Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 487-501

G. AMENDOLA e T. MANACORDA (*)

Piccole deformazioni termoelastiche sovrapposte ad una deformazione termostatica finita (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. - Introduzione

In molte applicazioni risulta particolarmente importante lo studio della sovrapposizione di una deformazione infinitesima ad una deformazione finita in corpi elastici. Numerosi problemi elastici sono stati infatti studiati per corpi sottoposti a sforzi iniziali, si veda a tale scopo la trattazione di Truesdell e Noll in [**9**]. Gli effetti termici, generalmente trascurati, sono stati considerati solo in pochi casi; ad esempio in [**3**] per lo studio di problemi termostatici in presenza di una deformazione finita o per la propagazione di onde termoelastiche in particolari condizioni quale quella di una temperatura uniforme preesistente in un solido uniformemente deformato [**4**].

Una teoria generale per lo studio di piccole deformazioni termoelastiche che si sovrappongono ad una deformazione finita è stata sviluppata da Green in [**5**].

Una teoria simile viene da noi sviluppata in questo primo lavoro per i solidi termoelastici incomprimibili di Signorini [**7**], rimandando le applicazioni a memorie successive. Si mettono tra l'altro in risalto gli effetti di una equazione costitutiva per il flusso di calore abbastanza generale, cosa che in [**5**] non viene fatta salvo che per un caso particolare, per il quale vale la relazione classica di

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematiche Applicate « U. Dini », Facoltà di Ingegneria, Università, Pisa, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 21-XII-1978.

Fourier. Si ottengono anche le equazioni che regolano il problema in esame per i solidi comprimibili, nella sez. **8**, allo scopo di mettere in evidenza le modificazioni dell'equazione del calore in presenza dell'equazione costitutiva introdotta per il flusso del calore.

Dopo le necessarie premesse (sez. **2**), nella sez. **3** si introducono le equazioni costitutive e si considerano le conseguenze del secondo principio della termodinamica e del principio di obiettività su di esse, ricavando così le relazioni fondamentali dei solidi termoelastici incomprimibili in esame. Si introduce quindi, nella sez. **4**, il problema della sovrapposizione di una trasformazione termoelastica infinitesima ad una trasformazione termoelastica finita e statica. La linearizzazione dell'equazione di moto, dell'equazione del calore e le conseguenze della presenza del vincolo termodinamico sono prese in considerazione separatamente nelle tre sezioni successive.

2. - Premesse

Rispetto ad un prefissato sistema di coordinate cartesiane ortogonali siano $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{x}$ le posizioni assunte dalla medesima particella di un solido termoelastico $\mathscr{C}$ rispettivamente in una configurazione di riferimento C_0 ed in quella attuale C. Supponiamo che in C_0 la densità materiale ϱ_0 e la temperatura ϑ_0 siano uniformi.

Il gradiente di deformazione è definito mediante

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}_X \boldsymbol{x} . \tag{2.1}$$

Ammettiamo ora con Signorini [**7**] che

$$J = \det \boldsymbol{F} \tag{2.2}$$

sia una funzione nota della temperatura attuale ϑ oltre che di ϑ_0 ed $\boldsymbol{X}$, e cioè che esista il vincolo termodinamico espresso dalla seguente relazione

$$J = f(\vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}) , \tag{2.3}$$

tale che

$$f(\vartheta_0; \vartheta_0, \boldsymbol{X}) = 1 . \tag{2.4}$$

Ciò premesso, introduciamo l'equazione di moto [**10**]

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{T} + \varrho \boldsymbol{b} = \varrho \ddot{\boldsymbol{x}} , \tag{2.5}$$

dove $\boldsymbol{T}$ è il tensore degli sforzi di Cauchy, ϱ è la densità materiale in C e $\boldsymbol{b}$ dà le forze di massa. È ben noto che la (2.5) se riferita a C_0 assume la forma [10]

$$\operatorname{div}_X \underset{K}{\boldsymbol{T}} + \varrho_0 \boldsymbol{b} = \varrho_0 \ddot{\boldsymbol{x}}\,, \tag{2.6}$$

dove $\underset{K}{\boldsymbol{T}}$ è il primo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff, legato a $\boldsymbol{T}$ ed al secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff $\underset{O}{\boldsymbol{T}}$ dalle seguenti relazioni [9]

$$\underset{K}{\boldsymbol{T}} = J\boldsymbol{T}(\boldsymbol{F}^T)^{-1} = \boldsymbol{F}\underset{O}{\boldsymbol{T}}\,. \tag{2.7}$$

