Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 511-522

ENRICO MASSA (*)

Tecniche variazionali in relatività generale: generalizzazione di un classico risultato di A. Palatini (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. - Introduzione

Al pari di numerose altre teorie di campo, anche la teoria gravitazionale Einsteniana è deducibile da un corrispondente principio di *azione stazionaria*. In una regione *vuota* dello spazio-tempo V_4, tale principio assume la forma [3], [1]

$$\delta \int g^{jk} R_{jk} \sqrt{|g|} \mathrm{d}x^0 \ldots \mathrm{d}x^3 = 0 , \tag{1.1}$$

in cui $R_{jk} = R^i{}_{jki}$ indica il tensore di curvatura contratto, mentre $\sqrt{|g|}\mathrm{d}x^0 \ldots \mathrm{d}x^3$ rapppresenta l'elemento di estensione *Riemanniana* in V_4.

Naturalmente, nell'ordine di idee in cui si riguardano le componenti g_{jk} del tensore metrico come le *sole* variabili di campo effettive, il tensore R_{jk} che compare a primo membro dell'eq. (1.1) va identificato col *tensore di Ricci* della varietà V_4, e come tale va esplicitato in funzione delle g_{jk} stesse, e delle loro derivate prime e seconde.

Un risultato notevole, dovuto al Palatini [4], stabilisce tuttavia la possibilità di inquadrare il principio variazionale (1.1) in un ambito assai più generale, in cui non solo le componenti g_{jk}, ma anche i coefficienti di connessione $\Gamma_{ij}{}^k$ vengono riguardati come variabili di campo indipendenti. In tal

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 16100 Genova, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 27-XII-1978.

caso, i gradi di libertà « metrici » figurano a primo membro dell'eq. (1.1) solo in maniera algebrica, mentre il tensore R_{jk} dipende unicamente dai coefficienti $\Gamma_{ij}{}^{k}$, e dalle loro derivate prime. Ebbene, il risultato di Palatini asserisce che, sotto l'ipotesi ulteriore che i coefficienti di connessione siano *simmetrici*, l'annullarsi della variazione (1.1) è sufficiente a garantire, da un lato, la validità delle equazioni « di Einstein »

$$R_{jk} - \tfrac{1}{2} R g_{jk} = 0 \tag{1.2}$$

e dall'altro l'identificazione dei $\Gamma_{ij}{}^{k}$ coi *simboli di Christoffel* (e quindi, l'identificazione di R_{jk} col tensore di Ricci della varietà V_4).

In questa memoria, prendendo spunto dal risultato sopra citato, esamineremo i fondamenti geometrici del metodo di Palatini, provando che questo rientra come caso particolare in una tematica assai più generale, riguardante la caratterizzazione variazionale di *tutte* le connessioni metriche su una varietà (pseudo)-Riemanniana M (purchè di dimensione > 2), nonchè di tutte le metriche su M soddisfacenti l'eq. (1.2).

2. - Preliminari

Sia M una varietà differenziabile n-dimensionale, $D(M) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} D^r_s(M)$ l'algebra tensoriale su M, e $C(M)$ la totalità delle connessioni affini su M.

Introdotta una base locale (non necessariamente olonoma) $\{\tilde{\partial}_i, \omega^i \mid i = 1 \dots n\}$ per l'algebra $D(M)$, ogni elemento $\nabla \in C(M)$ risulta completamente individuato da un corrispondente sistema di n^3 *coefficienti di connessione* $\Gamma_{kj}{}^{i} \overset{\text{def}}{=} \langle \nabla_{\tilde{\partial}_k}(\tilde{\partial}_j), \omega^i \rangle$, o, alternativamente, da un insieme di n^2 *1-forme di connessione* $\omega^i{}_j \overset{\text{def}}{=} \Gamma_{kj}{}^{i} \omega^k$. Queste ultime intervengono direttamente nella rappresentazione del *tensore di torsione* $T^i{}_{jk}$, e del *tensore di curvatura* $R^i{}_{jk2}$ associati a ∇, tramite le *equazioni strutturali* [2]

$$\theta^i = d\omega^i + \omega^i{}_p \wedge \omega^p\,, \tag{2.1a}$$

$$\varrho^i{}_j = d\omega^i{}_j + \omega^i{}_p \wedge \omega^p{}_j\,, \tag{2.1b}$$

in cui si è adottata la notazione standard $\theta^i \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} T^i{}_{jk} \omega^j \wedge \omega^k$, e $\varrho^i{}_j \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} R^i{}_{jhk}\, \omega^h \wedge \omega^k$

Per uso successivo osserviamo inoltre che, detto $Z = Z^i{}_{hk} \tilde{\partial}_i \otimes \omega^h \otimes \omega^k \in D^1_2(M)$ un generico tensore triplo, e introdotte le 1-forme $Z^i{}_k = Z^i{}_{hk} \omega^h$ dall'eq. (2.1a) e dalla definizione stessa delle 1-forme $\omega^i{}_j$ discende immediatamente la relazione

$$\begin{aligned} dZ^i{}_k + Z^i{}_p \wedge \omega^p{}_k + \omega^i{}_p \wedge Z^p{}_k &= Z^i{}_{pk} \theta^p + \nabla_j Z^i{}_{hk} \omega^j \wedge \omega^h \\ &= (\nabla_j Z^i{}_{hk} + \tfrac{1}{2} Z^i{}_{pk} T^p{}_{jh}) \omega^j \wedge \omega^h\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

in cui ∇_j indica l'operatore di *derivazione covariante* indotto dalla connessione affine ∇.

