Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 647-661

SILVIO NOCILLA (*)

A proposito di una equazione integrale non lineare con nucleo singolare e valor medio (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. - Introduzione

Il presente lavoro è dedicato allo studio dell'equazione integrale seguente

$$\varphi(\tau) = g(\tau) + M(\varphi, \tau) - \bar{M}(\varphi) \tag{1.1}$$

con

$$M(\varphi, \tau) = \lambda g(\tau)\varphi(\tau) + \frac{a(1 + \lambda\varphi(\tau))}{\cos \tau} \int_{-\pi/2}^{\tau} \sin s \cdot \varphi(s) \, \mathrm{d}s \,, \tag{1.2}$$

$$\bar{M}(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} M(\varphi, \tau) \, \mathrm{d}\tau \,, \tag{1.3}$$

$\tau \in I \equiv [-\pi/2, \pi/2]$, $g(\tau)$ funzione assegnata, a e λ costanti assegnate. Tale equazione integrale è caratterizzata dal fatto che (1) è *non-lineare*; (2) contiene il nucleo singolare $\sin s/\cos \tau$ che diventa infinito per $\tau = \pm \pi/2$; (3) contiene anche il *valor medio* $\bar{M}$ dell'operatore M.

(*) Indirizzo: Istituto di Meccanica Razionale, Politecnico, C.so Duca degli Abruzzi, 10129 Torino, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 22-I-1979.

Essa costituisce pertanto un *modello semplificato* dell'equazione integrale alla quale è stato ricondotto in [**2**]$_1$ il calcolo delle soluzioni periodiche armoniche, cioè con egual periodo della forzante, dell'equazione di Duffing senza dissipazione

$$\ddot{x} + k_1 x + k_3 x^3 = f_0 \sin \Omega t \,. \tag{1.4}$$

Scopo della presente ricerca è di far vedere che, sotto certe condizioni aderenti alla natura del problema fisico di partenza, la (1.1) ammette una ed una sola soluzione, calcolabile con procedimento iterativo coi metodi del punto fisso negli spazi di Banach.

2. - Precisazione dello spazio funzionale per la $\varphi(\tau)$ e proprietà dei vari operatori

Osserviamo anzitutto che dalla (1.1) si ricava subito

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(\tau)\, \mathrm{d}\tau \,. \tag{2.1}$$

Ora nel problema fisico di partenza la $g(\tau)$ vale

$$g(\tau) = g_2 \cos 2\tau \,, \qquad \text{con } g_2 \text{ costante assegnata} \,. \tag{2.2}$$

Essa ha pertanto valor medio nullo in I, e quindi in tal caso *anche la* $\varphi(\tau)$, *se esiste, deve avere valor medio nullo in* I.

D'altra parte questa condizione è basilare nel problema stesso, come dimostrato in [**2**]$_2$. Inoltre la $g(\tau)$ è funzione pari in τ: *anche alla* $\varphi(\tau)$ *imporremo di essere funzione pari di* τ, d'accordo col fatto che se tale è la $\varphi(\tau)$, tale risulta pure la $M(\varphi, \tau)$, come si verifica subito dalla (1.2), e quindi i due membri della (1.1) risultano entrambi pari in τ. D'altra parte anche il fatto che la $\varphi(\tau)$ sia pari è imposto dalla natura delle soluzioni periodiche cercate della (1.4).

Partendo dalle osservazioni di cui sopra svilupperemo la presente trattazione supponendo che la $g(\tau)$ sia del tipo seguente, più generale della (2.2), ma sempre *pari in* τ *e con valor medio nullo* in $I \equiv [-\pi/2, \pi/2]$

$$g(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n} \cos 2n\tau \qquad \text{con } g_{2n} \text{ costanti note} \,. \tag{2.3}$$

Sotto la stessa forma cercheremo anche la funzione incognita $\varphi(\tau)$

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \cos 2n\tau \qquad \text{con } b_{2n} \text{ costanti da determinarsi} \,. \tag{2.4}$$

Supporremo inoltre che la serie (2.3) sia *totalmente convergente*, ossia che

$$|g(\tau)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |g_{2n}| < \infty , \tag{2.5}$$

ed analoga proprietà richiederemo anche alla serie (2.4), ossia

$$|\varphi(\tau)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |b_{2n}| < \infty . \tag{2.6}$$

Il problema è allora ricondotto alla determinazione del vettore ad infinite componenti

$$b = \{b_2, b_4, \dots, b_{2n}, \dots\} \tag{2.7}$$

nello spazio di Banach l_1 (v. ad es. [**3**]) ossia con norma

$$\|b\| \overset{\text{Def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |b_{2n}| . \tag{2.8}$$

Chiameremo S_1 *lo spazio funzionale delle* $\varphi(\tau)$ *del tipo* (2.4) *con norma*

$$\|\varphi(\tau)\| \overset{\text{Def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |b_{2n}| , \tag{2.9}$$

per le quali è $b \in l_1$. Anche S_1 è uno spazio di Banach perchè in corrispondenza isomorfa con l_1.