Ricordiamo inoltre che $\boldsymbol{T}$ e $\underset{O}{\boldsymbol{T}}$ sono due tensori simmetrici, mentre per $\underset{K}{\boldsymbol{T}}$ si ha che

$$\underset{K}{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\underset{K}{\boldsymbol{T}}^T\,. \tag{2.8}$$

Il primo ed il secondo principio della termodinamica forniscono le seguenti formulazioni locali [8]

$$\varrho\dot{\varepsilon} = w + \operatorname{div}_x \boldsymbol{q} + \varrho s \tag{2.9}$$

e

$$\varrho\vartheta\dot{\eta} \geqslant \operatorname{div}_x \boldsymbol{q} + \varrho s - \frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{g}}{\vartheta}\,, \tag{2.10}$$

dove ε, $\boldsymbol{q}$, s, η sono rispettivamente l'energia interna, il flusso di calore, le sorgenti termiche e l'entropia,

$$\boldsymbol{g} = \operatorname{grad}_x \vartheta \tag{2.11}$$

ed infine w è la potenza degli sforzi data da [8]

$$w = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{F}^{-1})^T\cdot\dot{\boldsymbol{F}} \equiv \operatorname{tr}(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{F}})\,. \tag{2.12}$$

Se si introduce l'energia libera

$$\psi = \varepsilon - \eta\theta\,, \tag{2.13}$$

la (2.10), tenendo conto anche della (2.9), assume la forma

$$\varrho(\dot{\psi} + \eta\dot{\vartheta}) - w - \frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{g}}{\vartheta} \leqslant 0\,. \tag{2.14}$$

Come per la (2.5), è possibile ottenere una formulazione del primo e secondo principio della termodinamica con riferimento a C_0 (v. [1]); si ha precisamente per la (2.9)

$$\varrho_0 \dot{\varepsilon} = w_0 + \operatorname{div}_X \boldsymbol{Q} + \varrho_0 s \tag{2.15}$$

e per la (2.14)

$$\varrho_0(\dot{\psi} + \eta\dot{\vartheta}) - w_0 - \frac{\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{G}}{\vartheta} \leqslant 0\,, \tag{2.16}$$

avendo posto

$$\boldsymbol{G} = \operatorname{grad}_X \vartheta\,, \qquad \boldsymbol{Q} = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{q}\,, \tag{2.17}$$

ed essendo

$$w_0 = \underset{o}{\boldsymbol{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}\,, \tag{2.18}$$

se si introduce il tensore di deformazione $\boldsymbol{E}$ in base alle seguenti relazioni

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{1} + 2\boldsymbol{E}\,. \tag{2.19}$$

Ricordiamo infine che per il teorema di decomposizione polare si ha

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}\,, \tag{2.20}$$

dove $\boldsymbol{R}$ è un tensore ortogonale proprio ed $\boldsymbol{U}$ è un tensore simmetrico definito positivo; dalla $(2.19)_1$ segue in particolare che

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2\,. \tag{2.21}$$

3. - Equazioni costitutive

Il solido termoelastico in esame sia definito mediante le seguenti equazioni costitutive

$$\begin{aligned} \psi &= \hat{\psi}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{g}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X})\,, \qquad \eta = \hat{\eta}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{g}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X})\,, \\ \boldsymbol{T} &= \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{g}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X})\,, \qquad \boldsymbol{q} = \hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{g}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X})\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

mediante le quali è possibile conoscere i valori dell'energia libera, dell'entropia, del tensore degli sforzi di Cauchy e del flusso di calore in ogni punto del corpo quando, assegnata una certa configurazione di riferimento, siano noti il gradiente di deformazione, il gradiente di temperatura e la temperatura in ogni punto del corpo, qualunque sia il moto e l'istante considerato.

Non ci soffermiamo sul procedimento che porta ad eliminare la dipendenza da $\boldsymbol{g}$ nelle equazioni costitutive $(3.1)_{1,2,3}$. Tale procedimento, che sarà preso in considerazione ugualmente nel seguito, è basato sul fatto che le (3.1) devono verificare in particolare il secondo principio della termodinamica, espresso dalla (2.14) per ogni trasformazione termoelastica compatibile con le equazioni termodinamiche (2.5) e (2.9); ne segue che le (3.1) vanno sostituite dalle seguenti espressioni

$$\psi = \hat{\psi}(\boldsymbol{F}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}), \qquad \boldsymbol{q} = \hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{g}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}), \tag{3.2}$$

alle quali vanno aggiunte le relazioni che legano η e $\boldsymbol{T}$ a ψ e alla funzione f della (2.3) ed infine la condizione

