

ITALO FERRARI e VALTER FRANCESCHINI (*)

**Sul controllo del moto
di un particolare sistema di girostati (**)**

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. - Introduzione

Descrizione del sistema meccanico. Si tratta di un « carrello » snodato formato da due girostati uguali (G_1) e (G_2) uniti da un telaio rigido. Il girostato (G_1), (si veda fig. 1), è costituito da

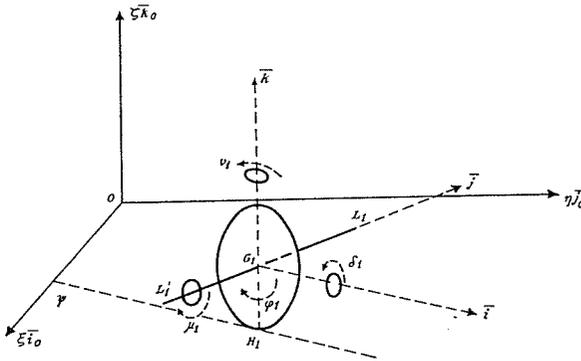


Figura 1

— una carcassa (scatola) ⁽¹⁾ di baricentro G_1 , contenente una ruota (disco)

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, 41100 Modena, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 4-XII-1978.

⁽¹⁾ Non disegnata in Fig. 1 per semplicità.

con assale $L_1 G_1 L_1'$, omogeneo, baricentrico, ortogonale e simmetrico rispetto al disco, di lunghezza $2l$;

— tre giroscopi uguali, connessi alla carcassa mediante i loro assi baricentrici e mutuamente ortogonali.

La ruota, di centro G_1 e raggio a , appoggia (passando attraverso un'apertura della scatola) in H_1 ortogonalmente ad un piano fisso (ξ, η) che forma un angolo α costante con un piano orizzontale. La carcassa, strutturata in modo che il baricentro del giostato, di massa complessiva m , sia G_1 ⁽²⁾, è sostenuta dalla ruota mediante il suo assale e si muove di moto rigido piano sfiorando il piano (ξ, η) senza toccarlo.

Il carrello è allora costituito da due giostati del tipo suddetto con interposta un'asta rigida (telaio) $L_1 L_2$, di massa M , lunghezza $2b$, con baricentro il punto medio Q e collegata mediante due giunti « sferici » (cioè capaci ciascuno di una reazione con tre componenti) ai due estremi L_1 ed L_2 degli assali delle due ruote (si veda fig. 2).

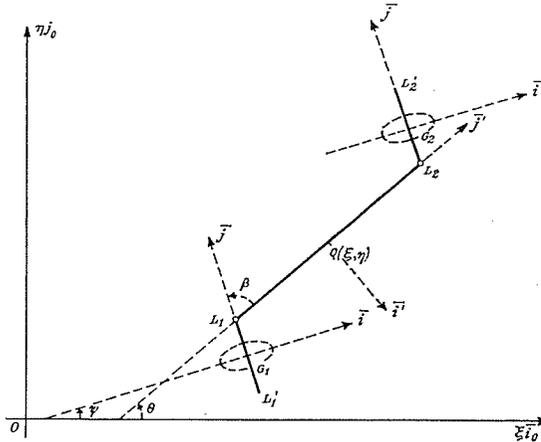


Figura 2

Vincoli. Le ruote, oltre a rotolare senza strisciare ortogonalmente al piano (ξ, η) , indipendentemente una dall'altra in virtù dei giunti, sono sempre parallele fra loro da parti opposte rispetto all'asta (carrello « simmetrico ») ⁽³⁾, per cui anche i loro assali sono paralleli ma, in generale, non allineati. Ciò com-

⁽²⁾ Il moto di un tale giostato, pesante ed opportunamente sollecitato, è stato studiato in [1].

⁽³⁾ Le due ruote potrebbero essere dalla stessa parte dell'asta (carrello « asimmetrico »), ma di questo non ci occuperemo.

porta, (cfr. [2]₃), che l'asta L_1L_2 trasla qualunque sia la sollecitazione attiva. Per ragioni di simmetria, Q è il baricentro di tutto il sistema.

Momenti d'inerzia. Avremo bisogno dei seguenti momenti d'inerzia, tutti costanti rispetto al tempo.

I_R momento d'inerzia di ciascuna ruota rispetto al proprio assale;

I momento d'inerzia di ciascun giroscopio rispetto al proprio asse;

C momento d'inerzia di ciascun giostato rispetto all'asse baricentrico e normale al piano d'appoggio;

$$\mathcal{I} = ma^2 + I_R; \mathcal{I}^* = Ma^2/2 + \mathcal{I}.$$

Sistemi di riferimento. Introduciamo le seguenti terne destre.