Infine per ogni funzione $f(\tau)$ definita in I introdurremo i due simboli seguenti

$$\bar{f}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\tau)\, d\tau = \text{valor medio in } I, \qquad \tilde{f}(\tau) = f(\tau) - \bar{f}(\tau) . \tag{2.10}$$

In altri termini il segno $\sim$ sovrapposto alla funzione significa che da essa viene sottratto il suo valor medio in I. Risulta allora

$$\bar{\tilde{f}} = \tilde{\bar{f}} = 0 , \quad \text{e inoltre } \tilde{f}_1 \pm \tilde{f}_2 = (\widetilde{f_1 \pm f_2}) . \tag{2.11}$$

Con questo simbolismo dalle (2.3) e (2.4) si trae

$$\bar{g} = 0 , \quad \bar{\varphi} = 0 ; \qquad \text{ossia} \qquad \tilde{g} = g , \quad \tilde{\varphi} = \varphi . \tag{2.12}$$

Ciò premesso introduciamo l'operatore ausiliario, lineare in φ

$$Z(\varphi, \tau) = \frac{1}{\cos\tau} \int_{-\pi/2}^{\tau} \sin s\, \varphi(s)\, ds\,, \tag{2.13}$$

che risulta anch'esso una funzione pari di τ qualora tale sia la $\varphi(\tau)$, ma in generale a valor medio non nullo, come apparirà dai calcoli seguenti. La (1.2) si può scrivere

$$M(\varphi, \tau) = aZ(\varphi, \tau) + \lambda\big(g(\tau)\varphi(\tau) + a\varphi(\tau)Z(\varphi, \tau)\big)\,, \tag{2.14}$$

mentre l'equazione integrale (1.1), col simbolismo (2.10), si scrive più sinteticamente così

$$\varphi = g + a\tilde{Z} + \lambda(\widetilde{g\varphi} + \widetilde{a\varphi Z})\,. \tag{2.15}$$

Per procedere nello studio della (2.15) è necessario anzitutto studiare le proprietà dell'operatore Z, da cui poi le proprietà di M. Il punto fondamentale sta nel dimostrare che se $\varphi(\tau)$ appartiene a S_1 lo stesso accade anche per $\tilde{Z}$ e $\widetilde{\varphi Z}$. La dimostrazione procede per gradi come segue.

Lemma 1. *Se* $\varphi(\tau) \in S_1$ *anche* $\tilde{Z} \in S_1$.

Dim. Nelle ipotesi (2.4) e (2.6) possiamo trasformare la (2.13) come segue

$$\begin{aligned} Z(\varphi, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \frac{1}{\cos\tau} \int_{-\pi/2}^{\tau} \sin s \cos 2ns\, ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \left[\frac{1}{2n-1}\, \frac{\cos(2n-1)\tau}{\cos\tau} - \frac{1}{2n+1}\, \frac{\cos(2n+1)\tau}{\cos\tau}\right]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ora risulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\, \frac{\cos(2n+1)\tau}{\cos\tau} &= \frac{1}{2}(-1)^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \cos 2k\tau\,, \\ \frac{1}{2}\, \frac{\cos(2n-1)\tau}{\cos\tau} &= \frac{1}{2}(-1)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n+k-1} \cos 2k\tau\,, \end{aligned} \tag{2.17}$$

e pertanto, dopo alcune trasformazioni, otteniamo

$$Z(\varphi, \tau) = \bar{Z}(\varphi) + \tilde{Z}(\varphi, \tau)\,, \tag{2.18}$$

con

$$\bar{Z} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{4n^2-1} b_{2n}, \tag{2.19}$$

$$\tilde{Z} = \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\tau \left[\frac{(-1)}{2n+1} b_{2n} + \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n+k-1} \frac{4k}{4k^2-1} b_{2k}\right], \tag{2.20}$$

da cui la maggiorazione

$$|\bar{Z}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)|b_{2n}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|b_{2n}| \equiv \|\varphi\| \tag{2.21}$$