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{g} \geqslant 0 . \tag{3.3}$$

Le equazioni costitutive (3.2) soddisfano il principio di obiettività se e solo se per ogni tensore ortogonale $\boldsymbol{Q}$ si ha

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\boldsymbol{F}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}) &= \hat{\psi}(\boldsymbol{QF}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}), \\ \boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{g}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}) &= \hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{QF}, \boldsymbol{Qg}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}) . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Se si assume, in particolare, in base alla decomposizione polare (2.20), $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}^T$ le (3.2) diventano

$$\psi = \hat{\psi}(\boldsymbol{U}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}), \qquad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{g}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}), \tag{3.5}$$

in base alle quali è possibile assumere $\big($v. (2.21), $(2.19)_2\big)$

$$\psi = \tilde{\psi}(\boldsymbol{E}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}), \qquad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}\tilde{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{G}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}), \tag{3.6}$$

essendo $\big($v. $(2.17)_1$, (2.11)$\big)$

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{g} . \tag{3.7}$$

Per ricavare le relazioni che danno $\boldsymbol{T}$ ed η dobbiamo procedere come abbiamo già accennato per ottenere, in particolare, la $(3.2)_1$. A tale scopo deriviamo rispetto al tempo la (2.3), dopo aver elevato ambo i membri al quadrato; si ottiene

$$\boldsymbol{\Gamma}\cdot\dot{\boldsymbol{E}} - \partial_\vartheta f \dot{\vartheta} = 0\,, \tag{3.8}$$

dove (v. $(2.19)_1$)

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{1}{J}\,\partial_C J^2 = \frac{1}{J}\,\partial_C\, III_C = \|\Gamma_{HK}\| = \|\,\frac{1}{2J}\,(\frac{\partial\, III_C}{\partial C_{HK}} + \frac{\partial\, III_C}{\partial C_{KH}})\,\|\,. \tag{3.9}$$

Sottraendo ora la (3.8), dopo averla moltiplicata per un parametro p, dalla (2.16) e tenendo conto della $(3.6)_1$, si ricava la seguente relazione

$$(\varrho_0 \partial_E \tilde{\psi} - \underset{o}{\boldsymbol{T}} - p\boldsymbol{\Gamma})\cdot\dot{\boldsymbol{E}} + \varrho_0\,(\partial_\vartheta \tilde{\psi} + \eta + \frac{p}{\varrho_0}\,\partial_\vartheta f)\,\dot{\vartheta} - \frac{\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{G}}{\vartheta} \leqslant 0\,. \tag{3.10}$$

Questa sussiste per ogni $\dot{\boldsymbol{E}}$ e $\dot{\vartheta}$ se e solo se (v. [**6**])

$$\underset{o}{\boldsymbol{T}} = \varrho_0 \boldsymbol{\Psi} - pJ\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{F}^T)^{-1}\,, \qquad \eta = -\,\psi_\vartheta - \frac{p}{\varrho_0}\,f_\vartheta \tag{3.11}$$

e

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{G} \geqslant 0\,, \tag{3.12}$$

essendo, come si può facilmente verificare in base alla (3.9), $\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Gamma}^T = J\boldsymbol{1}$ e quindi

$$\boldsymbol{\Gamma} = J\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{F}^T)^{-1}\,, \tag{3.13}$$

ed avendo posto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi} &= \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{E}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}) = \partial_E\, \tilde{\psi}(\boldsymbol{E}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X})\,, \\ \psi_\vartheta &= \psi_\vartheta(\boldsymbol{E}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}) = \partial_\vartheta\, \tilde{\psi}(\boldsymbol{E}, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X})\,, \\ f_\vartheta &= f_\vartheta(\vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}) = \partial_\vartheta f(\vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X})\,. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Tenendo presente che si ha anche

$$\varrho J = \varrho_0\,, \tag{3.15}$$

dalle (2.7) e $(3.11)_1$ si ricavano le seguenti espressioni

$$\underset{K}{\boldsymbol{T}} = \varrho_0 \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Psi} - pJ(\boldsymbol{F}^T)^{-1}\,, \qquad \boldsymbol{T} = \varrho \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{F}^T - p\boldsymbol{1}\,. \tag{3.16}$$

