Riv. Mat. Univ. Parma (3) 5 (1979), 453-470

L. Bassotti Rizza (*)

Operatori lineari invarianti rispetto ad un gruppo di congruenze (**)

A Giorgio Sestini per il suo 70° compleanno

1. - Introduzione

Sia A un aperto dello spazio euclideo E^n, G un gruppo di congruenze di E^n che mutano A in sè, $\mathcal{M}(A)$ lo spazio delle funzioni misurabili in A o quello dei vettori a n componenti funzioni misurabili in A.

Ad ogni congruenza g di G si può associare una opportuna trasformazione lineare Γ di $\mathcal{M}(A)$ in sè. Si viene così a costruire un gruppo $\mathcal{C}(G)$ di trasformazioni lineari di $\mathcal{M}(A)$ in sè, isomorfo a G (n. **2.** e **3**).

In un mio precedente lavoro ho mostrato come l'invarianza di un operatore differenziale lineare L a coefficienti costanti rispetto ad un gruppo di congruenze sia collegata alla permutabilità di L con le trasformazioni del gruppo $\mathcal{C}(G)$ (⁰). Ciò mi ha indotto a considerare un operatore lineare arbitrario L definito in un sottospazio di $\mathcal{M}(A)$, a valori in $\mathcal{M}(A)$ e a dare una definizione di invarianza rispetto a G basata sulla proprietà algebrica di permutabilità di L con gli elementi di $\mathcal{C}(G)$ (n. **4**).

Fissato G, la classe degli operatori invarianti rispetto a G gode di una serie di proprietà illustrate nei nn. **4, 5, 6**. Il n. **6** è dedicato in particolare alle proprietà degli operatori invarianti rispetto a G connesse con alcune decomposizioni dello spazio $\mathcal{M}(A)$ legate anch'esse al gruppo $\mathcal{C}(G)$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.I.M. (C.N.R.). I primi risultati di questo lavoro sono stati comunicati al Congresso dell'U.M.I., Cagliari, settembre 1975. — Ricevuto: 19-XII-1978.

(⁰) Si veda [**2**]$_1$, n. 2.

Fra gli operatori lineari di $\mathcal{M}(A)$ hanno particolare interesse gli operatori differenziali e quelli integrali. Nei nn. **7** e **8** vengono caratterizzati gli operatori integrali e differenziali invarianti rispetto a G.

1. – Sia A un insieme aperto e connesso dello spazio euclideo E^n, $\bar{A}$ la chiusura di A, $x \equiv (x^1, \ldots, x^n)$ le coordinate di un punto rispetto ad una base ortonormale fissata.

Si considerano qui le congruenze di E^n in sè che lasciano fissa la origine delle coordinate, le quali, come è noto, si rappresentano con le equazioni

$$x' = \gamma x \,, \tag{1.1}$$

essendo γ un'arbitraria matrice ortogonale di ordine n. Ciò premesso, G_A indicherà sistematicamente il gruppo delle congruenze (1.1) che mutano A in se stesso, G un sottogruppo di G_A, $\tilde{G}$ il gruppo, isomorfo a G, delle matrici ortogonali che rappresentano le congruenze di G. Infine si fa l'ipotesi che il gruppo G_A contenga almeno due elementi distinti.

Fissato un intero positivo m, si consideri lo spazio vettoriale $\mathcal{M}(A)$ dei vettori ad m componenti funzioni complesse (reali) di n variabili reali, misurabili secondo Lebesgue in A e il sottospazio $\mathcal{M}_0(A)$ dei vettori di $\mathcal{M}(A)$ quasi ovunque nulli. Sia $\mathcal{M}'(A)$ lo spazio quoziente $\mathcal{M}(A)/\mathcal{M}_0(A)$.

Fra i sottospazi di $\mathcal{M}(A)$, saranno considerati in particolare gli spazi $C^q(A)$ e $C^q(\bar{A})$, costituiti dai vettori di classe q in A e $\bar{A}$ rispettivamente e lo spazio $\overset{\circ}{C}{}^q(A)$ dei vettori di $C^q(\bar{A})$ a supporto compatto contenuto in A. Fra i sottospazi di $\mathcal{M}'(A)$, saranno considerati, per ogni p reale strettamente positivo, gli spazi $\mathfrak{L}^p(A)$ dei vettori di modulo di potenza p-esima sommabile in A (secondo Lebesgue).

Nel presente lavoro gli spazi $\mathcal{M}(A)$ e $\mathcal{M}'(A)$ verranno considerati soltanto nel caso scalare ($m = 1$) e nel caso di vettori ad n componenti ($m = n$).

2. – Si consideri dapprima il caso scalare. Sia dunque $\mathcal{M}(A)$ lo spazio delle funzioni misurabili complesse (reali), di n variabili reali. Ad ogni matrice ortogonale γ di $\tilde{G}_A$ rappresentante una congruenza g di G_A, si associ la trasformazione lineare Γ di $\mathcal{M}(A)$ in sè la quale ad una funzione $f(x)$ di $\mathcal{M}(A)$ fa corrispondere la funzione $(\Gamma f)(x) = f(\gamma^{-1}x)$.

Γ è una trasformazione lineare e invertibile di $\mathcal{M}(A)$ su $\mathcal{M}(A)$ che verrà detta la *trasformazione lineare associata* a γ (oppure a g).

La famiglia $\mathcal{T}(G_A)$ delle trasformazioni lineari associate alle matrici di $\tilde{G}_A$ è un gruppo rispetto alla composizione, la trasformazione $\Gamma\Gamma'$ essendo associata alla matrice $\gamma\gamma'$. Si verifica facilmente che, se ad una matrice γ è associata la trasformazione identica I, allora γ è la matrice identica e che la trasformazione associata alla matrice γ^{-1} è la trasformazione inversa di Γ; ne segue che:

I. *Il gruppo* $\mathcal{C}(G_A)$ *è isomorfo a* G_A.

Di conseguenza, se G è un sottogruppo di G_A, le trasformazioni lineari associate alle matrici di G formano un gruppo $\mathcal{C}(G)$ isomorfo a G.

3. – Analogamente a quanto fatto nel caso delle funzioni (n. **2**), si può ora introdurre un gruppo di trasformazioni lineari dello spazio $\mathcal{M}(A)$ dei vettori ad n componenti complesse (reali) e misurabili, in sè; tale gruppo risulterà isomorfo al gruppo G_A.

A tale scopo, fissata una congruenza $g \in G_A$, alla matrice ortogonale γ che rappresenta g, si associ la trasformazione lineare Γ di $\mathcal{M}(A)$ in sè la quale ad un arbitrario vettore $v(x)$ di $\mathcal{M}(A)$ di componenti $v^1(x), \ldots, v^n(x)$ fa corrispondere il vettore $(\Gamma v)(x)$ di componenti

$$(3.1) \qquad (\Gamma v)^i(x) = \gamma^i_j v^j(\gamma^{-1}x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\ (^1)\,.$$

Γ è una trasformazione lineare e invertibile di $\mathcal{M}(A)$ su $\mathcal{M}(A)$ che verrà detta la *trasformazione lineare associata* a γ (oppure a g) (²).