Con queste premesse, si supponga ora di assegnare alla varietà M una struttura (pseudo)-Riemanniana, descritta dalla forma fondamentale

$$\Phi = g_{ij}\omega^i \otimes \omega^j \qquad (g_{ij} = g_{ji}\,, \ \det g_{ij} \neq 0)\,. \tag{2.3}$$

In tal caso, oltre ai già citati campi di torsione e di curvatura, è possibile associare ad ogni connessione affine $\nabla \in C(M)$ un ulteriore campo tensoriale $Q \in D^1_2(M)$, descritto in componenti nella forma

$$Q^i{}_{jk} \underset{=\!=}{\text{def}} \tfrac{1}{2} g^{ir}(\nabla_j g_{rk} + \nabla_k g_{rj} - \nabla_r g_{jk})\,. \tag{2.4a}$$

Quest'ultimo è *simmetrico* negli indici j e k, e soddisfa l'identità

$$\nabla_i g_{jk} = Q_{jik} + Q_{kij}\,. \tag{2.4b}$$

In questo senso, la condizione $Q^i{}_{jk} = 0$ caratterizza un sottospazio privilegiato $\mathscr{H} \subset C(M)$, formato da tutte e sole le connessioni *metriche* rispetto alla forma fondamentale (2.3), ossia soddisfacenti $\nabla\Phi = 0$.

Oltre a ciò, l'importanza del campo $Q^i{}_{jk}$ deriva dal fatto che, unitamente al tensore di torsione $T^i{}_{jk}$, esso esprime *tutti* i gradi di libertà presenti all'interno della classe $C(M)$. Per convincerci di questo fatto, supposta assegnata la forma fondamentale (2.3), indichiamo d'ora innanzi con $\hat{\nabla}$ la connessione Riemanniana su M, ossia l'unico elemento $\hat{\nabla} \in C(M)$ contraddistinto dalla coppia di condizioni $Q^i{}_{jk} = T^i{}_{jk} = 0$. In tal modo, ogni altra connessione $\nabla \in C(M)$ risulterà completamente individuata da un corrispondente campo tensoriale $N \in D^1_2(M)$, definito simbolicamente come la differenza $N = \nabla - \hat{\nabla}$. Più precisamente, contrassegnando con un accento circonflesso ^ le varie quantità corrispondenti alla connessione Riemanniana $\hat{\nabla}$ (coefficienti di connessione $\hat{\Gamma}_{kj}{}^i$, 1-forme di connessione $\hat{\omega}^i{}_j$, etc.), ed esprimendo tutto in componenti nella base $\{\tilde{\partial}_i, \omega^i\}$, si hanno le relazioni esplicite

$$N^i{}_{kj} = \langle \omega^i{}_j - \hat{\omega}^i{}_j, \tilde{\partial}_k \rangle = \Gamma_{kj}{}^i - \hat{\Gamma}_{kj}{}^i\,. \tag{2.5a}$$

Introdotte per semplicità le 1-forme $N^i{}_j = N^i{}_{kj}\omega^k$, l'eq. (2.5a) si riscrive

$$\omega^i{}_j = \hat{\omega}^i{}_j + N^i{}_j\,. \tag{2.5b}$$

Dall'eq. (2.5b), facendo ricorso alla 1ª equazione strutturale (2.1a) e all'identità $0 = \hat{\theta}^i = d\omega^i + \hat{\omega}^i{}_p \wedge \omega^p$ (implicita nella definizione della connessione Riemanniana), si verifica facilmente che le componenti $T^i{}_{jk}$ del tensore di torsione associato a ∇ sono espresse in termini delle componenti $N^i{}_{jk}$ dalla semplice relazione (¹)

$$T^i{}_{jk} = N^i{}_{jk} - N^i{}_{kj} = 2N^i{}_{[jk]} . \tag{2.6a}$$

Similmente, tenuto conto delle equazioni (2.4a), (2.5a), e dell'identità $\hat{\nabla}_i g_{jk} = 0$ — anch'essa implicita nella definizione della connessione $\hat{\nabla}$ — un semplice calcolo porge

$$\begin{aligned} Q^i{}_{jk} &= \tfrac{1}{2} g^{ir}[(\nabla_j - \hat{\nabla}_j) g_{rk} + (\nabla_k - \hat{\nabla}_k) f g_{rj} - (\nabla_r - \hat{\nabla}_r) g_{jk}] \\ &= N^i{}_{(jk)} + N_{(jk)}{}^i - N_{(j}{}^i{}_{k)} . \end{aligned} \tag{2.6b}$$