$O(\xi\mathbf{i}_0, \eta\mathbf{j}_0, \zeta\mathbf{k}_0)$ fissa col piano d'appoggio (ξ, η) , con $\xi\mathbf{i}_0$ coincidente con una linea di terra e con $\eta\mathbf{j}_0$ retta di massimo pendio, ascendente rispetto al peso;

$G_1(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ solidale con la carcassa di (G_1) ed individuata dagli assi dei tre giroscopi in modo che sia $G_1 - H_1 = a\mathbf{k} = a\mathbf{k}_0$, $L_1 - G_1 = l\mathbf{j}$, \mathbf{i} orientato di conseguenza;

$G_2(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ solidale con la carcassa di (G_2) ed equipollente alla terna precedente;

$Q(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ solidale con l'asta L_1L_2 , con $\mathbf{k}' = \mathbf{k} = \mathbf{k}_0$, $L_2 - L_1 = 2b\mathbf{j}'$, \mathbf{i}' orientato di conseguenza.

Parametri. Introduciamo i seguenti parametri sovrabbondanti.

ξ, η coordinate assolute del baricentro Q (la terza coordinata è a);

$\theta = \widehat{\mathbf{i}_0\mathbf{j}'}$ angolo d'orientamento dell'asta $L_2 - L_1$;

$\beta = \widehat{\mathbf{j}'\mathbf{j}}$ angolo che gli assali $L_1 - G_1$ e $G_2 - L_2$ formano con l'asta $L_2 - L_1$;

$\psi = \widehat{\mathbf{i}_0\mathbf{i}}$ angolo d'orientamento delle due ruote, levogiri rispetto a \mathbf{k} , come θ e β ;

φ_1, φ_2 angoli di rotazione propria delle due ruote, levogiri rispetto a \mathbf{j} ;

δ_1, μ_1, ν_1 angoli di rotazione propria dei tre giroscopi del giostato (G_1) , levogiri rispetto a $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rispettivamente;

δ_2, μ_2, ν_2 angoli di rotazione propria dei tre giroscopi del giostato (G_2) , anch'essi levogiri rispetto ai relativi versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Si tratta di 13 parametri, legati da vincoli olonomi ed anolonomi ai quali si accenna qui di seguito.

Considerazioni cinematiche. Senza entrare in dettagli, per i quali rinviamo alla nota [2]₃, abbiamo che

— la velocità angolare ω di ciascun girostato è

$$(1) \quad \omega = \dot{\psi} \mathbf{k};$$

— le velocità dei baricentri sono

$$(2) \quad \mathbf{v}(G_1) = a\dot{\varphi}_1 \mathbf{i},$$

$$(3) \quad \mathbf{v}(G_2) = a\dot{\varphi}_2 \mathbf{i},$$

$$(4) \quad \mathbf{v}(Q) = \dot{\xi} \mathbf{i}_0 + \dot{\eta} \mathbf{j}_0;$$

— i vincoli olonomi sono tre

$$(5) \quad \theta = \theta_0,$$

$$(6) \quad \beta = \psi - \theta_0 + \frac{\pi}{2}, \quad (\text{e quindi } \dot{\beta} = \dot{\psi}),$$

$$(7) \quad \dot{\psi} = \frac{a}{2l} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2);$$

— i vincoli anolonomi del puro rotolamento delle due ruote sono due

$$(8) \quad \dot{\xi} = \frac{a}{2} (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cos \psi, \quad \dot{\eta} = \frac{a}{2} (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \sin \psi,$$

esprimenti il moto del baricentro Q del carrello.

I gradi di libertà del sistema, tenuto conto di (5), (6), (7) sono $13 - 3 = 10$. Il vincolo (5) esprime il fatto che l'asta $L_1 L_2$ trasla qualunque sia la sollecitazione attiva, il vincolo (6) esprime una relazione fra gli angoli ψ , β , θ , deducibile con semplici considerazioni geometriche, mentre (7) è una delle equazioni del moto.