Si verifica che la famiglia $\mathcal{C}(G_A)$ delle trasformazioni associate alle matrici di G_A è un gruppo rispetto alla composizione, la trasformazione $\Gamma\Gamma'$ essendo associata alla matrice $\gamma\gamma'$ e Γ^{-1} essendo la trasformazione associata alla matrice γ^{-1}. Sussiste il seguente teorema

I. *Il gruppo* $\mathcal{C}(G_A)$ *è isomorfo a* G_A (³).

Si osservi infine che, come conseguenza del teorema I, ad ogni sottogruppo G di G_A corrisponde un gruppo $\mathcal{C}(G)$ di trasformazioni lineari associate alle matrici di $\tilde{G}$, G e $\mathcal{C}(G)$ risultando isomorfi.

4. – Sia W uno spazio vettoriale, $\mathcal{C}$ un gruppo di trasformazioni lineari di W in sè. Un sottospazio V di W si dice *invariante rispetto al gruppo* $\mathcal{C}$ se, per ogni trasformazione T di $\mathcal{C}$, risulta $T(V) \subset V$. Si verifica immediatamente

I. *Se* $\mathcal{C}$ *è un gruppo di trasformazioni lineari invertibili,* V *è sottospazio invariante rispetto a* $\mathcal{C}$ *se e solo se per ogni* $T \in \mathcal{C}$ *si ha*

$$(4.1) \qquad T(V) = V\,.$$

(¹) In questo lavoro si adotta la convenzione di somma di Einstein.

(²) Dette trasformazioni sono da me già state considerate. Si confronti [**2**]$_1$ n. 1 e [**2**]$_2$ n. 1.

(³) La dimostrazione è analoga a quella del teor. I del n. 1 di [**2**]$_1$.

Sia $\mathcal{M}(A)$ lo spazio delle funzioni misurabili o quello dei vettori ad n componenti, funzioni misurabili; fra i sottospazi di $\mathcal{M}(A)$ interessano particolarmente quelli invarianti rispetto al gruppo $\mathcal{T}(G_A)$ delle trasformazioni lineari associate al gruppo G_A (nn. **2**, **3**). È immediato verificare che:

II. *Per ogni intero positivo q e per $q = \infty$, i sottospazi $C^q(A)$, $C^q(\overline{A})$ e $\overset{0}{C^q}(A)$ sono invarianti rispetto al gruppo $\mathcal{T}(G_A)$.*

III. *Il sottospazio dei vettori di $C^0(\overline{A})$ nulli su $\mathcal{F}A$ è invariante rispetto a $\mathcal{T}(G_A)$.*

IV. *Il sottospazio $\mathcal{M}_0(A)$ dei vettori di $\mathcal{M}(A)$ quasi ovunque nulli, è invariante rispetto al gruppo $\mathcal{T}(G_A)$.*

In base al teorema IV, le trasformazioni lineari Γ introdotte nei numeri **2** e **3** possono, evidentemente, essere anche riguardate come trasformazioni lineari di $\mathcal{M}'(A)$ in $\mathcal{M}'(A)$ e come tali, nel seguito, saranno ancora indicate con Γ. Dal teorema IV segue subito

V. *Se $V(A)$ è sottospazio di $\mathcal{M}(A)$ invariante rispetto a $\mathcal{T}(G_A)$, lo spazio corrispondente a $V(A)$ in $\mathcal{M}'(A)$ è invariante rispetto allo stesso gruppo.*

Conviene infine osservare che

VI. *Per ogni numero reale $p > 0$, il sottospazio $\mathcal{L}^p(A)$ di $\mathcal{M}'(A)$ è invariante rispetto a $\mathcal{T}(G_A)$.*

Dim. Per ogni $v \in \mathcal{M}'(A)$ e per ogni $\gamma \in \tilde{G}_A$, detta Γ la trasformazione lineare associata a γ, risulta

$$\int_A |(\Gamma v)(x)|^p \, dx = \int_A |v(\gamma^{-1}x)|^p \, dx = \int_A |v(x)|^p \, dx \, .$$

Ne segue che, se $v \in \mathcal{L}^p(A)$, allora $\Gamma v \in \mathcal{L}^p(A)$.

Sia ora G un sottogruppo arbitrario di G_A, L un operatore lineare definito in uno sottospazio $V(A)$ di $\mathcal{M}(A)$ o $\mathcal{M}'(A)$ e a valori in $\mathcal{M}(A)$ o $\mathcal{M}'(A)$ rispettivamente. Si dirà che *L è invariante rispetto al gruppo di congruenze G*, se $V(A)$ è un sottospazio invariante rispetto al gruppo $\mathcal{T}(G)$ e, se per ogni $\Gamma \in \mathcal{T}(G)$ risulta

$$\Gamma L = L \Gamma \text{ (}^4\text{)} \, . \tag{4.2}$$

---

(4) Naturalmente si intende che i due membri di (4.2) operino sui vettori di $V(A)$. In [7] p. 34 trovasi una definizione di operatore invariante per le trasformazioni di un gruppo la quale, nel caso scalare, equivale a quella qui introdotta; nel caso vettoriale è diversa e conduce ad una classe di operatori molto ristretta.

Sia $\underset{\alpha}{g}$ $(\alpha \in \mathfrak{J})$ un sistema di generatori di G, $\underset{\alpha}{\gamma}$ la matrice ortogonale corrispondente a $\underset{\alpha}{g}$ e $\underset{\alpha}{\Gamma}$ la trasformazione lineare associata a $\underset{\alpha}{\gamma}$. Sussiste il teorema

VII. *Condizione necessaria e sufficiente perchè L sia invariante rispetto a G è che $V(A)$ sia un sottospazio invariante rispetto al gruppo $\mathcal{C}(G)$ e inoltre, per ogni $\alpha \in \mathfrak{J}$, risulti*

$$\underset{\alpha}{\Gamma} L = L \underset{\alpha}{\Gamma} . \tag{4.3}$$

Dalla definizione seguono subito alcune proprietà degli operatori lineari invarianti rispetto a G.

VIII. *Se G_0 è un sottogruppo di G, ogni operatore lineare invariante rispetto a G è invariante rispetto a G_0.*

IX. *Se L' e L'' sono operatori lineari definiti rispettivamente nei sottospazi $V'(A)$ e $V''(A)$ e invarianti rispetto ai gruppi di congruenze G' e G'', ogni loro combinazione lineare* (5) *è un operatore lineare definito in $V'(A) \cap V''(A)$ che risulta invariante rispetto al gruppo $G' \cap G''$.*

X. *Se L' e L'' sono operatori lineari invarianti rispetto al gruppo G, definiti rispettivamente nei sottospazi $V'(A)$ e $V''(A)$ e se $V''(A) \supset L'(V'(A))$, allora l'operatore $L''L'$ è invariante rispetto a G.*

5. – Si considerino ancora un sottogruppo G del gruppo G_A e il gruppo $\mathcal{C}(G)$ delle trasformazioni lineari dello spazio $\mathcal{M}(A)$ in sè, associate alle congruenze di G (nn. **2**, **3**).

Si introduca poi l'algebra $\mathcal{A}(G)$ generata da $\mathcal{C}(G)$ (6). Per il seguito è essenziale il seguente teorema

I. *Se L è un operatore lineare invariante rispetto a G, esso è permutabile con ogni elemento dell'algebra $\mathcal{A}(G)$.*

---

(5) A coefficienti reali o complessi a seconda che $\mathcal{M}(A)$ sia uno spazio reale o complesso.

(6) $\mathcal{A}(G)$ è costituita da tutte le combinazioni lineari di un numero finito di elementi di $\mathcal{C}(G)$, a coefficienti complessi o reali a seconda che $\mathcal{M}(A)$ sia complesso o reale.