Le equazioni (2.6a, b) possono essere sintetizzate nell'unica relazione

$$N^i{}_{jk} = Q^i{}_{jk} + \tfrac{1}{2}(T^i{}_{jk} + T_j{}^i{}_k + T_k{}^i{}_j) \underset{=\!=}{\mathrm{def}} Q^i{}_{jk} + W^i{}_{jk} , \tag{2.7}$$

in cui si è introdotta la notazione semplificata

$$W^i{}_{jk} \underset{=\!=}{\mathrm{def}} \tfrac{1}{2}(T^i{}_{jk} + T_j{}^i{}_k + T_k{}^i{}_j) . \tag{2.8}$$

Ciò prova che la conoscenza dei campi Q e T è matematicamente equivalente alla conoscenza del campo N, e come tale fissa univocamente la connessione affine ∇ in funzione di $\hat{\nabla}$, ossia della forma fondamentale (2.3).

A ulteriore commento dei risultati sopra esposti osserviamo infine che, definite le 1-forme $Q^i{}_j = Q^i{}_{kj}\omega^k$ e $W^i{}_j = W^i{}_{kj}\omega^k$ secondo la procedura usuale, le equazioni (2.5b), (2.7) danno luogo alla relazione

$$\omega^i{}_j - W^i{}_j = \hat{\omega}^i{}_j + Q^i{}_j . \tag{2.9}$$

Da questa, tenuto conto dell'eq. (2.8), della 2^a equazione strutturale (2.1b) e dell'identità (2.2), si ricava facilmente l'espressione del tensore di curvatura $R^i{}_{jhk}$ associato alla connessione ∇ in termini del tensore di curvatura *Riemanniana* (o tensore di Riemann) $\hat{R}^i{}_{jhk}$, e dei campi T e Q. Su questo punto, o più specificatamente, sull'ultilizzo dell'eq. (2.9) in un contesto variazionale, torneremo tra breve nel paragrafo successivo.

(¹) Nel seguito è sottintesa l'usuale convenzione sull'uso di parentesi tonde (quadre) per indicare il processo di simmetrizzazione (antisimmetrizzazione) degli indici in esse contenuti.

3. - Caratterizzazione variazionale delle connessioni metriche

I risultati stabiliti in **2** permangono inalterati anche nel caso più generale in cui la forma fondamentale (2.3) non sia supposta assegnata a priori, ma sia riguardata essa stessa come un « grado di libertà », da scegliersi all'interno di un'opportuno spazio $R(M)$ di metriche (pseudo)-Riemanniane su M. È appunto in quest'ambito che si può inquadrare in tutta generalità il problema della ricerca di principi variazionali atti a selezionare sottoclassi privilegiate di metriche e di connessioni affini sulla varietà M.

L'argomento coinvolge essenzialmente l'introduzione del concetto di *densità di lagrangiana* (nel seguito detta più brevemente « la lagrangiana »), definita come un'applicazione $L = L(\Phi, \nabla)$ del prodotto cartesiano $R(M) \times C(M)$ nell'anello delle funzioni differenziabili su M.

Sulla base di quanto visto in **2**, la trattazione risulta notevolmente semplificata impiegando, in luogo della coppia Φ, ∇, la terna di argomenti Φ, T, Q, in cui $T = T^i{}_{jk}\tilde{\partial}_i \otimes \omega^j \otimes \omega^k$ è il tensore di torsione associato a ∇, mentre $Q = Q^i{}_{jk}\tilde{\partial}_i \otimes \omega^j \otimes \omega^k$ è il campo tensoriale definito in termini di ∇ e Φ dall'eq. (2.4). In particolare, nel caso in cui l'applicazione $L = L(\Phi, \nabla)$ *non dipenda* esplicitamente dall'argomento ∇ (o, equivalentemente, dalla coppia T, Q), essa è detta una lagrangiana *puramente metrica*. Un esempio non banale in tal senso è fornito dalla lagrangiana « di Einstein » $L_E(\Phi) \overset{\text{def}}{=} g^{jk}\hat{R}_{jk}$.

In ogni caso, ogni assegnazione della lagrangiana L dà luogo ad un corrispondente *integrale di azione*

$$A(\Phi, \nabla) = \int_D L(\Phi, \nabla)\, dv\,, \tag{3.1}$$

in cui $D \subset M$ indica un generico dominio, con frontiera regolare ∂D, mentre dv rappresenta l'elemento di estensione *Riemanniana* su M (e, come tale, è esso stesso subordinato alla scelta della forma fondamentale Φ).

Seguendo la nomenclatura usuale, due lagrangiane L ed L' saranno dette *equivalenti* ($L \simeq L'$) se e solo se, comunque si fissi il dominio $D \subset M$, la differenza $A(\Phi, \nabla) - A'(\Phi, \nabla) = \int_D (L - L')\, dv$ tra i corrispondenti integrali di azione dipende dagli argomenti Φ e ∇ *unicamente* attraverso i valori che questi assumono sul contorno ∂D. Ciò accade tipicamente ogniqualvolta sussista una rappresentazione del tipo $L - L' = \hat{\nabla}_j X^j$, essendo $X^j = X^j(\Phi, \nabla)$ un campo vettoriale su M.

