cosmologia newtoniana, trattazioni in cui \mathcal{U} è supposto esteso a tutto lo spazio, il punto di partenza è costituito in generale dal cosiddetto principio cosmologico (5) (l'Universo presenta il medesimo aspetto da qualunque punto lo si osservi (6)), assieme alle assunzioni, invero, almeno *a priori*, arbitrarie, che il riferimento co-mobile \mathcal{T}_o considerato in dette trattazioni sia inerziale e che risulti nulla l'azione gravitazionale esercitata su P dalla parte di \mathcal{U} esterna alla sfera S_{O_P} . Conseguentemente, partendo dalla teoria newtoniana della gravitazione, in dette trattazioni l'equazione del moto di P nel riferimento \mathcal{T}_o viene scritta direttamente

$$(1) \quad \frac{d^2 OP}{dt^2} = -\frac{4}{3} \pi k \mu O P,$$

con k costante di gravitazione universale e μ densità media di \mathcal{U} , ritenuto su larga scala omogeneo.

Al riguardo va detto che il principio cosmologico, di cui si può dire che ha come equivalente il risultato (d) richiamato al n. 1, esclude, nella sua enunciazione, la possibilità di un riferimento privilegiato quale può essere \mathcal{T}_o se viene ritenuto inerziale, e implica inoltre che, se rispetto a \mathcal{T}_o deve valere una proprietà del tipo di quella che ha permesso di scrivere l'equazione (1), detta proprietà deve valere in ogni riferimento co-mobile. E questo è quanto appunto viene espresso dal risultato (e).

D'altronde che la suddetta proprietà debba valere in ogni riferimento co-mobile si può dedurre direttamente da (1). Infatti, indicato con O' un qualunque altro elemento di \mathcal{U} (ritenuto, come al solito, schematizzabile in un fluido perfetto, omogeneo, ecc.) e, indicato con $\mathcal{T}_{o'}$ il corrispondente riferimento co-mobile, da (1) segue che l'accelerazione di P rispetto a $\mathcal{T}_{o'}$ risulta espressa da

$$\frac{d^2 O' P}{dt^2} = \frac{d^2 OP}{dt^2} - \frac{d^2 OO'}{dt^2} = -\frac{4}{3} \pi k \mu O' P.$$

(4) Detto risultato segue dai risultati (c) e (d). L'apparente paradosso è stato ampiamente chiarito in [3]₂, 5; [1]₂, 8.

(5) Cfr., ad es., [4], IX, 1, 2, 3; [2], II.

(6) Naturalmente si ritiene che l'Universo cambi aspetto al variare del tempo, per escludere la teoria, ormai abbandonata, dello stato stazionario.

Questa eguaglianza, oltre a permettere di asserire che l'equazione (1) sussiste non soltanto nel riferimento \mathcal{T}_o ma in ogni riferimento co-mobile, permette di concludere che, qualunque sia il riferimento co-mobile considerato, in detto riferimento il risultante della forza di trascinamento e delle azioni gravitazionali esercitate da \mathcal{U} su P coincide con il risultante delle azioni gravitazionali esercitate su P dagli elementi di \mathcal{U} contenuti nella sfera $S_{o'P}$ di centro O' e raggio $|O'P|$, che è quanto afferma il risultato (c).

3. — Le osservazioni ora mosse alle trattazioni riguardanti la cosmologia newtoniana permettono di fornire un'ulteriore conferma, indipendentemente dai risultati richiamati al n. **1** (risultati che, si ricorda, vengono dedotti da ipotesi assai deboli), che le assunzioni che vengono generalmente fatte nelle suddette trattazioni sono largamente sovrabbondanti.

Si può infatti provare che, senza nemmeno introdurre l'ipotesi che \mathcal{U} abbia comportamento isotropo rispetto ad un particolare riferimento (⁷), se per \mathcal{U} esiste una classe di riferimenti aventi per origine gli elementi di \mathcal{U} , in moto traslatorio l'uno rispetto all'altro e tali che per ognuno di essi il risultante delle forze di trascinamento e delle azioni a distanza esercitate da \mathcal{U} su P coincida con il risultante delle azioni a distanza esercitate su P dagli elementi di \mathcal{U} contenuti nella sfera S_{oP} avente il centro nell'origine O del riferimento considerato e raggio $|OP|$, le azioni a distanza che si esercitano fra gli elementi di \mathcal{U} risultano necessariamente espresse dalla legge di gravitazione universale.

Per dimostrare il teorema occorre ricordare che, conformemente a quanto visto in [3]₁, 3 e precisato in [1]₁, 3, il risultante $\mathbf{g}(OP, t)$ delle azioni specifiche a distanza (forze per unità di massa) esercitate dagli elementi Q di S_{oP} su P risulta espresso da (⁸)

$$(2) \quad \mathbf{g}(OP, t) = -\mu(t) \int_{S_{oP}} f(|QP|) \frac{QP}{|QP|} dC,$$

dove il segno meno è suggerito dall'esperienza, mentre $f(|QP|)$ è una funzione positiva della distanza $|QP|$, continua per $Q \neq P$.