Dim. Sia $X = x_1\Gamma_1 + \ldots + x_p\Gamma_p$ un elemento di $\mathcal{A}(G)$. Detto $V(A)$ il dominio di L, dalle ipotesi segue $X(V(A)) \subset V(A)$. Inoltre $XL = (\sum_{i=1}^{p} x_i\Gamma_i)L = \sum_{i=1}^{p} x_i(\Gamma_i L) = \sum_{i=1}^{p} x_i(L\Gamma_i) = L(\sum_{i=1}^{p} x_i\Gamma_i) = LX$. Come nella (4.2), si intende che XL e LX operino sui vettori di $V(A)$.

Fra le trasformazioni di $\mathcal{A}(G)$ hanno un ruolo importante per le applicazioni i sistemi finiti di proiettori P_j $(j = 1, \ldots, t)$ di $\mathcal{A}(G)$ (trasformazioni lineari idempotenti di $\mathcal{A}(G)$) soddisfacenti alle condizioni

$$\sum_{j=1}^{t} P_j = I\,, \qquad P_i P_j = 0 \qquad \text{se } i \neq j\,. \tag{5.1}$$

In precedenti lavori ho considerato in generale alcune proprietà dei sistemi di questo tipo, ottenendo anche una costruzione in relazione a gruppi G particolari (7). Successivamente G. F. Smith, nel caso di un gruppo G finito, ha indicato una costruzione esplicita di un sistema di proiettori soddisfacenti le condizioni (5.1), che si avvale delle rappresentazioni irriducibili (non equivalenti tra loro) di G (e quindi di $\tilde{G}$) con matrici unitarie (8). Esponiamo brevemente questa costruzione, in ipotesi più generali di quelle considerate da Smith.

Siano $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ gli elementi di un gruppo $\tilde{G}$ finito e $\{D(\gamma_i)\}$ $(i = 1, \ldots, N)$ la rappresentazione di $\tilde{G}$ nel gruppo delle matrici unitarie $N \times N$ definita dalle relazioni

$$\gamma_i \gamma_k = \sum_{h=1}^{N} D_{hk}(\gamma_i)\gamma_h \qquad (i, k = 1, \ldots, N)\,. \tag{5.2}$$

Le matrici $D(\gamma_i)$ sono matrici di permutazione (9) e costituiscono «la rappresentazione regolare di G» (10).

Si dimostra che detta rappresentazione è riducibile, cioè esiste una rappresentazione ad essa equivalente, costituita di matrici unitarie e quasi diagonali $\{\tilde{D}(\gamma_i)\}$ del tipo

$$\tilde{D}(\gamma_i) = n_1 D^{(1)}(\gamma_i) \dotplus n_2 D^{(2)}(\gamma_i) \dotplus \ldots \dotplus n_\nu D^{(\nu)}(\gamma_i) \ (^{11})\,, \tag{5.3}$$

(7) V. [2], nn. 1, 4, 5, 7 e $[2]_2$, nn. 1, 2.

(8) V. [5], n. 2. Casi particolari notevoli sono esaminati nei nn. 3, 4, 5, 6.

(9) Esse si ottengono permutando opportunamente le righe della matrice identica d'ordine N.

(10) Si confronti ad es. [4], n. 84.

(11) Ciò significa che ogni matrice $\tilde{D}(\gamma_i)$ è costituita da n_1 blocchi uguali $D^{(1)}(\gamma_i), \ldots, n_\nu$ blocchi uguali $D^{(\nu)}(\gamma_i)$.

ove $\{D^{(h)}(\gamma_i)\}$ $(i = 1, \ldots, N)$ è una rappresentazione irriducibile di $\tilde{G}$ nel gruppo delle matrici unitarie di ordine d_h e due rappresentazioni $\{D^{(h)}(\gamma_i)\}$ e $\{D^{(k)}(\gamma_i)\}$ con $h \neq k$ non sono equivalenti.

Dalla teoria della rappresentazione dei gruppi segue che $\{\tilde{D}(\gamma_i)\}$ contiene tutte le rappresentazioni irriducibili e fra loro non equivalenti di G e ciascuna un numero di volte uguale all'ordine delle matrici che la compongono ([12]). Si ha allora, $n_h = d_h$ $(h = 1, \ldots, \nu)$ e, di conseguenza, in base alla (5.3), $d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_\nu^2 = N$. Posto $M = d_1 + d_2 + \ldots + d_\nu$, si considerino allora le M trasformazioni lineari così definite, per ogni coppia di indici h, r, con $h = 1, \ldots, \nu$, $r = 1, \ldots, d_h$

$$P_{hr} = \frac{d_h}{N} \sum_{i=1}^{N} D_{rr}^{(h)}(\gamma_i) \Gamma_i \,, \tag{5.4}$$

ove Γ_i è l'elemento di $\mathcal{C}(G)$ associato a γ_i (nn. **2**, **3**).

Sussistono i seguenti teoremi .

II. *Se* $\mathcal{M}(A)$ *è reale e se le matrici* $D^{(h)}(\gamma_i)$ $(h = 1, \ldots, \nu;\ i = 1, \ldots, N)$ *sono tutte reali, le* M *trasformazioni* P_{hr} *definite dalle* (5.4) *appartengono all'algebra reale* $\mathcal{A}(G)$ *e costituiscono un sistema di proiettori verificanti le* (5.1).

III. *Se* $\mathcal{M}(A)$ *è complesso, le* M *trasformazioni* P_{hr} *definite dalle* (5.4) *appartengono all'algebra complessa* $\mathcal{A}(G)$ *e costituiscono un sistema di proiettori verificanti le* (5.1).

Per la dimostrazione del teor. II si veda G. F. Smith [**5**] n. 2. La dimostrazione del teor. III è una semplice generalizzazione della precedente.

Dal teorema III segue che la tesi del Teorema II vale sostituendo la ipotesi che ogni matrice $D^{(h)}(\gamma_i)$ sia reale, con l'ipotesi più generale, che siano reali tutti gli elementi $D_{rr}^{(h)}(\gamma_i)$ che figurano nella (5.4).

6. – In questo numero si suppone noto un sistema di proiettori P_j $(j = 1, \ldots, t)$ dello spazio $\mathcal{M}(A)$ appartenenti all'algebra $\mathcal{A}(G)$ definita al n. **5** e verificanti le condizioni (5.1). I proiettori P_j possono anche riguardarsi come proiettori dello spazio $\mathcal{M}'(A)$.

Restano allora determinate, in corrispondenza, decomposizioni degli spazi $\mathcal{M}(A)$ e $\mathcal{M}'(A)$ in somma diretta di t sottospazi. Tali decomposizioni sono particolarmente utili nelle applicazioni, in quanto ottenute sfruttando eventuali proprietà di simmetria e di invarianza rispetto a rotazioni del campo A. Nei

---

([12]) Si confronti [**4**] n. 84, teorema 6.

casi $n = 2, 3$, decomposizioni ben note dello spazio $C^0(A)$, per campi A particolari, ottenute con vari procedimenti, rientrano fra quelle ora considerate; altre possono ottenersi con le tecniche usate nei lavori [**2**]$_1$ e [**5**].

Vengono esposti, in questo numero, alcuni teoremi che generalizzano ampiamente teoremi analoghi da me stabiliti per operatori differenziali lineari a coefficienti costanti ([13]).