Più in generale, due lagrangiane L ed L' saranno dette ∇-*equivalenti* ($L \overset{\nabla}{\simeq} L'$) se e solo se la differenza $A(\Phi, \nabla) - A'(\Phi, \nabla) = \int_D (L - L')\, dv$ dipende dall'argomento ∇ unicamente attraverso i valori che questo assume sul contorno ∂D, nessuna restrizione essendo invece imposta sul tipo di dipendenza dell'espressione suddetta dall'argomento Φ. In questo senso, la nozione di

∇-equivalenza rappresenta un indebolimento della nozione di equivalenza, in quanto consente situazioni del tipo $L - L' = \hat{\nabla}_j X^j + \Lambda(\Phi)$, in cui $\Lambda(\Phi)$ rappresenta una lagrangiana puramente metrica nel senso chiarito dianzi. Più intuitivamente, si può riguardare la relazione di ∇-equivalenza come una equivalenza « a metrica fissata », ossia non includendo la forma fondamentale Φ tra i gradi di libertà a disposizione.

Con queste premesse, utilizziamo ora le equazioni (2.2), (2.5b), (2.9) per stabilire il seguente

Lemma 3.1. *Ambedue le lagrangiane*

$$L_1(\Phi, \nabla) = g^{jk}(R_{jk} - \delta^{rs}_{jp} N^p{}_{rq} N^q{}_{sk}) , \tag{3.2}$$

$$L_2(\Phi, \nabla) = g^{jk}(R_{jk} + T^p{}_{pr} T_{jk}{}^r + \tfrac{1}{2} T^p{}_{rj} T^r{}_{pk} + \tfrac{1}{4} T_r{}^p{}_j T^r{}_{pk} - \nabla_j T^p{}_{pk} + \nabla_p T_j{}^p{}_k - \delta^{rs}_{jp} Q^p{}_{rq} Q^q{}_{sk}) \tag{3.3}$$

sono equivalenti alla lagrangiana di Einstein $L_E(\Phi) = g^{jk}\hat{R}_{jk}$. In particolare, esse sono quindi ∇-equivalenti alla lagrangiana identicamente nulla.

Dimostrazione. Introdotte le 2-forme di curvatura $\varrho^i{}_j$, il tensore $R_{jk} \overset{\text{def}}{=} R^i{}_{jki}$ può essere scritto nella forma

$$R_{jk} = \langle \tilde{\partial}_j \wedge \tilde{\partial}_p | \varrho^p{}_k \rangle . \tag{3.4}$$

In particolare, se indichiamo con $\hat{\varrho}^i{}_j$ le 2-forme di curvatura Riemanniana, l'eq. (2.5b) e la seconda equazione strutturale (2.1b) porgono

$$\varrho^p{}_k = d\omega^p{}_k + \omega^p{}_q \wedge \omega^q{}_k = \hat{\varrho}^p{}_k + dN^p{}_k + \hat{\omega}^p{}_q \wedge N^q{}_k + N^p{}_q \wedge \hat{\omega}^q{}_k + N^p{}_q \wedge N^q{}_k ,$$

da cui, tenuto conto dell'eq. (2.2), con $\hat{T}^i{}_{jk} = 0$,

$$\varrho^p{}_k = \hat{\varrho}^p{}_k + (\hat{\nabla}_r N^p{}_{sk} + N^p{}_{rq} N^q{}_{sk})\,\omega^r \wedge \omega^s .$$

Sostituendo nell'eq. (3.4), e contraendo con g^{jk} si ottiene pertanto

$$g^{jk} R_{jk} = g^{jk}[\hat{R}_{jk} + \delta^{rs}_{jp}(\hat{\nabla}_r N^p{}_{sk} + N^p{}_{rq} N^q{}_{sk})] ,$$

da cui, utilizzando esplicitamente la definizione (3.2),

$$L_1(\Phi, \nabla) = g^{jk}\hat{R}_{jk} + \hat{\nabla}_j (N^s{}_s{}^j - N^j{}_s{}^s) \simeq g^{jk}\hat{R}_{jk} .$$

Ciò prova la prima affermazione del Lemma.