e inoltre

$$\begin{aligned} \|\tilde{Z}\| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)}{2n+1} b_{2n} + \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n+k-1} \frac{4k}{2k^2-1} b_{2k}\right| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}|b_{2n}| + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{4k}{4k^2-1}|b_{2k}| \text{ (1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}|b_{2n}| + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\frac{4n}{4n^2-1}|b_{2n}| \\ &= \frac{1}{3}|b_2| + \sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2n}{4n^2-1}\right)|b_{2n}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|b_{2n}|. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Dunque

$$\|\tilde{Z}\| \leqslant \|\varphi\|. \tag{2.23}$$

Le (2.20) e (2.23) mostrano che il lemma è vero, ed inoltre le (2.21) e (2.23) forniscono due maggiorazioni base per $|\bar{Z}|$ e $\|\tilde{Z}\|$, di cui ci varremo in seguito.

---

(1) Si applica la formula

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{k-1} a_{n,k}, \tag{a}$$

che per $a_{n,k} = a_k$ diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)a_k. \tag{b}$$

Alla fine del n. **4** la (a) verrà applicata per $a_{n,k} = n \cdot a_k$, nel qual caso essa diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} n\cdot a_k = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \sum_{n=1}^{k-1} n = \sum_{k=2}^{\infty}\tfrac{1}{2}k(k-1)a_k. \tag{c}$$

Gli indici k nelle sommatorie ad ultimo membro vengono poi sostituiti con gli indici n.

LEMMA 2. *Date le due funzioni* $\varphi(\tau)$ *e* $\psi(\tau)$

$$\varphi(\tau) = \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}\,, \qquad \psi(\tau) = \bar{\psi} + \tilde{\psi}\,, \tag{2.24}$$

con $\tilde{\varphi}$ *e* $\tilde{\psi} \in S_1$

$$\tilde{\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \cos 2n\tau\,, \qquad \tilde{\psi} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} \cos 2n\tau\,, \tag{2.25}$$

allora risulta

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\varphi\cdot\psi}\| &\leqslant |\bar{\varphi}|\cdot\|\tilde{\psi}\| + |\bar{\psi}|\cdot\|\tilde{\varphi}\| + \|\tilde{\varphi}\|\cdot\|\tilde{\psi}\| - |\overline{\tilde{\varphi}\cdot\tilde{\psi}}| \\ &\leqslant |\bar{\varphi}|\cdot\|\tilde{\psi}\| + |\bar{\psi}|\cdot\|\tilde{\varphi}\| + \|\tilde{\varphi}\|\cdot\|\tilde{\psi}\|\,. \end{aligned} \tag{2.26}$$

In particolare, se è $\bar{\varphi} = \bar{\psi} = 0$, *risulta*

$$\|\widetilde{\tilde{\varphi}\cdot\tilde{\psi}}\| \leqslant \|\tilde{\varphi}\|\cdot\|\tilde{\psi}\|\,. \tag{2.27}$$

Dim. Dalle (2.23) e (2.24) abbiamo

$$\varphi\psi = \bar{\varphi}\cdot\bar{\psi} + \bar{\varphi}\cdot\tilde{\psi} + \bar{\psi}\cdot\tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}\cdot\tilde{\psi}\,, \tag{2.28}$$

da cui

$$\widetilde{\varphi\psi} = \bar{\varphi}\cdot\tilde{\psi} + \bar{\psi}\tilde{\varphi} + \widetilde{\tilde{\varphi}\cdot\tilde{\psi}}\,, \tag{2.29}$$

e quindi la maggiorazione

$$\|\widetilde{\varphi\cdot\psi}\| \leqslant |\bar{\varphi}|\cdot\|\tilde{\psi}\| + |\bar{\psi}|\cdot\|\tilde{\varphi}\| + \|\widetilde{\tilde{\varphi}\cdot\tilde{\psi}}\|\,. \tag{2.30}$$

Si tratta allora di maggiorare opportunamente l'ultimo termine, e per questo anzitutto trovare una espressione idonea per il prodotto delle due serie di Fourier totalmente convergenti (2.25). Effettuando il prodotto termine a termine, applicando le formule di prostaferesi ai vari prodotti a due a due dei coseni, ed ordinando opportunamente i termini, si perviene alla formula seguente

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}\cdot\tilde{\psi} = &+ \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}c_{2n} + \tfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \cos 2(n-1)\tau \sum_{k=1}^{\infty} (b_{2k}c_{2n+2k-2} + b_{2n+2k-2}c_{2k}) \\ &+ \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2(n+1)\tau \sum_{k=1}^{n} b_{2k}c_{2n-2k+2}\,, \end{aligned} \tag{2.31}$$

da cui

$$
(2.32)\qquad
\begin{aligned}
&\overline{\tilde{\varphi}\cdot\tilde{\psi}} = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}c_{2n}\,,\\
&\widetilde{\tilde{\varphi}\cdot\tilde{\psi}} = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2n\tau \sum_{k=1}^{\infty}(b_{2k}c_{2n+2k} + b_{2n+2k}\,c_{2k}) + \tfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\cos 2n\tau\sum_{k=1}^{n=1} b_{2k}c_{2n-2k}\,.
\end{aligned}
$$