Sia L un operatore lineare definito in un sottospazio $V(A)$ di $\mathcal{M}(A)$ o di $\mathcal{M}'(A)$, $\Sigma(A)$ un sottospazio di $V(A)$ e $\Sigma_j(A)$ il trasformato di $\Sigma(A)$ mediante P_j.

Dal teorema I del n. **5** segue facilmente

I. *Se L è un operatore lineare invariante rispetto a G e $\Sigma(A)$ è un sottospazio invariante rispetto ad L, ciascun sottospazio $\Sigma_j(A)$ è invariante rispetto ad L.*

Sussistono inoltre i seguenti teoremi, nell'ipotesi ulteriore $\Sigma_j(A) \subset \Sigma(A)$ $(j = 1, \ldots, t)$.

II. *Se L è un operatore invariante rispetto a G e w un elemento del codominio di L, l'insieme $U(A)$ delle soluzioni del problema*

$$Lu = w\,, \qquad u \in \Sigma(A)\,, \tag{6.1}$$

è somma diretta di sottoinsiemi $U_j(A)$ $(j = 1, \ldots, t)$ e l'insieme $U_j(A)$ costituisce la totalità delle soluzioni del problema

$$Lu = P_j w\,, \qquad u \in \Sigma_j(A)\,. \tag*{(6.2)$_j$}$$

Dim. Sia $\tilde{u}$ una soluzione di (6.1). Il vettore $\tilde{u}_j = P_j \tilde{u}$ appartiene a $\Sigma_j(A)$ ed è soluzione di (6.2)$_j$, riuscendo, in base al teorema I del n. **5**, $L\tilde{u}_j = P_j L\tilde{u} = P_j w$. Viceversa se $\tilde{u}_j$ è soluzione di (6.2)$_j$ $(j = 1, \ldots, t)$, posto $\tilde{u} = \sum_{i=1}^{t} \tilde{u}_i$, risulta $\tilde{u} \in \Sigma(A)$ ed inoltre, per la linearità di L e il teorema I del n. **5** si ha

$$L\tilde{u} = \sum_{j=1}^{t} L\tilde{u}_j = \sum_{j=1}^{t} P_j w = w\,.$$

III. *Sia $\mathcal{M}(A)$ complesso. Se L è un operatore lineare invariante rispetto a G, il problema di autovalori*

$$Lu - \lambda u = 0\,, \qquad u \in \Sigma(A) \tag{6.3}$$

([13]) Vedasi [**2**]$_1$ n. 9 e [**2**]$_2$ n. 5.

si spezza in t problemi dello stesso tipo

$$(6.4)_j \qquad Lu - \lambda u = 0\,, \quad u \in \Sigma_j(A) \qquad (j = 1, \ldots, t)\,,$$

nel senso che, se in corrispondenza ad un valore complesso λ, $N^{(\lambda)}$ *e* $N_j^{(\lambda)}$ *denotano rispettivamente gli insiemi delle soluzioni di* (6.3) *e* $(6.4)_j$, *risulta*

$$(6.5) \qquad N^{(\lambda)} = N_1^{(\lambda)} \oplus N_2^{(\lambda)} \oplus \ldots \oplus N_t^{(\lambda)}\,.$$

Dim. Il teorema è un caso particolare del teorema precedente, non appena si osservi che $L - \lambda I$ è un operatore invariante rispetto a G (si confronti n. 4 teorema IX).

Sia ora A un campo limitato propriamente regolare di E^n (14), $\mathfrak{L}^2(A)$ lo spazio delle funzioni o quello dei vettori a n componenti misurabili complesse, di norma integrabile in A, $H^1(A)$ il sottospazio di $\mathfrak{L}^2(A)$ costituito dai vettori dotati di derivate prime forti di norma sommabile in A. È ben noto che, per un elemento v di $H^1(A)$, si può parlare di traccia τv su $\mathcal{F}A$ (15). Sussiste il seguente teorema

IV. *Il sottospazio* $H^1(A)$ *di* $\mathfrak{L}^2(A)$ *è invariante rispetto al gruppo* $\mathcal{C}(G_A)$. *Inoltre, se* $v \in H^1(A)$ *e riesce* $\tau v = 0$, *allora per ogni* $\Gamma \in \mathcal{C}(G_A)$ *risulta* $\tau \Gamma v = 0$.

Dim. Conviene riguardare gli spazi $H^1(A)$ e $\mathfrak{L}^2(\mathcal{F}A)$ come spazi di Hilbert, con la consueta definizione di prodotto scalare. Le trasformazioni di $\mathcal{C}(G_A)$ sono allora trasformazioni continue di $H^1(A)$ in sè (16). Ciò prova la prima affermazione. D'altra parte τ è un operatore continuo di $H^1(A)$ in $\mathfrak{L}^2(\mathcal{F}A)$. Le relazioni

$$(6.6) \qquad \int_{\mathcal{F}A} |\tau \Gamma u|^2 \, dx = \int_{\mathcal{F}A} |\tau u|^2 \, dx\,,$$

di immediata verifica se $u \in C^1(\bar{A})$ e $\Gamma \in \mathcal{C}(G_A)$, per la continuità degli operatori Γ e τ, si estendono ai vettori di $H^1(A)$. Il teorema è allora dimostrato.

Sia G un sottogruppo di G_A, $\Sigma(A)$ un sottospazio di $H^1(A)$ invariante rispetto a $\mathcal{C}(G)$, L un operatore lineare definito in $\Sigma(A)$ a valori in $\mathfrak{L}^2(A)$,

(14) Per la definizione di campo propriamente regolare si confronti ad es. [**3**], p. 21.
(15) Si confronti [**3**], Lect. 4 e $[\mathbf{2}]_2$ n. 5. Il vettore $\tau v \in \mathfrak{L}^2(\mathcal{F}A)$.
(16) Si confronti $[\mathbf{2}]_2$ n. 1, teor. III.

$M_1, M_2, \ldots, M_k \ldots$ una successione finita o infinita di operatori lineari definiti in $\Sigma(A)$, a valori in $H^1(A)$, invarianti rispetto a G. Sussistono i teoremi:

V. *Se L è un operatore invariante rispetto a G e w un elemento del codominio di L, l'insieme $U(A)$ delle soluzioni del problema*

$$(6.7) \qquad Lu = w\,, \qquad \tau M_k u = 0 \qquad (k = 1, \ldots)\,, \quad u \in \Sigma(A)$$

è somma diretta di sottoinsiemi $U_j(A)$ $(j = 1, \ldots, t)$ e l'insieme $U_j(A)$ costituisce la totalità delle soluzioni del problema

$$(6.8)_j \qquad Lu = w\,, \qquad \tau M_k u = 0 \qquad (k = 1, \ldots)\,, \quad u \in \Sigma_j(A)\,.$$

Dim. Sia $\Sigma^*(A)$ il sottospazio di $\Sigma(A)$ costituito dai vettori tali che $\tau M_k u = 0$ $(k = 1, \ldots)$. In base ai teoremi I del n. **5** e III di questo numero e alla linearità di τ, se $u \in \Sigma^*(A)$, riesce

$$M_k P_j u = P_j M_k u\,, \qquad \tau M_k P_j u = \tau P_j M_k u = 0 \qquad (j = 1, \ldots, t;\ k = 1, \ldots)\,.$$

Ne segue che il trasformato $\Sigma_j^*(A)$ di $\Sigma^*(A)$ mediante P_j, è costituito dai vettori di $\Sigma_j(A)$ tali che $\tau M_k u = 0$ $(k = 1, \ldots)$ e pertanto è contenuto in $\Sigma^*(A)$ per ogni j. Il teorema V è allora un caso particolare del teorema II di questo numero.