La seconda affermazione si prova in maniera analoga, partendo però dalla rappresentazione (2.9). Da questa, tenuto conto dell'equazione strutturale (2.1b) si deduce infatti

$$\varrho^p{}_k - dW^p{}_k - W^p{}_q \wedge \omega^q{}_k - \omega^p{}_q \wedge W^q{}_k + W^p{}_q \wedge W^q{}_k$$
$$= \hat{\varrho}^p{}_k + dQ^p{}_k + Q^p{}_q \wedge \hat{\omega}^q{}_k + \hat{\omega}^p{}_q \wedge Q^q{}_k + Q^p{}_q \wedge Q^q{}_k \,,$$

da cui, utilizzando nuovamente l'eq. (2.2),

$$\varrho^p{}_k - (\nabla_r W^p{}_{sk} + \tfrac{1}{2} W^p{}_{qk} T^q{}_{rs} - W^p{}_{rq} W^q{}_{sk})\omega^r \wedge \omega^s = \hat{\varrho}^p{}_k + (\hat{\nabla}_r Q^p{}_{sk} + Q^p{}_{rq} Q^q{}_{sk})\omega^r \wedge \omega^s \,.$$

Sostituendo nell'eq. (3.4), e contraendo con g^{jk}, si ottiene allora

$$g^{jk}[R_{jk} - \delta^{rs}_{jp}(\nabla_r W^p{}_{sk} + \tfrac{1}{2} W^p{}_{qk} T^q{}_{rs} - W^p{}_{rq} W^q{}_{sk} + Q^p{}_{rq} Q^q{}_{sk})]$$
$$= g^{jk}\hat{R}_{jk} + \delta^{rs}_{jp} \hat{\nabla}_r Q^p{}_{sk} = g^{jk}\hat{R}_{jk} + \hat{\nabla}_j (Q^s{}_s{}^j - Q^j{}_s{}^s) \,.$$

Infine, ricordando la definizione (2.8) delle componenti $W^i{}_{jk}$, è immediato verificare che il primo membro dell'espressione precedente coincide appunto con la lagrangiana (3.3).

Una delle utilizzazioni più immediate del Lemma 3.1 è la seguente: si supponga di voler studiare un problema variazionale del tipo

$$\delta \int g^{jk} R_{jk}\, dv = 0 \,, \tag{3.5a}$$

nelle incognite ∇, Φ. Allora, *per quanto concerne le variazioni rispetto a* ∇, l'eq. (3.5a) è equivalente a

$$\delta \int_D g^{jk} \delta^{rs}_{jp} N^p{}_{rq} N^q{}_{sk}\, dv = 0 \tag{3.5b}$$

nelle variabili $N^p{}_{rq}$. Ciò semplifica notevolmente lo studio del problema originario.

Una conseguenza ancor più significativa del Lemma 3.1 riguarda la lagrangiana (3.3). Utilizzando esplicitamente come variabili all'interno dello spazio $C(M)$ i campi $T^i{}_{jk}$, $Q^i{}_{jk}$, si hanno infatti le equazioni

$$\frac{\delta L_2}{\delta T^i{}_{jk}} = \frac{\delta L_2}{\delta Q^i{}_{jk}} = 0 \,,$$

in cui $\delta \ldots / \delta \ldots$ indica il simbolo di derivata variazionale.

Tenuto conto di questo fatto, si consideri ora la lagrangiana

$$L \overset{\text{def}}{=} L_2 + g^{jk}\delta^{rs}_{jp}Q^p{}_{rq}Q^q{}_{sk} \tag{3.6}$$

$$= g^{jk}[R_{jk} + T^p{}_{pr}T_{jk}{}^r + \tfrac{1}{2}T^p{}_{rj}T^r{}_{pk} + \tfrac{1}{4}T_r{}^p{}_jT^r{}_{pk} - \nabla_j T^p{}_{pk} + \nabla_p T_j{}^p{}_k]\,.$$

Quest'ultima differisce da L_2 per un termine che dipende solo dalle componenti $Q^i{}_{jk}$ e dalla metrica, ma *non* da $T^i{}_{jk}$. Pertanto, in base a quanto detto sopra, abbiamo ancora $\delta L/\delta T^i{}_{jk} = 0$. Inoltre, dall'eq. (3.6) stessa risulta immediatamente che — a metrica fissata — la variazione di L soddisfa

$$\delta L = g^{jk}\delta^{rs}_{jp}(\delta Q^p{}_{rq}Q^q{}_{sk} + Q^p{}_{rq}\delta Q^q{}_{sk}) = (g^{jk}\delta^{rs}_{jp}\,Q^q{}_{sk} - g^{jq}\delta^{rs}_{jk}\,Q^k{}_{sp})\,\delta Q^p{}_{rq}\,.$$

Pertanto, tenuto conto della simmetria di $\delta Q^p{}_{rq}$, la condizione $\delta L = 0$ richiede

$$Q^q{}_p{}^r + Q^r{}_p{}^q - \delta^r_p Q^q{}_j{}^j - \delta^q_p Q^r{}_j{}^j + Q^{rq}{}_p + Q^{qr}{}_p - 2Q^s{}_{sp}g^{rq} = 0\,. \tag{3.7}$$

Contraendo gli indici p e q, si desume facilmente $Q^{rj}{}_j = 0$. Abbassando tutti gli indici, la relazione (3.7) si riscrive pertanto

$$Q_{qpr} + Q_{rpq} = Q^j{}_{jp}g_{rq} \overset{\text{def}}{=} X_p g_{rq}\,.$$

Da questa, con semplici passaggi algebrici, si ottiene

$$2Q_{rpq} = X_p g_{rq} + X_q g_{rp} - X_r g_{pq}\,. \tag{3.8}$$

Saturando ora con g^{rp}, e utilizzando la definizione $X_p = Q^j{}_{jp}$ si ricava infine $2X_q = \delta^p_p X_q = nX_q$, con $n = \dim M$. Per $n \neq 2$, la relazione precedente comporta $X_q = 0$, e quindi anche (cfr. eq. (3.8)) $Q_{rpq} = 0$. Da ciò discende facilmente