4. - Posizione del problema

Oltre alla configurazione di riferimento C_0, fissiamo una configurazione C_1 di $\mathscr{C}$ ottenuta da C_0 con una trasformazione termoelastica finita e supponiamo di imporre una ulteriore trasformazione termoelastica infinitesima, che porti $\mathscr{C}$ da C_1 in una nuova configurazione C; C_0 e C_1 sono supposte di equilibrio per $\mathscr{C}$. Se indichiamo con $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}^*$ le posizioni assunte rispettivamente in C_1 e C dalla particella che in C_0 occupa il posto $\boldsymbol{X}$, risultano definiti i seguenti gradienti di deformazione

$$(4.1)\qquad \boldsymbol{F}_0 = \mathrm{grad}_X \boldsymbol{x}\,; \qquad \boldsymbol{F} = \mathrm{grad}_x \boldsymbol{x}^*\,, \qquad \boldsymbol{F}^* = \mathrm{grad}_X \boldsymbol{x}^*$$

relativi alle tre trasformazioni che portano $\mathscr{C}$ rispettivamente da C_0 a C_1, da C_1 a C e da C_0 a C.

Si ha ovviamente

$$(4.2)\qquad \boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}_0 = (1 + \boldsymbol{H})\boldsymbol{F}_0\,,$$

dove

$$(4.3)\qquad \boldsymbol{H} = \mathrm{grad}_x \boldsymbol{u} \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}\,.$$

Le varie grandezze se riferite a C_1 saranno indicate con le corrispondenti lettere con l'indice 1, in assenza del quale le grandezze saranno riferite a C. Poniamo anche con ovvio significato (v. (3.15))

$$(4.4)\qquad J_0 = \frac{\varrho_0}{\varrho_1}\,, \qquad J = \frac{\varrho_1}{\varrho}\,, \qquad J^* = \frac{\varrho_0}{\varrho}\,.$$

Indichiamo inoltre con $\underset{K}{\boldsymbol{T}_1}$ e $\underset{K}{\boldsymbol{T}^*}$ il primo tensore di Piola-Kirchhoff riferito alle trasformazioni che portano $\mathscr{C}$ da C_1 a C e da C_0 a C rispettivamente; una notazione simile sarà usata per il secondo tensore di Piola-Kirchhoff.

Ciò premesso, supponiamo che lo spostamento $\boldsymbol{u}$ relativo alla trasformazione infinitesima (v. $(4.3)_2$) e la temperatura ϑ in C siano funzioni analitiche di un parametro reale ξ in modo da poter scrivere i seguenti sviluppi in serie

$$(4.5)\qquad \boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}\xi + \boldsymbol{O}(\xi^2) \qquad \text{con} \qquad \bar{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}\xi}\right)_{\xi=0}$$

e

$$(4.6)\qquad \vartheta = \vartheta_1 + \bar{\vartheta}\xi + O(\xi^2) \qquad \text{con} \qquad \bar{\vartheta} = \left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}\right)_{\xi=0}.$$

Dalle $(4.2)_2$ e (4.3) segue che

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{H}} = \mathrm{grad}_x \overline{\boldsymbol{u}}\,, \tag{4.7}$$

da cui, tenendo presente l'identità $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{1}$ e l'analoga per $\boldsymbol{F}^T$, si ha

$$\overline{\boldsymbol{F}^{-1}} = -\overline{\boldsymbol{H}}\,, \qquad \overline{(\boldsymbol{F}^T)^{-1}} = -\overline{\boldsymbol{H}^T}\,. \tag{4.8}$$

È necessario per il seguito calcolare anche la linearizzazione del tensore di deformazione $\boldsymbol{E}^*$, che, in base alle (2.19) e (4.2), è dato dalla seguente espressione

$$\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E}_0 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{F}_0^T(\boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{H})\boldsymbol{F}_0 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{F}_0^T\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}_0\,, \tag{4.9}$$

dalla quale, linearizzando, si ha

$$\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E}_0 + \overline{\boldsymbol{E}}^*\xi + \boldsymbol{O}(\xi^2)\,, \tag{4.10}$$

dove

$$\overline{\boldsymbol{E}^*} = \boldsymbol{F}_0^T\tilde{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{F}_0 \qquad \text{con} \qquad \tilde{\boldsymbol{E}} = \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{H}^T} + \overline{\boldsymbol{H}})\,. \tag{4.11}$$

In particolare, dalle $(2.19)_1$ e (2.21) segue che

$$\overline{\boldsymbol{U}} = \tilde{\boldsymbol{E}}\,, \tag{4.12}$$

da cui, in base alla (2.20), si ha anche

$$\overline{\boldsymbol{H}} = \overline{\boldsymbol{R}} + \tilde{\boldsymbol{E}}\,. \tag{4.13}$$

Osserviamo infine che

$$J = 1 + \mathrm{tr}\,\tilde{\boldsymbol{E}}\xi + O(\xi^2) \tag{4.14}$$

con

$$\mathrm{tr}\,\tilde{\boldsymbol{E}} = \mathrm{div}_x \overline{\boldsymbol{u}}\,. \tag{4.15}$$

Resta ormai da prendere in esame l'equazione di moto, l'equazione del calore e l'equazione del vincolo nella configurazione C, cosa che faremo separatamente nel seguito.