VI. *Se L è un operatore invariante rispetto a G, il problema di autovalori*

$$(6.9) \qquad Lu - \lambda u = 0\,, \quad \tau M_k u = 0 \qquad (k = 1, \ldots), \quad u \in \Sigma(A)$$

si spezza in t problemi dello stesso tipo

$$(6.10)_j \qquad Lu - \lambda u = 0 \quad \tau M_k u = 0 \qquad (k = 1, \ldots), \quad u \in \Sigma_j(A)\,.$$

Dim. Il teorema VI è conseguenza del teorema V, riuscendo, per ogni $\lambda \in C$, $L - \lambda I$ un operatore invariante rispetto a G.

7. – In questo numero vengono date condizioni necessarie e sufficienti perchè un operatore lineare di tipo integrale sia invariante rispetto ad un gruppo G di congruenze assegnato.

Sia A un aperto limitato e connesso di E^n, G un sottogruppo del gruppo G_A, $\{\underset{\alpha}{g}\}$ $(\alpha \in \mathfrak{J})$ un sistema di generatori di G e $\underset{\alpha}{\gamma}$ la matrice ortogonale che rappresenta g. Sia S un sottoinsieme di $A \times A$, di misura nulla secondo Lebesgue e tale che, se $(x, y) \in S$, allora, per ogni $\underset{\alpha}{\gamma} \in \tilde{G}$, risulti $(\gamma x, \gamma y) \in S$.

Si indicherà con $\mathcal{F}$ la classe delle funzioni $k(x, y)$ complesse (reali) definite e continue in $(A \times A) \setminus S$ e verificanti le seguenti ipotesi:

(1) per ogni $x \in A$, $k(x, y)$, come funzione di y, appartenga a $\mathfrak{L}^2(A)$,

(2) per ogni $x \in A$ la funzione $g(x) = \left(\int_A k^2(x, y)\, dy\right)^{1/2}$ appartenga a $\mathfrak{L}^2(A)$ (17).

Esaminiamo dapprima il caso scalare. Assegnata una funzione $k(x, y)$ in $\mathcal{F}$, l'operatore L così definito

$$Lf = \int_A k(x, y)\, f(y)\, dy\,, \tag{7.1}$$

è un operatore lineare di $\mathfrak{L}^2(A)$ in $\mathfrak{L}^2(A)$. Sussiste il seguente teorema

I. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore L definito da* (7.1) *sia invariante rispetto a G, è che la funzione $k(x, y)$ verifichi in ogni punto di $(A \times A) \setminus S$ le condizioni*

$$k(\underset{\alpha}{\gamma} x, \underset{\alpha}{\gamma} y) = k(x, y) \text{ (18)}\,, \tag{7.2}$$

per ogni $\underset{\alpha}{\gamma}$, con $\alpha \in \mathfrak{J}$.

Dim. In base al teorema II del n. **5** sarà sufficiente dimostrare l'equivalenza delle condizioni (7.2) con le (4.3). Per l'operatore L definito dalle (7.1) si ha, per ogni $\Gamma \in \mathcal{C}(G)$

$$\Gamma L f = \int_A k(\gamma^{-1} x, y)\, f(y)\, dy\,.$$

$$L \Gamma f = \int_A k(x, y)\, f(\gamma^{-1} y)\, dy = \int_A k(x, \gamma y)\, f(y)\, dy\,.$$

(17) Per quanto riguarda i risultati di questo numero, le ipotesi (1) e (2) si possono attenuare. Ad esempio si può supporre che, per tutti gli $x \in A \setminus R$, con R insieme di misura nulla secondo Lebesgue, sia $k(x, y) \in \mathfrak{L}^2(A)$ e che la funzione $g(x)$, definita in $A \setminus R$, appartenga a $\mathfrak{L}^2(A)$.

(18) In particolare se A è un campo sferico di centro l'origine 0 e G è il gruppo delle rotazioni attorno ad O, la condizione (7.2) è stata considerata da G. Ascoli in [**1**]$_2$, per definire i nuclei isotropi su un'ipersuperficie sferica.

Ne segue che la condizione (4.3) è verificata se e solo se, per ogni $\alpha \in \mathfrak{J}$, per ogni $x \in A$

$$k(\underset{\alpha}{\gamma}^{-1}x, y) = k(x, \underset{\alpha}{\gamma}y) \quad \text{q.o. in } A\,. \tag{7.3}$$

Per l'arbitrarietà di x in A e la continuità di $k(x, y)$ in $(A\times A)\setminus S$, la (7.3) è equivalente alla (7.2).

Esaminiamo ora il caso vettoriale. Assegnate n^2 funzioni $k^i_j(x, y)$ in $\mathcal{F}$, si consideri la matrice $n\times n$ $K(x, y)$ di elementi $k^i_j(x, y)$ e l'operatore integrale vettoriale

$$Lu = \int_A K(x, y)\, u(y)\, \mathrm{d}y\,, \tag{7.4}$$

definito nello spazio $\mathfrak{L}^2(A)$ dei vettori ad n componenti complesse (reali) e a valori in $\mathfrak{L}^2(A)$. Sussiste il seguente teorema

II. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore L definito da* (7.4) *sia invariante rispetto a G è che la matrice $K(x, y)$ verifichi in ogni punto di $(A\times A)\setminus S$ le condizioni*

$$K(\underset{\alpha}{\gamma}x, \underset{\alpha}{\gamma}y) = \underset{\alpha}{\gamma}K(x, y)\underset{\alpha}{\gamma}^{-1}\ \text{(19)}\,, \tag{7.5}$$

per ogni $\underset{\alpha}{\gamma}$ con $\alpha \in \mathfrak{J}$.

D i m. In base al teorema III del n. **5**, sarà sufficiente dimostrare l'equivalenza delle condizioni (7.5) con le (4.3). Si ha, per ogni $\Gamma \in \mathcal{C}(G)$ e per ogni $u \in \mathfrak{L}^2(A)$

$$(\Gamma Lu)^{(i)} = \gamma^i_j \int_A k^j_r(\gamma^{-1}x, y)\, u^r(y)\, \mathrm{d}y\,,$$

$$(\mathrm{L}\Gamma u)^{(i)} = \int_A k^i_j(x, y)\, \gamma^j_r u^r(\gamma^{-1}y)\, \mathrm{d}y = \int_A k^i_j(x, \gamma y)\, \gamma^j_r u^r(y)\, \mathrm{d}y\,.$$

In particolare, per ogni $\alpha \in \mathfrak{J}$ si ha allora

$$\underset{\alpha}{\Gamma} Lu - L\underset{\alpha}{\Gamma} u = \int_A [\underset{\alpha}{\gamma} K(\underset{\alpha}{\gamma}^{-1}x, y) - K(x, \underset{\alpha}{\gamma}y)\underset{\alpha}{\gamma}]\, u(y)\, \mathrm{d}y$$

(19) Nel caso $n = 2$ sono stati caratterizzati i nuclei verificanti le condizioni (7.5) per particolari gruppi G: si confronti [**6**].