Ne consegue che

$$
(2.33)\qquad
\begin{aligned}
&|\overline{\tilde{\varphi}\cdot\tilde{\psi}}| = \tfrac{1}{2}\Big|\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}c_{2n}\Big| \leqslant \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|b_{2n}|\cdot|c_{2n}|\,,\\
&\|\widetilde{\tilde{\varphi}\cdot\tilde{\psi}}\| = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}c_{2n+2k} + b_{2n+2k}c_{2k}\Big| + \tfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\Big|\sum_{k=1}^{n=1} b_{2k}c_{2n-2k}\Big|\,.
\end{aligned}
$$

D'altra parte il prodotto delle norme di $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\psi}$ può esprimersi o nell'una o nell'altra delle due forme seguenti

$$
(2.34)\qquad
\begin{aligned}
\|\tilde{\varphi}\|\cdot\|\tilde{\psi}\| &= \sum_{n=1}^{\infty}|b_{2n}|\,|c_{2n}| + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\big(|b_{2k}|\cdot|c_{2n+2k}| + |b_{2n+2k}|\,|c_{2k}|\big)\\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}|b_{2k}|\cdot|c_{2n-2k}|\,,
\end{aligned}
$$

per cui abbiamo in definitiva

$$
(2.35)\qquad
\begin{aligned}
\|\widetilde{\tilde{\varphi}\cdot\tilde{\psi}}\| &\leqslant \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\big(|b_{2k}|\,|c_{2n+2k}| + |b_{2n+2k}|\,|c_{2k}|\big) + \tfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n=1}|b_{2k}|\,|c_{2n-2k}|\\
&= \|\tilde{\varphi}\|\cdot\|\tilde{\psi}\| - \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|b_{2n}|\cdot|c_{2n}| \leqslant \|\tilde{\varphi}\|\cdot\|\tilde{\psi}\| - \tfrac{1}{2}\Big|\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}c_{2n}\Big|\,.
\end{aligned}
$$

Dalle (2.30) e (2.35) si ricava immediatamente la (2.26) ed il lemma risulta dimostrato.

Applichiamo questo Lemma 2 alle funzioni $\varphi(\tau)$ con $\bar{\varphi} = 0$, e $\psi(\tau) = Z(\varphi, \tau)$ data dalle (2.18), (2.19) e (2.20). Tenuto anche conto delle maggiorazioni (2.21) e (2.23) otteniamo

$$
(2.36)\qquad \|\widetilde{\varphi Z}\| \leqslant |\bar{Z}|\cdot\|\varphi\| + \|\tilde{Z}\|\cdot\|\varphi\| \leqslant 2\|\varphi\|^2\,.
$$

In virtù della (2.29) e della seconda delle (2.32) scritte per $\psi = Z$, e della maggiorazione (2.36) risulta così anche provato che se $\varphi(\tau) \in S_1$, allora anche $\widetilde{\varphi Z} \in S_1$.

Corollario. *Dai lemmi ora dimostrati e loro conseguenze, e dalla* (2.14) *risulta che se* $g(\tau)$ *e* $\varphi(\tau) \in S_1$, *anche* $\tilde{M} = a\tilde{Z} + \lambda(\widetilde{g\varphi} + a\widetilde{\varphi Z}) \in S_1$.

A proposito dei calcoli sopra sviluppati osserviamo che il ricorso alla serie di Fourier (2.4) ed alla norma (2.9) portano indubbiamente a formalismi un po' pesanti, che si potrebbe pensare di evitare ad esempio impiegando la norma massimo modulo, nell'ipotesi della continuità delle diverse funzioni. In tal modo però non sembra sia possibile sfruttare la condizione base di valor medio nullo, e le corrispondenti maggiorazioni risultano meno buone. A titolo esemplificativo vediamo come la diseguaglianza (2.23) si modifica con la norma

$$\|\varphi(\tau)\|_c = \max_{\tau \in I} |\varphi(\tau)| . \tag{2.37}$$

Anzitutto si dimostra che la $Z(\varphi, \tau)$ è funzione pari in τ e continua in I, estremi inclusi, se tale è la $\varphi(\tau)$. Quindi si osserva che $\sin s$ ha segno costante in $[-\pi/2, 0]$ e quindi, per il secondo teorema della media, esiste un valore $-\alpha$ compreso tra $-\pi/2$ e τ tale che, tenuto anche conto della parità di $\varphi(\tau)$, sia

$$Z(\varphi, \tau) = \frac{1}{\cos\tau}\varphi(-\alpha)\int_{-\pi/2}^{\tau}\sin s\, ds = -\varphi(\alpha) \qquad (-\pi/2 < \tau < 0) . \tag{2.38}$$