5. - Equazione di moto

Conviene scrivere l'equazione di moto in C (v. (2.5)) con riferimento alla configurazione C_1, considerando cioè l'analoga della (2.6) e precisamente

$$\operatorname{div}_x \underset{K}{\boldsymbol{T}_1} + \varrho_1 \boldsymbol{b} = \varrho_1 \ddot{\boldsymbol{x}}^* , \tag{5.1}$$

ottenuta con lo stesso procedimento che porta a scrivere la (2.6) prendendo ora in esame le due configurazioni C_1, come configurazione di riferimento, e C, quella attuale; in questa equazione è

$$\underset{K}{\boldsymbol{T}_1} = J\boldsymbol{T}(\boldsymbol{F}^T)^{-1} . \tag{5.2}$$

Per calcolare questa espressione, osserviamo che, tenendo presente la trasformazione che da C_0 porta a C, in base alle (2.7) si ha

$$\boldsymbol{T} = (J^*)^{-1}\underset{K}{\boldsymbol{T}^*}(\boldsymbol{F}^*)^T = (J^*)^{-1}\boldsymbol{F}^*\underset{O}{\boldsymbol{T}^*}(\boldsymbol{F}^*)^T \tag{5.3}$$

con (v. $(3.11)_1$, $(3.14)_1$)

$$\underset{O}{\boldsymbol{T}^*} = \varrho_0 \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{E}^*, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}) - pJ^*(\boldsymbol{F}^*)^{-1}\big((\boldsymbol{F}^*)^T\big)^{-1} , \tag{5.4}$$

per cui la (5.2) diventa (v. (4.2), (4.4))

$$\underset{K}{\boldsymbol{T}_1} = \varrho_1 \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}_0 \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{E}^*, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X})\boldsymbol{F}_0^T - \frac{\varrho_1}{\varrho} p(\boldsymbol{F}^T)^{-1} . \tag{5.5}$$

Da questa, osservando che, in base alla $(3.16)_2$, è

$$\boldsymbol{T}_1 = \varrho_1 \boldsymbol{F}_0 \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{E}_0, \vartheta_1; \vartheta_0, \boldsymbol{X})\boldsymbol{F}_0^T - p_1 \boldsymbol{1} , \tag{5.6}$$

si ottiene anche che

$$\underset{K}{\boldsymbol{T}_1} = \boldsymbol{T}_1 + \underset{K}{\overline{\boldsymbol{T}}_1}\xi + \boldsymbol{O}(\xi^2) , \tag{5.7}$$

dove

$$\underset{K}{\overline{\boldsymbol{T}}_1} = \overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{T}_1 + \varrho_1 \boldsymbol{F}_0\{\boldsymbol{L}[\boldsymbol{F}_0^T \tilde{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{F}_0] + \alpha\overline{\vartheta}\}\boldsymbol{F}_0^T - (p_1 \operatorname{tr} \tilde{\boldsymbol{E}} + \overline{p})\boldsymbol{1} + 2p_1 \tilde{\boldsymbol{E}}, \tag{5.8}$$

essendo

$$L = [\partial_{E^*}\Psi(E^*, \vartheta; \vartheta_0, X)]_{\xi=0}\,; \qquad \alpha = [\partial_\vartheta \Psi(E^*, \vartheta; \vartheta_0, X)]_{\xi=0} \tag{5.9}$$

due tensori del 4° e 2° ordine rispettivamente.