Ne segue che le condizioni (4.3) sono verificate se e solo se per ogni $x \in A$ e per ogni $\alpha \in \mathfrak{J}$ risulta

$$\underset{\alpha}{\gamma} K(\underset{\alpha}{\gamma}^{-1} x, y) = K(x, \underset{\alpha}{\gamma} y) \underset{\alpha}{\gamma} \qquad \text{q.o. in } A \,. \tag{7.6}$$

Per l'arbitrarietà di x in A e la continuità di $K(x, y)$ in $(A \times A) \setminus S$, ciascuna delle relazioni (7.6) è equivalente a

$$\underset{\alpha}{\gamma} K(x, y) = K(\underset{\alpha}{\gamma} x, \underset{\alpha}{\gamma} y) \underset{\alpha}{\gamma} \qquad \text{in } (A \times A) \setminus S \,.$$

Ne segue la tesi.

8. – In questo numero vengono considerati gli operatori differenziali lineari, scalari e vettoriali, e vengono assegnate le condizioni sui coefficienti perchè gli operatori risultino invarianti rispetto ad un gruppo di congruenze.

Sia A un aperto connesso di E^n, G un sottogruppo del gruppo G_A, $\{\underset{\alpha}{g}\}$, con $\alpha \in \mathfrak{J}$, un sistema di generatori di G, $\underset{\alpha}{\gamma}$ la matrice ortogonale che rappresenta $\underset{\alpha}{g}$, $\overset{*}{\underset{\alpha}{\gamma}}$ la trasposta di $\underset{\alpha}{\gamma}$.

Esaminiamo dapprima il caso scalare. Sia D un operatore differenziale lineare di ordine p

$$Df = \sum_{s=0}^{p} \sum_{h_1 \dots h_s}^{1,n} a^{h_1 \dots h_s}(x) \frac{\partial^s f}{\partial x^{h_1} \dots \partial x^{h_s}}, \tag{8.1}$$

a coefficienti $a^{h_1 \dots h_s}(x)$ funzioni continue in A.

Si conviene che per $s = 0$, a secondo membro di (8.1) si ottenga l'addendo $a(x) f$. Si può supporre, senza restrizione, che per ogni permutazione $k_1 \dots k_s$ degli indici $h_1 \dots h_s$, risulti $a^{k_1 \dots k_s}(x) = a^{h_1 \dots h_s}(x)$.

L'operatore D dato da (8.1) può riguardarsi come un operatore lineare definito nel sottospazio $C^\infty(A)$ di $\mathcal{M}(A)$, a valore in $\mathcal{M}(A)$. Sussiste il seguente teorema.

I. *Condizione necessaria e sufficiente perchè D sia invariante rispetto a G è che per ogni s e per ogni scelta di $h_1 \dots h_s$ risulti, in ogni punto di A*

$$a^{h_1 \dots h_s}(\underset{\alpha}{\gamma} x) = a^{k_1 \dots k_s}(x) \underset{\alpha}{\gamma}{}^{h_1}_{k_1} \dots \underset{\alpha}{\gamma}{}^{h_s}_{k_s}, \tag{8.2}$$

per ogni matrice $\underset{\alpha}{\gamma}$ con $\alpha \in \mathfrak{J}$.

D i m. Dalle (8.2), moltiplicando i due membri per $\underset{\alpha}{\overset{*}{\gamma}}{}^{r_1}_{h_1} \dots \underset{\alpha}{\overset{*}{\gamma}}{}^{r_s}_{h_s}$ e sommando rispetto agli indici $h_1 \dots h_s$, si trae, ricordando che $\underset{\alpha}{\gamma}^{-1} = \underset{\alpha}{\overset{*}{\gamma}}$

$$a^{k_1 \dots k_s}(x) = a^{h_1 \dots h_s}(\underset{\alpha}{\gamma} x)\, \underset{\alpha}{\overset{*}{\gamma}}{}^{k_1}_{h_1} \dots \underset{\alpha}{\overset{*}{\gamma}}{}^{k_s}_{h_s} \qquad (x \in A) \tag{8.3}$$

e quindi, considerando $\underset{\alpha}{\gamma} x$ come punto generico di A

$$a^{k_1 \dots k_s}(\underset{\alpha}{\gamma}^{-1} x) = a^{h_1 \dots h_s}(x)\, \underset{\alpha}{\overset{*}{\gamma}}{}^{k_1}_{h_1} \dots \underset{\alpha}{\overset{*}{\gamma}}{}^{k_s}_{h_s} \qquad (x \in A)\,. \tag{8.4}$$

Il sussistere di tutte le relazioni (8.4) in ogni punto di A, equivale al sussistere di tutte le (8.2) in ogni punto di A. Si osservi inoltre che $C^\infty(A)$ è sottospazio invariante rispetto a $\mathcal{G}(G)$, in base al teorema II del n. **4**. Ciò premesso, sia $\gamma \in G$ e Γ la trasformazione lineare associata a γ: posto $x' = \gamma^{-1} x$, riesce per ogni $f \in C^\infty(A)$

$$\Gamma D f = \sum_{s=0}^{p} \sum_{k_1 \dots k_s} a^{k_1 \dots k_s}(\gamma^{-1} x) \left(\frac{\partial^s f(x)}{\partial x^{k_1} \dots \partial x^{k_s}}\right)_{x=x'},$$

$$\begin{aligned} D\Gamma f &= \sum_{s=0}^{p} \sum_{h_1 \dots h_s} a^{h_1 \dots h_s}(x) \frac{\partial^s f(\gamma^{-1} x)}{\partial x^{h_1} \dots \partial x^{h_s}} \\ &= \sum_{s=0}^{p} \sum_{h_1 \dots h_s} a^{h_1 \dots h_s}(x)\, \overset{*}{\gamma}{}^{k_1}_{h_1} \dots \overset{*}{\gamma}{}^{k_s}_{h_s} \left(\frac{\partial^s f(x)}{\partial x^{k_1} \dots \partial x^{k_s}}\right)_{x=x'}. \end{aligned}$$

Il sussistere delle (8.2) e quindi delle (8.4) implica $\underset{\alpha}{\Gamma} D f = D \underset{\alpha}{\Gamma} f$ per ogni $f \in C^\infty(A)$ e per ogni $\alpha \in I$; allora, in base al teor. VII del n. **4**, D è invariante rispetto a G.

Viceversa, supponiamo D invariante rispetto a G e quindi verificate le (4.3). Applicando gli operatori $\underset{\alpha}{\Gamma} D$ e $D \underset{\alpha}{\Gamma}$ alla funzione $f(x) \equiv 1$, si trae $a(x) = a(\gamma^{-1} x)$ in A, cioè le (8.4) per $s = 0$. Procediamo per induzione rispetto ad s: supponiamo verificate le (8.4) per $s \leqslant r - 1$ e dimostriamo che sussistono per $s = r$. Fissata una disposizione (con ripetizione) $k_1 \dots k_r$ di r indici fra $1, \dots, n$, consideriamo la funzione $f(x) = x^{k_1} \dots x^{k_r}$ e applichiamo ad essa gli operatori $\underset{\alpha}{\Gamma} D$ e $D \underset{\alpha}{\Gamma}$. Poichè per $s \leqslant r - 1$ sussistono per ipotesi le (8.4), da $\underset{\alpha}{\Gamma} D f = D \underset{\alpha}{\Gamma} f$ segue

$$a^{k_1 \dots k_r}(\underset{\alpha}{\gamma}^{-1} x) = a^{h_1 \dots h_r}(x)\, \underset{\alpha}{\overset{*}{\gamma}}{}^{k_1}_{h_1} \dots \underset{\alpha}{\overset{*}{\gamma}}{}^{k_r}_{h_r}, \qquad (x \in A)$$

e pertanto, per l'arbitrarietà di $k_1 \dots k_r$, restano dimostrate le (8.4) e, di conseguenza, le (8.2).