Ma data la parità di $Z(\varphi, \tau)$ la stessa proprietà vale anche per $0 < \tau < \pi/2$. Ne segue che risulta

$$\|Z\|_c \leqslant \|\varphi(\tau)\|_c \quad \text{e} \quad |\bar{Z}| \leqslant \|\varphi\|_c , \tag{2.39}$$

e quindi

$$\|\tilde{Z}\|_c = \|Z - \bar{Z}\|_c \leqslant \|Z\|_c + |\bar{Z}| \leqslant 2\|\varphi\|_c . \tag{2.40}$$

Si tratta dunque di una maggiorazione dello stesso tipo della (2.23), ma col coefficiente 2 anzichè 1, e quindi molto meno buona.

3. - Applicazione del teorema di punto fisso nello spazio S_1.

Riscriviamo l'equazione (1.1) nella forma sintetica

$$\varphi = T(\varphi) , \tag{3.1}$$

dove, in base alla (2.15), è

$$T(\varphi) = g + a\tilde{Z} + \lambda(\widetilde{g\varphi} + a\widetilde{\varphi Z}) . \tag{3.2}$$

Siano

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \cos 2n\tau , \qquad \varphi^* = \sum_{n=1}^{\infty} b^*_{2n} \cos 2n\tau \tag{3.3}$$

due funzioni $\in S_1$ che supporremo sempre contenute in uno stesso intorno dell'origine

$$\|\varphi\| < \delta , \qquad \|\varphi^*\| < \delta . \tag{3.4}$$

Vogliamo dimostrare che
(Tesi). In certe condizioni che preciseremo per a, λ e $\|g\|$, *esiste* un $K < 1$ tale che

$$\|T(\varphi) - T(\varphi^*) \leqslant K\|\varphi - \varphi^*\| \tag{3.5}$$

qualunque siano φ e φ^* contenute in tale intorno.

Dim. Posto per brevità

$$Z^* = Z(\varphi^*) , \qquad T^* = T(\varphi^*) , \tag{3.6}$$

dalle (3.1), (3.2) abbiamo

$$\|T - T^*\| \leqslant |a| \cdot \|\tilde{Z} - \tilde{Z}^*\| + |\lambda| \cdot \|\widetilde{g\varphi} - \widetilde{g\varphi^*}\| + |a| \cdot |\lambda| \cdot \|\widetilde{\varphi Z} - \widetilde{\varphi^* Z^*}\| . \tag{3.7}$$

Si tratta allora di maggiorare opportunamente i tre termini a secondo membro della (3.7) in modo da pervenire alla (3.5) determinando altresì il valore di K e le condizioni in cui esso sia minore di uno. Abbiamo

1° *termine.* Data la linearità dell'operatore $Z(\varphi)$ risulta, in base alla (2.23)

$$\|\tilde{Z} - \tilde{Z}^*\| \leqslant \|\varphi - \varphi^*\| . \tag{3.8}$$

2° *termine.* In virtù della seconda delle (2.11) risulta

$$\widetilde{g\varphi} - \widetilde{g\varphi^*} = \widetilde{g(\varphi - \varphi^*)} . \tag{3.9}$$

Applicando allora il Lemma 2 nella forma (2.27), dato che per ipotesi è $\bar{g} = \bar{\varphi} = \bar{\varphi}^* = 0$, abbiamo

$$\|\widetilde{g\varphi} - \widetilde{g\varphi^*}\| \leqslant \|g\| \cdot \|\varphi - \varphi^*\| \,. \tag{3.10}$$

3° *termine*. Dall'ovvia identità

$$\varphi Z - \varphi^* Z^* = \varphi(Z - Z^*) + Z^*(\varphi - \varphi^*) \tag{3.11}$$

abbiamo, in virtù della seconda delle (2.11)

$$\widetilde{\varphi Z} - \widetilde{\varphi^* Z^*} = [\widetilde{\varphi(Z - Z^*)}] + [\widetilde{Z^*(\varphi - \varphi^*)}] \tag{3.12}$$

e quindi, applicando due volte la (2.26) con $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^* = 0$, la maggiorazione seguente