Corollario 3.1. *Supposto esplicitamente* $\dim M \neq 2$, *si consideri l'integrale di azione basato sulla lagrangiana* (3.6), *vale a dire*

$$A(\Phi, \nabla) \tag{3.9}$$

$$= \int_D g^{jk}[R_{jk} + T^p{}_{pr}T_{jk}{}^r + \tfrac{1}{2}T^p{}_{rj}T^r{}_{pk} + \tfrac{1}{4}T_r{}^p{}_jT^r{}_{pk} - \nabla_j T^p{}_{pk} + \nabla_p T_j{}^p{}_k]\,dv\,.$$

Allora, il problema variazionale $\delta A = 0$ (*negli argomenti* Φ, ∇) *è matematicamente equivalente al sistema*

$$\text{(3.10a)}\quad \nabla\Phi = 0 \quad (\Leftrightarrow \nabla \in \mathscr{H})\,, \qquad \text{(3.10b)}\quad \delta\int_D g^{jk}\hat{R}_{jk}\,dv = 0\,,$$

in cui $g^{jk}\hat{R}_{jk}$ *indica la lagrangiana di Einstein* $L_E(\Phi)$ *già citata in precedenza.*

Dimostrazione. Come già osservato, nell'ipotesi dim $M \neq 2$, l'azzerarsi della variazione δA a metrica fissata richiede $Q^i{}_{jk} = 0 \Leftrightarrow \nabla\Phi = 0$ (cfr. eq. (2.4b)). Inoltre, una volta imposta la condizione $Q^i{}_{jk} = 0$ (ossia l'eq. (3.10a)), la lagrangiana L che compare nell'integrale di azione (3.9) è manifestamente identica alla lagrangiana $L_2(\Phi, \nabla) \simeq g^{jk}\hat{R}_{jk}$ definita dall'eq. (3.3). La classe di soluzioni del problema variazionale $\delta A = 0$ è pertanto identica alla classe di soluzioni del sistema (3.10a, b).

Dal punto di vista applicativo, un aspetto interessante del Corollario 3.1 consiste nel fatto che, ai fini della determinazione della forma fondamentale Φ, il problema variazionale $\delta A = 0$ basato sul funzionale (3.9) è matematicamente equivalente all'eq. (3.10b), e come tale coinvolge unicamente i gradi di libertà « metrici », prescindendo completamente dalla scelta della connessione affine ∇.

Egualmente significativo è il fatto che, per quanto concerne la caratterizzazione di ∇, la condizione $\delta A = 0$ seleziona automaticamente *l'intera classe* $\mathscr{H} \subset C(M)$ delle connessioni aventi carattere *metrico* rispetto alla forma fondamentale Φ (cfr. eq. (3.10a)), senza tuttavia stabilire alcun criterio di scelta ulteriore all'interno della classe medesima.

Più in generale, in luogo dell'intero spazio $C(M)$, si consideri ora un generico sottospazio $C' \subset C(M)$, ottenuto assoggettando la connessione affine ∇ ad un opportuno insieme di *vincoli a priori*, eventualmente (ma non necessariamente) dipendenti dalla scelta della forma fondamentale Φ. Circa la natura dei vincoli, ammettiamo esplicitamente che, introdotti i campi $Q^i{}_{jk}$ e $T^i{}_{jk}$ come variabili indipendenti su $C(M)$, il sottospazio C' sia completamente caratterizzato da un sistema di relazioni del tipo

$$T^i{}_{jk} = f^i{}_{jk}(Q^a{}_{bc}, \xi_1, \ldots, \xi_r, \Phi)\,, \tag{3.11}$$

in modo che *tutte* le componenti $Q^a{}_{bc}$, unitamente ad un altro eventuale insieme di campi $\xi_1(\cdot), \ldots, \xi_r(\cdot)$, possano essere assunte come variabili indipendenti su C'. Sussiste allora il seguente

Corollario 3.2. *Nelle stesse ipotesi del Corollario* 3.1, *si consideri nuovamente l'integrale di azione* (3.9), *in cui la scelta della coppia* (Φ, ∇) *è ora ristretta al sottospazio* $R(M) \times C'$. *Allora, ammessa vera l'esistenza di una rappresentazione del tipo* (3.11) *per il sottospazio* C', *il problema variazionale* $\delta A = 0$ *è matematicamente equivalente al sistema*

(3.12a) $\nabla\Phi = 0 \quad (\Leftrightarrow \nabla \in C' \cap \mathscr{H})\,,$ (3.12b) $\delta \int_D g^{jk}\hat{R}_{jk}\,\mathrm{d}v = 0\,.$

Dimostrazione. In virtù del Lemma 3.1, a metrica *fissata* la lagrangiana L_2 è a derivato variazionale identicamente nullo sull'intero spazio $C(M)$, e quindi, a fortiori, anche sul sottospazio C'. Unitamente all'eq. (3.11), ciò comporta in particolare $\delta L_2/\delta Q^a{}_{bc} = \delta L_2/\delta \xi_k = 0$. Utilizzando l'eq. (3.6), vediamo quindi che il valore della derivata variazionale $\delta L/\delta Q^a{}_{bc}$ non è minimamente alterato dal fatto che la scelta della connessione ∇ è ora ristretta al sottospazio C'. Il resto della dimostrazione è pertanto identico a quanto già visto a proposito del Corollario 3.1.