Ricordando la (4.13), nella (5.8) si può far figurare $\bar{R}$ ottenendo

$$\underset{K}{\bar{T}_1} = \bar{R}T_1 + \tilde{E}(T_1 + p_1 \mathbf{1}) + p_1(\tilde{E} - \operatorname{tr}\tilde{E}\mathbf{1}) - \bar{p}\mathbf{1} + \varrho_1 F_0\{L[F_0^T \tilde{E} F_0] + \alpha\bar{\vartheta}\}F_0^T\,. \tag{5.10}$$

Vogliamo osservare ancora che, tenendo presente la (5.8), è facile controllare che

$$\underset{K}{\bar{T}_1} - \underset{K}{\overline{T_1^T}} = \bar{H}T_1 - T_1\overline{H^T}; \tag{5.10'}$$

tale relazione si ricava anche linearizzando la relazione

$$\underset{K}{T_1} F^T = F \underset{K}{T_1^T}\,, \tag{5.11}$$

che sussiste, in virtù della (2.8), per la trasformazione che porta $\mathscr{C}$ da C_1 a C.

Supponiamo infine che anche le forze di massa si possano esprimere nel modo seguente

$$b = b_1 + \bar{b}\xi + O(\xi^2) \tag{5.12}$$

ed inoltre che per la configurazione C_1 in equilibrio si abbia

$$\varrho_1 \ddot{x} = \operatorname{div}_x T_1 + \varrho_1 b_1 = \mathbf{0}\,. \tag{5.13}$$

L'equazione di moto (5.1), quando si consideri solo la prima approssimazione delle varie grandezze, assume in definitiva la forma seguente

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x[\bar{H}T_1 + p_1(2\tilde{E} - \operatorname{tr}\tilde{E}\mathbf{1})] - \operatorname{grad}_x \bar{p} + \operatorname{div}_x\{\varrho_1 F_0 L[F_0^T \tilde{E} F_0] F_0^T\} \\ + \operatorname{div}_x(\varrho_1 F_0 \alpha F_0^T \bar{\vartheta}) + \varrho_1 \bar{b} = \varrho_1 \ddot{\bar{u}}\,. \end{aligned} \tag{5.14}$$

6. - Equazione del calore

Per il solido termoelastico in esame, il verificarsi delle (3.11) permette di ottenere dalla (2.16) (oppure equivalentemente dalla (2.10)), oltre alla (3.12), l'equazione del calore (v. [**1**]). Come già fatto per l'equazione di moto (5.1), anche ora conviene scrivere tale equazione in C con riferimento alla configurazione C_1 in equilibrio; è facile controllare che si ottiene la seguente relazione

$$\varrho_1 \vartheta \dot{\eta} = \operatorname{div}_x (J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{q}) + \varrho_1 s \,. \tag{6.1}$$

In essa ϑ è data dalla (4.6), s da una relazione analoga che scriviamo

$$s = s_1 + \bar{s}\xi + O(\xi^2); \tag{6.2}$$

inoltre, ricordando la $(3.6)_2$, si ha

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}^* \tilde{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{E}^*, \operatorname{grad}_X \vartheta, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}) \,, \tag{6.3}$$

di modo che si ottiene (v. (4.2), $(4.4)_2$) in definitiva

$$\boldsymbol{Q}_1 = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{q} = \frac{\varrho_1}{\varrho} \boldsymbol{F}_0 \tilde{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{E}^*, \operatorname{grad}_X \vartheta, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}) \,. \tag{6.4}$$

Resta da calcolare l'espressione dell'entropia, che, in base alla $(3.11)_2$, è data da

$$\eta = -\psi_\vartheta(\boldsymbol{E}^*, \vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}) - \frac{p}{\varrho_0} f_\vartheta(\vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}) \,. \tag{6.5}$$

Da questa segue nel solito modo

$$\eta = \eta_1 + \bar{\eta}\xi + O(\xi^2) \,, \tag{6.6}$$

dove

$$\eta_1 = -\psi_\vartheta(\boldsymbol{E}_0, \vartheta_1; \vartheta_0, \boldsymbol{X}) - \frac{p_1}{\varrho_0} (f_\vartheta)_{\xi=0} \tag{6.7}$$

e

$$\bar{\eta} = -\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{F}_0^T \tilde{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{F}_0 - \frac{(f_\vartheta)_{\xi=0}}{\varrho_0} \bar{p} - [\beta + \frac{(\partial_\vartheta^2 f)_{\xi=0}}{\varrho_0} p_1] \bar{\vartheta} \,, \tag{6.8}$$

avendo posto

$$(f_\vartheta)_{\xi=0} = f_\vartheta(\vartheta_1;\, \vartheta_0, \boldsymbol{X})\,, \qquad (\partial^2_\vartheta f)_{\xi=0} = [\partial_\vartheta f_\vartheta(\vartheta;\, \vartheta_0, \boldsymbol{X})]_{\xi=0}\,,$$
$$\beta = [\partial_\vartheta \psi_\vartheta(\dot{\boldsymbol{E}}^*, \vartheta;\, \vartheta_0, \boldsymbol{X})]_{\xi=0}\,. \tag{6.9}$$