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\varphi Z} - \widetilde{\varphi^* Z^*}\| &\leqslant \|\widetilde{\varphi(Z - Z^*)}\| + \|\widetilde{Z^*(\varphi - \varphi^*)}\| \\ &\leqslant |\bar{Z} - \bar{Z}^*| \cdot \|\varphi\| + \|\tilde{Z} - \tilde{Z}^*\| \cdot \|\varphi\| + |\bar{Z}^*| \cdot \|\varphi - \varphi^*\| + \|\tilde{Z}^*\| \cdot \|\varphi - \varphi^*\| . \end{aligned} \tag{3.13}$$

In virtù delle (2.21) e (2.23), nonchè delle analoghe in virtù della linearità di $Z(\varphi)$ rispetto a φ

$$|\bar{Z} - \bar{Z}^*| \leqslant \|\varphi - \varphi^*\| \,, \qquad \|\tilde{Z} - \tilde{Z}^*\| \leqslant \|\varphi - \varphi^*\| \,, \tag{3.14}$$

otteniamo in definitiva, tenuto anche conto delle (3.4),

$$\|\widetilde{\varphi Z} - \widetilde{\varphi^* Z^*}\| \leqslant 2(\|\varphi\| + \|\varphi^*\|) \cdot \|\varphi - \varphi^*\| \leqslant 4\delta \|\varphi - \varphi^*\| \,. \tag{3.15}$$

In virtù delle (3.8), (3.10) e (3.15), dalla (3.7) otteniamo infine la (3.5) con K eguale a

$$K = (1 + 4\delta|\lambda|) \cdot |a| + |\lambda| \cdot \|g\| \,. \tag{3.16}$$

Osserviamo ora che risulta

$$T(0) = g \quad \text{e quindi} \quad \|T(0)\| = \|g\| \,. \tag{3.17}$$

Alla luce del teorema del punto fisso [**1**] dobbiamo dunque determinare in quali condizioni per $|a|$, $|\lambda|$ e $\|g\|$ sussistono contemporaneamente le condizioni

$$\|g\| \leqslant \delta(1 - K) \quad \text{e} \quad K < 1 \,, \tag{3.18}$$

con K dato dalla (3.16). Conviene eliminare δ mediante la (3.16). Siamo così ricondotti alla diseguaglianza

$$4|a|\cdot|\lambda|\cdot\|g\|\leqslant(1-K)(K-|a|-|\lambda|\cdot\|g\|)\,, \tag{3.19}$$

che ponendo per brevità

$$|\lambda|\cdot\|g\| = \varepsilon\geqslant 0\,, \tag{3.20}$$

diventa

$$4|a|\varepsilon\leqslant(1-K)(K-|a|-\varepsilon)\,, \qquad \text{con } K<1. \tag{3.21}$$

4. - Discussione delle condizioni trovate e considerazioni finali

Passiamo ora a discutere le diseguaglianze (3.21), distinguendo:

caso (a). $\lambda = 0$, e quindi $\varepsilon = 0$. Le (3.21) equivalgono a

$$|a|\leqslant K<1 \tag{4.1}$$

e risultano pertanto *indipendenti* dal valore di $\|g\|$.

caso (b). $\lambda\neq 0$, e quindi $\varepsilon>0$. Si tratta di determinare a quali condizioni devono soddisfare $|a|$ ed ε affinchè esista almeno un K reale soddisfacente contemporaneamente alle (3.21), ossia affinchè risulti

$$K^2-(1+|a|+\varepsilon)K+|a|+\varepsilon+4|a|\varepsilon\leqslant 0\,, \tag{4.2}$$

per almeno un K reale positivo <1. Ora tali condizioni equivalgono a

$$\Delta \equiv |a|^2+\varepsilon^2-14|a|\varepsilon-2|a|-2\varepsilon+1\geqslant 0\,, \tag{4.3}$$

$$K_1\equiv\tfrac{1}{2}(1+|a|+\varepsilon-\sqrt{\Delta})<1\,, \qquad \text{ossia } |a|+\varepsilon<1+\sqrt{\Delta}\,. \tag{4.4}$$

La curva $\Delta = 0$ sul piano $(|a|,\varepsilon)$ (v. figura) è costituita nel primo quadrante da un ramo di iperbole tangente agli assi nei punti $A(1,0)$ e $B(0,1)$, e con asintoti di equazioni

$$\varepsilon+\frac{1}{6}=(7\pm4\sqrt{3})\left(|a|+\frac{1}{6}\right). \tag{4.5}$$