Fissati due numeri positivi r e ϱ tali che $0 < r < \varrho$, sia A il campo sferico definito da $|x| < \varrho$ oppure lo strato sferico definito da $r < |x| < \varrho$. Sia $\mathcal{O}$ il gruppo di tutte le congruenze di E^n in sè che lasciano fisso l'origine, $\mathcal{R}$ il sottogruppo delle rotazioni attorno all'origine.

Gli operatori (8.1) invarianti rispetto ai gruppi $\mathcal{R}$ (ovvero $\mathcal{O}$), coincidono con gli operatori isotropi (ovvero isotropi e simmetrici) studiati da G. Ascoli ([20]) e da lui caratterizzati.

Esaminiamo ora il caso di operatori differenziali lineari vettoriali. Si considerino n^2 operatori differenziali lineari (scalari) di ordine non superiore a p

$$D^i_j = \sum_{s=0}^{p} \sum_{h_1 \dots h_s} a^{i,h_1 \dots h_s}_j(x) \frac{\partial^s}{\partial x^{h_1} \dots \partial x^{h_s}} \qquad (i, j = 1, \dots, n) \,, \tag{8.5}$$

e a coefficienti continui in A. Si può supporre, senza restrizione, $a^{i,h_1 \dots h_s}_j(x) = a^{i,k_1 \dots k_s}_j(x)$ se $k_1 \dots k_s$ è una permutazione di $h_1 \dots h_s$. Sia L l'operatore differenziale vettoriale determinato dalla matrice (D^i_j). L opera sui vettori ad n componenti di $C^\infty(A)$ facendo corrispondere al vettore $v(x)$ il vettore $(Lv)(x)$ di componenti

$$(Lv)^i(x) = D^i_j v^j(x) \qquad (i = 1, \dots, n) \,. \tag{8.6}$$

L'operatore L definito dalle (8.6) può riguardarsi come un operatore lineare definito nel sottospazio $C^\infty(A)$ dello spazio $\mathcal{M}(A)$ dei vettori ad n componenti, a valori in $\mathcal{M}(A)$.

Supponiamo dapprima che L sia un operatore *omogeneo di grado* s, cioè che

$$D^i_j = \sum_{h_1 \dots h_s} a^{i,h_1 \dots h_s}_j(x) \frac{\partial^s}{\partial x^{h_1} \dots \partial x^{h_s}} \,. \tag{8.7}$$

Sussiste il seguente teorema

II. *L'operatore differenziale L omogeneo di grado s definito dalle* (8.6) *e* (8.7) *è invariante rispetto al gruppo G se e solo se, per ogni scelta degli indici $i, j, h_1, \dots, h_s$, risulta, in ogni punto x di A e per ogni matrice $\underset{\alpha}{\gamma}$ $(\alpha \in \mathfrak{J})$*

$$a^{i,h_1 \dots h_s}_j(\underset{\alpha}{\gamma} x) = a^{l,r_1 \dots r_s}_k(x) \underset{\alpha}{\gamma}{}^i_l \underset{\alpha}{\gamma}{}^{h_1}_{r_1} \dots \underset{\alpha}{\gamma}{}^{h_s}_{r_s} \overset{*}{\underset{\alpha}{\gamma}}{}^k_j \; ([21]) \,. \tag{8.8}$$

([20]) Si confronti [I]$_1$ n. 14.

([21]) Se le (1.1) si interpretano come un cambiamento di coordinate in E^n, le (8.8) esprimono che i coefficienti di L si comportano come le componenti di un tensore.

Dim. Per l'arbitrarietà di x in A, le relazioni (8.8) possono sostituirsi con

$$a_j^{i,h_1\dots h_s}(x) = a_k^{l,r_1\dots r_s}(\overset{*}{\underset{\alpha}{\gamma}}x)\underset{\alpha}{\gamma}{}_l^i\,\underset{\alpha}{\gamma}{}_{r_1}^{h_1}\cdots\underset{\alpha}{\gamma}{}_{r_s}^{h_s}\,\overset{*}{\gamma}{}_j^k\,. \tag{8.9}$$

Inoltre, moltiplicando i due membri di (8.9) per $\underset{\alpha}{\gamma}{}_z^j\,\overset{*}{\underset{\alpha}{\gamma}}{}_{t_1}^{r_1}\cdots\overset{*}{\underset{\alpha}{\gamma}}{}_{t_s}^{r_s}$ e sommando rispetto agli indici $j, r_1 \dots r_s$ si trae

$$a_k^{l,r_1,\dots,r_s}(\overset{*}{\underset{\alpha}{\gamma}}x)\underset{\alpha}{\gamma}{}_l^i = a_j^{i,h_1\dots h_s}(x)\underset{\alpha}{\gamma}{}_k^j\,\overset{*}{\gamma}{}_{h_1}^{r_1}\cdots\overset{*}{\gamma}{}_{h_s}^{r_s}\,. \tag{8.10}$$

Pertanto il sussistere delle (8.8) per ogni scelta degli indici $i, j, h_1, \dots, h_s$, equivale al sussistere delle (8.10) per ogni scelta di $i, k, r_1, \dots, r_s$, naturalmente per ogni $\alpha \in \mathfrak{J}$ e per ogni $x \in A$. Si osservi inoltre che lo spazio $C^\infty(A)$ è invariante rispetto al gruppo $\mathcal{G}(G)$, in base al teorema II del n. **4**.

Ciò premesso, sia Γ la trasformazione lineare associata ad un elemento γ di $\tilde{G}$. Posto $x' = \gamma^{-1}x$, per ogni vettore $v \in C^\infty(A)$, le componenti i-esime dei vettori ΓLv e $L\Gamma v$ sono date da

$$(\Gamma Lv)^i = \gamma_l^i \sum_{r_1\dots r_s} a_k^{l,r_1\dots r_s}(\gamma^{-1}x)\left[\frac{\partial^s v^k(x)}{\partial x^{r_1}\dots\partial x^{r_s}}\right]_{x=x'} ,$$

$$(L\Gamma v)^i = \sum_{h_1\dots h_s} a_j^{i,h_1\dots h_s}(x)\,\gamma_k^j\,\frac{\partial^s v^k(\gamma^{-1}x)}{\partial x^{h_1}\dots\partial x^{h_s}}$$

$$= \sum_{h_1\dots h_s} a_j^{i,h_1\dots h_s}(x)\,\gamma_k^j\,\overset{*}{\gamma}{}_{h_1}^{r_1}\cdots\overset{*}{\gamma}{}_{h_s}^{r_s}\left[\frac{\partial^s v^k(x)}{\partial x^{r_1}\dots\partial x^{r_s}}\right]_{x=x'} .$$

Ne segue che, se sono verificate le relazioni (8.10) per ogni $x \in A$, e per ogni $\alpha \in \mathfrak{J}$ e per ogni scelta degli indici $i, k, r_1, \dots, r_s$, risulta

$$\underset{\alpha}{\Gamma}Lv = L\underset{\alpha}{\Gamma}v \tag{8.11}$$

per ogni $v \in C^\infty(A)$ e quindi, in base al teorema VII del n. **4**, L è invariante rispetto a G.