Infine, linearizzando l'ultima espressione nella (6.4), si ricava

$$J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_1 + \overline{\boldsymbol{Q}}_1\xi + \boldsymbol{O}(\xi^2)\,, \tag{6.10}$$

essendo

$$\overline{\boldsymbol{Q}}_1 = \operatorname{tr}\hat{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{K}\operatorname{grad}_X\bar{\vartheta} + \boldsymbol{\gamma}\bar{\vartheta}) \tag{6.11}$$

l'equazione costitutiva tra le linearizzazioni, con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &= [\partial_\vartheta \tilde{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{E}^*, \operatorname{grad}_X\vartheta, \vartheta;\, \vartheta_0, \boldsymbol{X})]_{\xi=0}\,, \\ \boldsymbol{K} &= [\partial_{\operatorname{grad}_X\vartheta}\, \tilde{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{E}^*, \operatorname{grad}_X\vartheta, \vartheta;\, \vartheta_0, \boldsymbol{X})]_{\xi=0} \end{aligned} \tag{6.12}$$

ed il vettore $\boldsymbol{h}$ ha per generica componente

$$h_i = \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial E^*_{jl}} + \frac{\partial}{\partial E^*_{lj}}\Big)\,\tilde{\boldsymbol{q}}_i(\boldsymbol{E}^*, \operatorname{grad}_X\vartheta, \vartheta;\, \vartheta_0, \boldsymbol{X})\Big]_{\xi=0} F_{0rj}\,\tilde{E}_{rs}F_{0sl}\,. \tag{6.13}$$

L'aver supposto che C_1 è una configurazione di equilibrio permette di scrivere che

$$\varrho_1\vartheta_1\dot{\eta}_1 = \operatorname{div}_x\boldsymbol{q}_1 + \varrho_1 s_1 = 0\,; \tag{6.14}$$

di conseguenza l'equazione del calore (6.1) diventa

$$-\varrho_1\vartheta_1\Big\{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{F}_0^T\dot{\hat{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{F}_0 + \frac{(f_\vartheta)_{\xi=0}}{\varrho_0}\dot{\bar{p}} + \Big[\beta + \frac{(\partial^2_\vartheta f)_{\xi=0}}{\varrho_0}p_1\Big]\dot{\bar{\vartheta}}\Big\}$$
$$= \operatorname{div}_x(\operatorname{tr}\tilde{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{q}_1) + \operatorname{div}_x[\boldsymbol{k}\operatorname{grad}_x\bar{\vartheta} + \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{\gamma}\bar{\vartheta})] + \varrho_1\bar{s}\,, \tag{6.15}$$

avendo posto

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{F}_0\boldsymbol{K}\boldsymbol{F}_0^T\,. \tag{6.16}$$

7. - Conseguenze del vincolo termodinamico

Dobbiamo infine prendere in esame l'equazione del vincolo espressa dalla relazione (2.3), la quale, con riferimento alla trasformazione che porta $\mathscr{C}$ da C_0 a C, dà

$$J^* = f(\vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}) . \tag{7.1}$$

In questa, ricordando le (4.2) o (4.4), è

$$J^* = J_0 J , \tag{7.2}$$

per cui, tenendo conto della (4.14), si ha

$$J^* = \frac{\varrho_0}{\varrho_1}[1 + \operatorname{tr}\tilde{\boldsymbol{E}}\xi + O(\xi^2)] . \tag{7.3}$$

Inoltre la linearizzazione del secondo membro della (7.1) porta alla relazione

$$f(\vartheta; \vartheta_0, \boldsymbol{X}) = f(\vartheta_1; \vartheta_0, \boldsymbol{X}) + (f_\vartheta)_{\xi=0}\bar{\vartheta}\xi + O(\xi^2) , \tag{7.4}$$

che, con la (7.3), fornisce

$$\operatorname{tr}\tilde{\boldsymbol{E}} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0}(f_\vartheta)_{\xi=0}\bar{\vartheta} . \tag{7.5}$$

Tale relazione va naturalmente associata alle due equazioni già determinate: l'equazione di moto (5.14) e quella del calore (6.15).

8. - Caso di solidi comprimibili

In questa ultima sezione vogliamo solo riportare le equazioni di moto e del calore per i solidi termoelastici caratterizzati dalle equazioni costitutive (3.6), alle quali si arriva, supponendo le (3.1), nel modo indicato.