Nel dominio $\mathscr{D}''$, compreso tra gli assi coordinati $(|a|, \varepsilon)$ e detta iperbole, la (4.3) è soddisfatta. Nella parte $\mathscr{D}$ di tale dominio interna al triangolo OAB in cui è $|a| + \varepsilon < 1$ è pure soddisfatta la (4.4). Viceversa si riconosce che nella parte $\mathscr{D}'$ di $\mathscr{D}''$ esterna allo stesso triangolo OAB la (4.4) non è più soddisfatta. Se ne conclude che *l'equazione* (1.1) *ammette una ed una sola soluzione se le grandezze reali e positive* $|a|$ *ed* $\varepsilon = |\lambda| \cdot \|g\|$ *hanno valori che sul piano* $(|a|, \varepsilon)$ *appartengono al dominio* $\mathscr{D}$ *delimitato dai segmenti* OA *e* OB *e dall'iperbole di equazione* $\Delta = 0$, *con* Δ *dato dalla* (4.3). In forma sintetica

$$(|a|, \varepsilon) \in \mathscr{D} \tag{4.6}$$

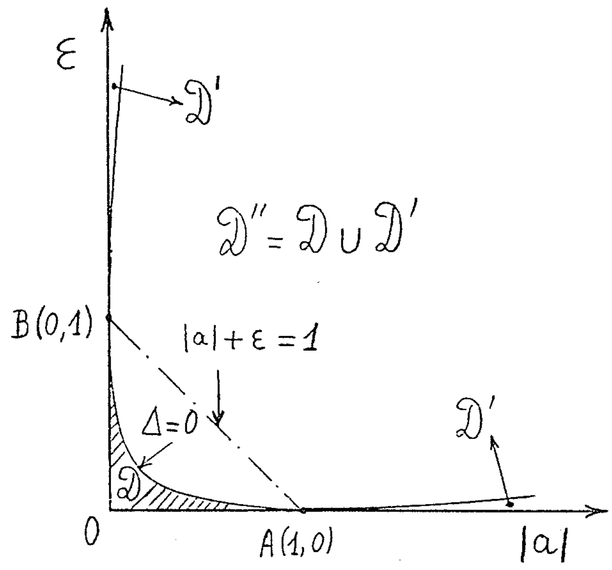

Figura 1. – Dominio $\mathscr{D}$ per $|a|$ ed $\varepsilon = |\lambda| \cdot \|g\|$ in corrispondenza del quale la (1.1) ammette una ed una sola soluzione calcolabile col teorema di punto fisso qui utilizzato.

Tale soluzione può essere calcolata col consueto algoritmo iterativo

$$\varphi^{(h+1)} = T(\varphi^{(h)}), \qquad \varphi^{(1)} = g, \tag{4.7}$$

che nelle condizioni sopra precisate converge alla soluzione stessa.

Concludiamo osservando che le condizioni ricavate per l'esistenza ed unicità della soluzione appaiono dipendenti anche dalla norma scelta (2.9), che pur è sembrata la più semplice e naturale per questo problema, e dal tipo di maggiorazioni effettuate nel corso delle dimostrazioni. È lecito ritenere che ritoccando tale norma e migliorando le maggiorazioni sia possibile migliorare le condizioni qui ottenute nel senso di renderle meno restrittive ampliando il dominio $\mathscr{D}$ in corrispondenza del quale la soluzione esiste ed è unica.

Infine non è escluso che la (1.1) ammetta soluzione anche quando non sussistano le condizioni necessarie per poter applicare il teorema di punto fisso qui utilizzato.

Queste osservazioni trovano conferma in risultati numerici preliminari già ottenuti applicando il metodo iterativo (4.7) alla (1.1) e ad altre equazioni più generali dello stesso tipo: su tali risultati non è qui il caso di soffermarsi. Esse poi appaiono evidenti nel semplicissimo caso particolare lineare

$$\lambda = 0\,, \qquad g(\tau) = g_2 \cos 2\tau\,, \tag{4.8}$$

in cui la (1.1), come si riconosce immediatamente, ammette la soluzione esatta

$$\varphi(\tau) = g_2 \cos 2\tau/(1 + \tfrac{1}{3}a)\,, \tag{4.9}$$

valida per

$$a \neq -3\,. \tag{4.10}$$

Applicando l'algoritmo iterativo (4.7) la $\varphi(\tau)$ viene espressa mediante la serie di potenze

$$\varphi(\tau) = g_2 \cos 2\tau \sum_{n=0}^{\infty} (-\tfrac{1}{3}a)^n\,, \tag{4.11}$$