Il risultato provato nel Corollario 3.2 si riduce ovviamente a quello provato nel Corollario 3.1 ogniqualvolta si ponga $C' = C(M)$ (basta, a tal scopo, identificare i campi $\xi_1, \ldots, \xi_r$ con le componenti $T^i{}_{jk}$ stesse). In tutta generalità vediamo quindi che il problema variazionale $\delta A = 0$ basato sull'integrale di azione (3.9) ha la prerogativa di non porre *alcuna restrizione* sulle quantità $\xi_1, \ldots, \xi_r$, e di essere al tempo stesso capace di selezionare tutte e sole le connessioni *metriche* esistenti all'interno della classe C', nonchè tutte e sole le metriche compatibili con l'eq. (3.12b). In questo senso, il Corollario 3.2 fornisce una notevole generalizzazione del risultato di Palatini [4], secondo il programma indicato nell'Introduzione.

A complemento di quanto detto, vediamo infine come i vari risultati « classici » si inquadrino nell'ambito sopra descritto. A tale proposito, restringiamo la nostra attenzione al caso in cui la caratterizzazione (3.11) del sottospazio C' assuma la forma $T^i{}_{jk} = 0$. Sotto tale ipotesi, l'integrale di azione (3.9), ristretto al sottospazio $R(M) \times C'$ si semplifica in

$$A(\Phi, \nabla) = \int_D g^{jk} R_{jk}\, dv = \int_D g^{jk} R_{jk} \sqrt{|g|}\, \omega_0 \wedge \ldots \wedge \omega^n . \tag{3.13}$$

Dal Corollario 3.2 discende allora elementarmente

Teorema 3.1 (Palatini). *Ammesso il vincolo a priori* $T^i{}_{jk} = 0$, *il problema variazionale* $\delta A = 0$ *basato sul funzionale* (3.13) *è matematicamente equivalente al sistema*

$$\nabla = \hat{\nabla} , \tag{3.14a}$$

$$\hat{R}_{jk} - \tfrac{1}{2} \hat{R} g_{jk} = 0 . \tag{3.14b}$$

Dimostrazione. L'eq. (3.14a) discende immediatamente dalla (3.12a) osservando che, per definizione, la connessione Riemanniana $\hat{\nabla}$ costituisce l'unica connessione metrica compatibile col vincolo $T^i{}_{jk} = 0$ (ossia, l'unica connessione metrica presente all'interno della classe C'). La rimanente equazione (3.14b) si ottiene facilmente per computo diretto, variando il funzionale (3.13) rispetto alle componenti g^{jk}, e tenendo invece fissa la connessione affine ∇ (e quindi, anche le componenti R_{jk}). L'annullarsi della variazione δA richiede allora

$$\int_D R_{jk} (\delta g^{jk} + g^{jk} \delta \log \sqrt{|g|}) \sqrt{|g|}\, \omega_0 \wedge \ldots \wedge \omega^n = 0 . \tag{3.15}$$

D'altra parte, indicato con H_{jk} il cofattore di g^{jk} nella matrice $\|g^{jk}\|$, un semplice calcolo porge

$$\delta \log \sqrt{|g|} = \tfrac{1}{2}\delta \log |g| = -\tfrac{1}{2}\delta \log |g^{-1}| = -\frac{1}{2g^{-1}}\,\delta g^{jk} H_{jk} = -\tfrac{1}{2} g_{jk}\delta g^{jk} .$$

Pertanto, riordinando i termini, e ricordando che, nell'ipotesi $T^i{}_{jk} = 0$ il tensore R_{jk} è simmetrico, l'eq. (3.15) implica $R_{jk} - \frac{1}{2}Rg_{jk} = 0$, la quale, unitamente alla condizione $\nabla = \hat{\nabla}$, è matematicamente equivalente all'eq. (3.14b).

Corollario 3.3. *Si consideri il funzionale* $I(\Phi) = \int_D g^{jk}\hat{R}_{jk}\,\mathrm{d}v$. *Allora, il problema variazionale* $\delta I = 0$ *è matematicamente equivalente all'eq.* (3.14b).

La dimostrazione segue elementarmente dal fatto che il problema variazionale $\delta I = 0$ è identico al problema $\delta A = 0$ basato sul funzionale (3.13), in cui si assuma l'eq. (3.14a) come vincolo a priori.