Partendo sempre dalle equazioni (5.1) e (6.1) si ottengono due equazioni linearizzate notevolmente più semplici delle (5.14) e (6.15).

In particolare la (5.7) assume la forma

$$\underset{K}{\boldsymbol{T}_1} = \boldsymbol{T}_1 + \{\bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{T}_1 + \varrho_1\boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{L}[\boldsymbol{F}_0^T\tilde{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{F}_0] + \alpha\bar{\vartheta})\boldsymbol{F}_0^T\}\xi + \boldsymbol{O}(\xi^2) \tag{8.1}$$

con $\boldsymbol{L}$ ed $\boldsymbol{\alpha}$ espressi ancora dalle (5.9), per cui l'equazione di moto diventa

$$\mathrm{div}_x(\overline{\boldsymbol{H}\boldsymbol{T}}_1) + \mathrm{div}_x\{\varrho_1\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{L}[\boldsymbol{F}_0^T\tilde{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{F}_0]\boldsymbol{F}_0^T\} + \mathrm{div}_x(\varrho_1\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{F}_0^T\bar{\vartheta}) + \varrho_1\bar{\boldsymbol{b}} = \varrho_1\ddot{\bar{\boldsymbol{u}}}. \tag{8.2}$$

Analogamente si ricava per l'entropia la seguente espressione

$$\eta = \eta_1 - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{F}_0^T\tilde{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{F}_0 + \beta\bar{\vartheta})\xi + O(\xi^2) \tag{8.3}$$

con β espresso ancora dalla $(6.9)_3$; ne segue per l'equazione del calore la seguente relazione (v. (6.10), (6.11))

$$\begin{aligned} &-\varrho_1\vartheta_1(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{F}_0^T\dot{\tilde{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{F}_0 + \beta\dot{\bar{\vartheta}}) \\ &\qquad = \mathrm{div}_x(\mathrm{tr}\,\tilde{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{q}_1) + \mathrm{div}_x[\boldsymbol{k}\,\mathrm{grad}_x\bar{\vartheta} + \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{\gamma}\bar{\vartheta})] + \varrho_1\bar{s}, \end{aligned} \tag{8.4}$$

dove $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\gamma}$ conservano il significato della sez. **6**.

Ovviamente le ipotesi fatte per ricavare queste relazioni sono le stesse usate nelle sezioni precedenti; in particolare si è supposto ancora che C_1 sia una configurazione di equilibrio (v. (5.13), (6.14)) ottenuta con una trasformazione termoelastica finita dalla configurazione di riferimento C_0.

Bibliografia

[1] G. Amendola, *On wave propagation in thermoelastic solids whose polarization quadric is an ellipsoid of revolution,* Meccanica (2) **12** (1977), 51-62.

[2] P. Chadwick and L. T. C. Seet, *Second-order thermoelasticity theory for isotropic and transversely isotropic materials,* from: *Trends in elasticity and thermoelasticity,* Groningen 1971.

[3] A. H. England and A. E. Green, *Steady-state thermoelasticity for initially stressed bodies,* Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **253** (1961), 517-542.

[4] J. N. Flavin and A. E. Green, *Plane thermo-elastic waves in an initially stressed medium,* J. Mech. Phys. Solids **9** (1961), 179-190.

[5] A. E. Green, *Thermoelastic stresses in initially stressed bodies,* Proc. Roy. Soc. London Ser. A **266** (1962), 1-19.

[6] T. Manacorda, *Sulla termoelasticità dei solidi incomprimibili,* Riv. Mat. Univ. Parma (2) **1** (1960), 149-170.

[7] A. Signorini, *Trasformazioni termoelastiche finite,* Mem. III: *Solidi incomprimibili,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **39** (1955), 147-201.

[8] C. TRUESDELL, *The elements of Continuum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin 1966.

[9] C. TRUESDELL and W. NOLL, *The non linear theories of Mechanics*, Handbuch der Physik, Bd. III/3, Springer-Verlag, Berlin 1965.

[10] C. TRUESDELL and R. TOUPIN, *The classical field theory*, Handbuch der Physik, Bd. III/1, Springer-Verlag, Berlin 1960.

Summary

In this first paper we establish the equations which govern infinitesimal thermoelastic deformations superimposed on a finite thermostatic deformations in Signorini's incompressible materials. The form of the constitutive equations for the free energy and the heat flux is assumed to be very general. The results for compressible thermoelastic solids are also given.

* * *