che converge al valore (4.9) solo se è

$$|a| < 3\,. \tag{4.12}$$

Si tratta dunque di un esempio in cui la soluzione esiste, ed è unica, se vale la (4.10), mentre per poter applicare il teorema di punto fisso qui utilizzato è richiesta la condizione molto più restrittiva (4.12), rispetto alla quale poi la condizione (4.1) qui ottenuta per il caso lineare $\lambda = 0$ sarebbe ancora più restrittiva. C'è però da notare che in questo esempio tutte le b_{2n} con $n > 1$ sono nulle, e pertanto in base ai calcoli (2.22) la diseguaglianza (2.23) può essere subito migliorata come segue

$$\|\tilde{Z}\| \leqslant \tfrac{1}{3}\|\varphi(\tau)\|\,, \tag{4.13}$$

il che porta proprio alla condizione (4.12) anzichè alla (4.1).

Per migliorare *in generale* la condizione (4.6), e in particolare la (4.1) nel caso lineare, proponiamo, senza svilupparla, una variante del procedimento qui seguito, consistente nell'adottare, in luogo della (2.9), la norma seguente

$$\|\varphi(\tau)\|_d \overset{\mathrm{Def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n\,|b_{2n}| \tag{4.14}$$

il che implica, come ben noto, la continuità della derivata prima della $g(\tau)$ e della $\varphi(\tau)$. Ci limitiamo a dimostrare come, con questa nuova norma, si migliora la diseguaglianza base (2.23). Precisamente in tal caso le (2.22) vengono sostituite da

$$\|\tilde{Z}\|_d = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\Big|\frac{(-1)}{2n+1}\,b_{2n} + \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n+k-1}\frac{4k}{4k^2-1}\,b_{2k}\Big| \tag{4.15}$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}\,|b_{2n}| + \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{4k}{4k^2-1}\,|b_{2k}|\ (^2) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}\,|b_{2n}| + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{4k}{4k^2-1}\,|b_{2k}|\sum_{n=1}^{k-1} n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}\,|b_{2n}| + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2k^2(k-1)}{4k^2-1}\,|b_{2k}|$$

$$= \frac{1}{3}\,|b_2| + \sum_{n=2}^{\infty}\Big[\frac{n}{2n+1} + \frac{2n^2(n-1)}{4n^2-1}\Big]\,|b_{2n}| = \frac{1}{3}|b_2| + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n\,\Big(1-\frac{1}{4n^2-1}\Big)\,|b_{2n}|$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\,\Big(1-\frac{1}{4n^2-1}\Big)\,|b_{2n}| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\,|b_{2n}|\,.$$

Dunque

$$\|\tilde{Z}\|_d \leqslant \tfrac{1}{2}\|\varphi\|_d\,. \tag{4.16}$$

Con questa nuova norma dunque il *valore maggiorante* per la norma di $\tilde{Z}$ *viene dimezzato*. Nel caso lineare $\lambda = 0$ risulta $K = \frac{1}{2}|a|$ e la condizione (4.1) si migliora come segue

$$|a| < 2\,. \tag{4.16}$$

(²) Si applica la formula (c) della nota a piè di pagina relativa alle formule (2.22).

Ringraziamento. L'Autore esprime cordialmente ai Colleghi Piero Buzano e Gaetano Fichera il più vivo apprezzamento per gli utili suggerimenti e le proficue discussioni in relazione allo sviluppo del presente lavoro.

Bibliografia

[1] J. Dieudonné, *Eléments d'analyse*, vol. I, chap. X, Gauthier Villard 1968.

[2] S. Nocilla: $[\bullet]_1$ *Periodical solutions of the Duffing equation: some exact analytical results*, Atti Convegno Internazionale Equadiff '78 (Firenze, 24-30/V/1978), 523; $[\bullet]_2$ *A study on the forced vibrations of a class of non linear systems with application to the Duffing equation*, Part. I: *Analytical treatment*, Meccanica **11** (1976), 11.

[3] N. Ya. Vilenkin et altri, *Functional analysis*, Wolters-Noordhoff 1972.

Summary

The integral equation (1.1) *is studied with the assumption that the known function* $g(\tau)$ *and unknown* $\varphi(\tau)$ *are even in* τ, *with zero mean value in the range* $[-\pi/2, \pi/2]$, *and that they admit totally convergent Fourier expansions. With these assumptions, by applying the fixed point theorem, the existence and unicity of the solution is demonstrated when the known constants* a *and* λ *and the known function* $g(\tau)$ *satisfy to determined conditions. Finally the possibility is considered of improving such conditions and making them less restrictive with the aid of other norms.*

* * *