Nota 3.1. Anche se non strettamente connesso col tipo di problematica indicato nell'Introduzione, per completezza proviamo il seguente

Teorema 3.2. *Supposto esplicitamente* $\dim M > 2$, *si consideri il funzionale*

$$J(\Phi, \nabla) = \int_D g^{jk}(R_{jk} + T^p{}_{pr}T_{jk}{}^r)\,\mathrm{d}v \overset{\mathrm{def}}{=} \int_D \Lambda(\Phi, \nabla)\,\mathrm{d}v , \tag{3.16}$$

in cui ∇ *indica ora una connessione affine arbitraria (ossia non soggetta ad alcun vincolo a priori). Allora, la condizione* $\delta J = 0$ *è ancora equivalente al sistema* (3.14a, b).

Dimostrazione. In virtù di quanto già stabilito nel Teorema 3.1, tutto si riduce a provare che la condizione $\delta J = 0$ *implica* $T^i{}_{jk} = 0$. A questo proposito, per confronto con le equazioni (2.6a), (3.2), riscriviamo la lagrangiana Λ coinvolta nell'eq. (3.16) nella forma

$$\begin{aligned} \Lambda &= L_1 + g^{jk}[\delta^{rs}_{jp} N^p{}_{rq} N^q{}_{sk} + \delta^p_q (N^q{}_{pr} - N^q{}_{rp})(N_{jk}{}^r - N_j{}^r{}_k)] \\ &= L_1 + g^{jk}[\delta^{rs}_{jp} N^p{}_{rq} N^q{}_{sk} + \delta^p_q g_{js} g^{rm} (N^q{}_{pr} - N^q{}_{rp})(N^s{}_{km} - N^s{}_{mk})] . \end{aligned}$$

In virtù del Lemma 3.1 si ha allora

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Lambda}{\delta N^a{}_{bc}} &= g^{jk}[\delta^{rs}_{jp}(\delta^p_a \delta^b_r \delta^c_q N^q{}_{sk} + \delta^q_a \delta^b_s \delta^c_k N^p{}_{rq}) + \delta^p_q g_{js} g^{rm} (\delta^q_a \delta^{bc}_{pr} T^s{}_{km} \\ &\quad + \delta^s_a \delta^{bc}_{km} T^q{}_{pr})] = N^c{}_a{}^b - N^c{}_j{}^j \delta^b_a + N^{bc}{}_a - g^{bc} N^p{}_{pa} - 4T^j{}_j{}^{[b}\delta^{c]}_a . \end{aligned}$$

Si consideri ora l'equazione $\delta\Lambda/\delta N^a{}_{bc} = 0$. Contraendo c con a, questa implica

$$-2\delta^a_a T^j{}_j{}^b + 2T^j{}_j{}^b = -2(n-1)T^j{}_j{}^b = 0 \Rightarrow T^j{}_j{}^b = 0 \, .$$

Abbassando tutti gli indici, l'equazione originaria si riduce pertanto a

$$N_{cab} + N_{bca} = N_{cj}{}^j g_{ab} + N^j{}_{ja} g_{bc} \stackrel{\text{def}}{=} X_c g_{ab} + Y_a g_{bc} \, ,$$

da cui, con semplici passaggi algebrici

$$2N_{cab} = g_{ab}(X_c - Y_c) + g_{bc}(X_a + Y_a) + g_{ac}(Y_b - X_b) \, .$$

Contraendo a con c, ed utilizzando esplicitamente l'ipotesi $n > 2$ e la definizione $N^j{}_{ja} = Y_a$, l'espressione precedente comporta

$$2Y_b = X_b - Y_b + X_b + Y_b + n(Y_b - X_b) \Rightarrow (n-2)(Y_b - X_b) = 0 \Rightarrow X_b = Y_b.$$

Pertanto

$$N_{cab} = g_{bc} X_a \Rightarrow N^c{}_{ab} = \delta^c_b X_a \Rightarrow T^c{}_{ab} = \delta^c_b X_a - \delta^c_a X_b \, .$$

Questa, unitamente alla condizione $T^j{}_j{}^b = 0$ precedentemente provata, implica

$$X_b - nX_b = 0 \Rightarrow X_b = 0 \Rightarrow T^c{}_{ab} = N^c{}_{ab} = 0 \, .$$

Bibliografia

[1] A. Einstein, Preuss. Akad. Wiss., Sitzber, Berlin 1916, 1111.

[2] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, London 1962.

[3] D. Hilbert, Gott. Nachr. Math. Phys. (1915), 395.

[4] A. Palatini, Rend. Circ. Mat. Palermo **43** (1919), 203.

Abstract

A variational principle is proposed, which on one hand implies Einstein's gravitational equations in vacuo, and on the other hand, singles out the whole class of metric connections. For the sake of generality, the argument is stated for an arbitrary Riemannian manifold, of dimension > 2. The classical result of Palatini, concerning the variations of the Hilbert functional $\int_D g^{jk} R_{jk} \sqrt{|g|}\, \mathrm{d}x^0 \ldots \mathrm{d}x^3$ is derived as a special case of the general procedure.

***