(⁷) \mathcal{U} si continua naturalmente a supporre schematizzato in un fluido perfetto, omogeneo, inerte, con pressione interna trascurabile.

(⁸) In [1]₁ si è ritenuto che la funzione f dipenda esplicitamente dal tempo, allo scopo di non escludere a priori la possibilità che l'intensità delle azioni a distanza (azioni gravitazionali) vari, oltre che con la distanza, con il tempo. Allo scopo di rimanere nell'ambito della meccanica classica, una tale possibilità viene qua esclusa.

Ciò premesso, si osservi che, indicato con O' un qualsiasi altro elemento di \mathcal{U} e con α un numero reale arbitrario, dalle eguaglianze

$$\frac{d^2 OP}{dt^2} = \frac{d^2 OO'}{dt^2} + \frac{d^2 O'P}{dt^2},$$

$$\frac{d^2 \alpha OP}{dt^2} = \alpha \frac{d^2 OP}{dt^2}$$

segue, ricordando (2) e le ipotesi fatte,

$$g(OP, t) = g(OO', t) + g(O'P, t),$$

$$g(\alpha OP, t) = \alpha g(OP, t).$$

Queste eguaglianze esprimono che $g(OP, t)$ è, rispetto a OP , una funzione lineare omogenea (si ricordi (2)). Si ha pertanto, ricordando (2),

$$(3) \quad \int_{s_{OP}} f(|QP|) \frac{QP}{|QP|} dC = \lambda OP,$$

con λ al più funzione del tempo.

Fatta la posizione

$$k = \frac{3\lambda}{4\pi},$$

l'eguaglianza (3), dovendo essere verificata per ogni $P \neq O$, implica necessariamente ⁽⁹⁾

$$(4) \quad f(2|OP|) = \frac{k}{(2|OP|)^2}.$$

Stante l'arbitrarietà di P , si può pertanto concludere che, comunque si scelgano i due elementi Q e P di \mathcal{U} , risulta

$$f(|QP|) = \frac{k}{|QP|^2},$$

⁽⁹⁾ Per la deduzione di (4) da (3) si veda [I]₃.

con k costante positiva in quanto $f(|QP|)$ non dipende esplicitamente dal tempo ed è inoltre positiva. Il risultato ora ottenuto, ricordando anche (2), prova l'asserto.

4. - Da (3), ricordando (2) e l'enunciato del teorema ora dimostrato, si può inoltre dedurre che la velocità di P rispetto al considerato riferimento \mathcal{T}_0 risulta puramente radiale. In altri termini, dalle ipotesi fatte su \mathcal{U} segue che il comportamento di \mathcal{U} rispetto a \mathcal{T}_0 risulta necessariamente isotropo. Conseguentemente, ricordando che \mathcal{U} si è supposto omogeneo, si può a questo punto dedurre, come già ricordato al n. 1, che la velocità di P rispetto a \mathcal{T}_0 risulta espressa da

$$\frac{dOP}{dt} = h(t) OP,$$

con

$$h(t) = - \frac{1}{3\mu} \frac{d\mu}{dt},$$

ossia risulta espressa dalla legge di Hubble, ecc.

Ringrazio il Dr. B. Barberis per la collaborazione datami nella stesura del presente lavoro.

Bibliografia

- [1] B. BARBERIS e D. GALLETTO: [\bullet]₁ *Remarks on Newton's Law of Gravitation*, Atti Accad. Sci. Torino **III** (1977), 435-439; [\bullet]₂ *Foundations of Newtonian cosmology*, Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics (II), a cura di H. Zorski, Pitman, London 1979, 19-38; [\bullet]₃ *Problemi inversi nella teoria del campo newtoniano* (di prossima pubblicazione).
- [2] H. BONDI, *Cosmology*, 1^a ed., Cambridge Univ. Press, 1952.
- [3] D. GALLETTO: [\bullet]₁ *Sulla legge di Hubble e sulla legge di gravitazione universale*, Atti Accad. Sci. Torino **II** (1976), 335-341; [\bullet]₂ *Sui fondamenti della cosmologia newtoniana* (I), Atti Accad. Sci. Torino **III** (1977), 545-554; [\bullet]₃ *Un teorema di unicità nella teoria del campo newtoniano e sue implicazioni cosmologiche*, Rend. Mat. (6) **10** (1977), 507-522; [\bullet]₄ *Sui fondamenti della meccanica newtoniana e della teoria newtoniana della gravitazione*, Atti Accad. Sci. Torino **II** (1978), 245-258; [\bullet]₅ *Sui fondamenti della meccanica classica, della teoria newtoniana della gravitazione e della cosmologia newtoniana*, Atti 3^o Convegno Nazionale di Relatività Generale e Fisica della Gravitazione, Torino, 18-21 settembre 1978 (in corso di stampa); [\bullet]₆ *Alcuni complementi e precisazioni relativi a precedenti lavori di cosmologia newtoniana*, Atti Accad. Sci. Torino (di prossima pubblicazione).
- [4] S. MAVRIDÈS, *L'Univers relativiste*, Masson, Paris 1973.

S u m m a r y

Some of the hypotheses lying at the basis of Newtonian Cosmology are criticized. In the light of these criticisms a property of the Newtonian field is proved.

* * *