Viceversa, sia L invariante rispetto a G e quindi siano verificate le (8.11). Sia $r_1 \dots r_s$ una disposizione arbitraria con ripetizione di s indici fra $1, \dots, n$. Si considerino i vettori $v_{(k)}$ di componenti $x^{r_1}\dots x^{r_s}\delta_k^i$ $(k, i = 1, \dots, n)$. Ponendo $\underset{\alpha}{\Gamma}Lv_{(k)} = L\underset{\alpha}{\Gamma}v_{(k)}$, si ha

$$\forall_{j,k}\quad \underset{\alpha}{\gamma}{}_l^i\,a_k^{l,r_1,\dots,r_s}(\overset{*}{\underset{\alpha}{\gamma}}x) = a_j^{i,h_1\dots h_s}(x)\underset{\alpha}{\gamma}{}_k^j\,\overset{*}{\underset{\alpha}{\gamma}}{}_{h_1}^{r_1}\cdots\overset{*}{\underset{\alpha}{\gamma}}{}_{h_s}^{r_s},$$

in ogni punto x di A. Per l'arbitrarietà di $r_1 \dots r_s$ e di α in $\mathfrak{J}$, è dimostrato il sussistere delle (8.10). È così provato l'asserto.

Sia ora L un operatore differenziale definito dalle (8.5) e (8.6). È ovvio che si può porre $L = L_0 + L_1 + \dots + L_p$, con L_s $(s = 0, \dots, p)$ operatore omogeneo di ordine s. Sussiste il seguente teorema

III. *Condizione necessaria e sufficiente perchè L sia invariante rispetto a G, è che ciascun operatore L_s $(s = 0, 1, \dots, p)$ sia invariante rispetto a G.*

Dim. La condizione sufficiente è conseguenza del teorema IX del n. 4. Per la necessità, supposto L invariante rispetto a G, dalle relazioni $\Gamma L v = L \Gamma v$ per ogni $\Gamma \in \mathcal{C}(G)$ e per ogni $v \in C^\infty(A)$, si trae, posto $x' = \gamma^{-1}x$,

$$(8.12) \qquad \gamma^i_l \sum_{s=0}^{p} \sum_{r_1 \dots r_s} a_k^{l, r_1 \dots r_s}(\gamma^{-1}x) \left[\frac{\partial^s v^k(x)}{\partial x^{r_1} \dots \partial x^{r_s}}\right]_{x=x'} =$$

$$= \sum_{s=0}^{p} a_j^{i, h_1 \dots h_s}(x) \gamma^j_k \overset{*}{\gamma}{}^{r_1}_{h_1} \dots \overset{*}{\gamma}{}^{r_s}_{h_s} \left[\frac{\partial^s v^k(x)}{\partial x^{r_1} \dots \partial x^{r_s}}\right]_{x=x'} .$$

Si osservi ora che, considerati gli n vettori $e_{(k)}$ $(k = 1, \dots, n)$ di componenti δ^i_k $(i = 1, \dots, n)$, ponendo nelle (8.12) $v = e_{(k)}$ si ottengono le relazioni

$$\gamma^i_l \overset{*}{a}{}^l_k(\gamma x) = a^i_j(x) \gamma^j_k ,$$

per ogni i, k, per ogni $\gamma \in \tilde{G}$ e in ogni punto x di A. In base al teorema precedente, ricordando l'equivalenza delle (8.8) con le (8.10), si conclude che L_0 è invariante rispetto a G. Procedendo per induzione rispetto a s, si supponga che $L_0, \dots, L_{s-1}$, siano invarianti rispetto a G. Fissata arbitrariamente una disposizione $r_1 \dots r_s$, si considerino gli n vettori $v_{(k)}$ di componenti $x^{r_1} \dots x^{r_s} \delta^i_k$ $(i = 1, \dots, n)$ e si applichino ad essi le (8.12). Per l'induzione ammessa si ottiene

$$\forall_{i,k} \; \gamma^i_l \overset{*}{a}{}_k^{l, r_1 \dots r_s}(\gamma x) = a_j^{i, h_1 \dots h_s}(x) \gamma^j_k \overset{*}{\gamma}{}^{r_1}_{h_1} \dots \overset{*}{\gamma}{}^{r_s}_{h_s} ,$$

per ogni $\gamma \in \tilde{G}$ e in ogni punto x di A. In base al teorema precedente, L_s è allora invariante rispetto a G.

Sia ora L un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti: è naturale riguardare L come un operatore definito nello spazio $C^\infty(E^n)$, a valori in $C^\infty(E^n)$ (22). D'altra parte, fissato arbitrariamente un aperto connesso A, L può

(22) La definizione di operatore (vettoriale) invariante rispetto ad un gruppo G coincide allora con quella consueta. Si confronti [2]$_1$, n. 2.

essere riguardato come un operatore definito in $C^\infty(A)$, a valori in $C^\infty(A)$. Dalla definizione di operatore invariante rispetto ad un gruppo di congruenze (n. **4**) segue

IV. *Se L, come operatore dello spazio $C^\infty(E^n)$, è invariante rispetto ad un gruppo di congruenze G^*, allora L, come operatore dello spazio $C^\infty(A)$, è invariante rispetto a $G^* \cap G_A$.*

In particolare, se L, come operatore di $C^\infty(E^n)$, è invariante rispetto al gruppo $\mathcal{O}$ di tutte le congruenze (1.1), allora L, pensato come operatore di $C^\infty(A)$, è invariante rispetto al gruppo G_A di tutte le congruenze di $\mathcal{O}$ che lasciano fisso A.

Bibliografia

[1] G. ASCOLI: $[\bullet]_1$ *Sopra i sistemi lineari isotropi e le loro proprietà integrali*, Comm. Acc. Pontificia VII 1942; $[\bullet]_2$ *Nuclei isotropi e loro autofunzioni*, Atti Acc. Naz. Lincei (8) **1** (1946), 1167-1180.

[2] L. BASSOTTI: $[\bullet]_1$ *Sottospazi invarianti per operatori differenziali lineari a coefficienti costanti*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **22** (1973), 157-184; $[\bullet]_2$ *Sulle decomposizioni di alcuni spazi funzionali in somma diretta di sottospazi mutuamente ortogonali*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. (8) **56** (1974), 13-21.

[3] G. FICHERA, *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*, Lecture Notes in Mathematics VIII, Springer Verlag, Berlin 1965.

[4] SMIRNOV, *Linear Algebra and Group Theory*, Mc Graw-Hill, 1961.

[5] G. F. SMITH: *Projection operators for symmetric regions*, Arch. Rational Mech. Anal. **54** (1974).

[6] M. TANZI CATTABIANCHI, *Caratterizzazione degli operatori integrali di Fredholm invarianti rispetto a gruppi di congruenze nel piano*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **3** (1977), 233-245.

[7] N. Ja. VILENKIN, *Fonctions speciales et théorie de la représentation des groupes*, Dunod, Paris 1969.

[8] E. P. WIGNER, *Group theory*, Acad. Press, 1959.

Summary

Let A be an open subset of E^n, $\mathcal{O}(n)$ the group of all orthogonal transformations of E^n, G a subgroup of $\mathcal{O}(n)$, consisting of transformations mapping A into itself. Let $\mathcal{M}(A)$ be the linear space of the measurable vector-valued functions, defined on A.

In the present paper G-invariant linear operators on $\mathcal{M}(A)$ are defined and some results about them are given. Characterization theorems concerning the linear differential and integral G-invariant operators are also obtained.

* * *