È opportuno osservare che, noti $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$, la (7) determina $\psi(t)$ e le (8), previa integrazione, determinano $\xi(t)$ ed $\eta(t)$, cioè il moto del baricentro. Vice-

versa, note $\xi(t)$ ed $\eta(t)$, dalle (8) si ha

$$\psi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\dot{\eta}}{\dot{\xi}}, \quad \frac{a}{2}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) = \dot{\xi} \cos \psi + \dot{\eta} \sin \psi.$$

Quest'ultima relazione, con la (7), determina $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$. *Il vincolo di puro rotolamento fa quindi sì che il moto rispetto al baricentro determini il moto del baricentro stesso e viceversa: ciò spiega come coi moti (interni) dei giroscopi, influenzando sulle reazioni esterne, sia possibile « guidare » il moto (esterno) del sistema.*

Forze attive. Oltre al peso il carrello sia soggetto a forze attive esterne, applicate all'asta L_1L_2 ed aventi vettori caratteristici

$$(9) \quad \begin{aligned} \mathbf{R} &= R_x \mathbf{i}_0 + R_y \mathbf{j}_0 + R_z \mathbf{k}_0, \\ \Omega(Q) &= \Omega' \mathbf{i}' + \Omega_z \mathbf{k}' \quad (^4) = \Omega' \sin \theta_0 \mathbf{i}_0 - \Omega' \cos \theta_0 \mathbf{j}_0 + \Omega_z \mathbf{k} \end{aligned}$$

arbitrari.

Inoltre, posto

$$f^0 = -mg \sin \alpha, \quad f_0 = -mg \cos \alpha, \quad p^0 = -Mg \sin \alpha, \quad p_0 = -Mg \cos \alpha,$$

il peso di ciascun giostato si scrive

$$(10) \quad m\mathbf{g} = f^0 \sin \psi \mathbf{i} + f^0 \cos \psi \mathbf{j} + f_0 \mathbf{k},$$

e quello dell'asta L_1L_2

$$(11) \quad M\mathbf{g} = p^0 \mathbf{j}_0 + p_0 \mathbf{k}_0.$$

Reazioni vincolari. Si hanno due reazioni vincolari esterne (Φ_1, H_1) e (Φ_2, H_2) con

$$(12) \quad \Phi_1 = \phi_{1x} \mathbf{i} + \phi_{1y} \mathbf{j} + \phi_{1z} \mathbf{k}, \quad \Phi_2 = \phi_{2x} \mathbf{i} + \phi_{2y} \mathbf{j} + \phi_{2z} \mathbf{k},$$

(⁴) La componente di $\Omega(Q)$ lungo l'asta è nulla poichè tutte le forze sono applicate all'asta.

e due reazioni vincolari interne (\mathbf{F}_1, L_1) e (\mathbf{F}_2, L_2) nei giunti sferici, con

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j} + F_{1z}\mathbf{k} = F_{1\xi}\mathbf{i}_0 + F_{1\eta}\mathbf{j}_0 + F_{1z}\mathbf{k}_0, \\ \mathbf{F}_2 &= F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{2z}\mathbf{k} = F_{2\xi}\mathbf{i}_0 + F_{2\eta}\mathbf{j}_0 + F_{2z}\mathbf{k}_0, \end{aligned}$$

dove

$$(14) \quad \begin{aligned} F_{1\xi} &= F_{1x} \cos \psi - F_{1y} \sin \psi, & F_{1\eta} &= F_{1x} \sin \psi + F_{1y} \cos \psi, \\ F_{2\xi} &= F_{2x} \cos \psi - F_{2y} \sin \psi, & F_{2\eta} &= F_{2x} \sin \psi + F_{2y} \cos \psi. \end{aligned}$$

Le ϕ_1 e ϕ_2 debbono poi soddisfare la relazione dell'attrito

$$(15) \quad \sqrt{\phi_{1x}^2 + \phi_{1y}^2} \leq f |\phi_{1z}|, \quad \sqrt{\phi_{2x}^2 + \phi_{2y}^2} \leq f |\phi_{2z}|,$$

con f coefficiente d'attrito.

2. - Le equazioni cardinali del moto

Scriviamo le equazioni cardinali della dinamica del sistema. Il teorema del moto assoluto del baricentro G_1 del girostato (G_1) , scritto rispetto all'osservatore mobile $G_1(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$,

$$m \left[\frac{d\mathbf{v}(G_1)}{dt} \right]_1 + m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}(G_1) = mg + \mathbf{F}_1 + \boldsymbol{\phi}_1,$$

ricordando (1), (2), (10), (12), (13), diventa

$$(16) \quad \begin{aligned} m a \ddot{\varphi}_1 &= f^0 \sin \psi + F_{1x} + \phi_{1x}, & m a \dot{\psi} \dot{\varphi}_1 &= f^0 \cos \psi + F_{1y} + \phi_{1y}, \\ 0 &= f_0 + F_{1z} + \phi_{1z}. \end{aligned}$$

Il teorema del momento delle quantità di moto assoluto del girostato (G_1) , scritto anch'esso rispetto all'osservatore mobile $G_1(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$

$$\left[\frac{d\mathbf{K}(G_1)}{dt} \right]_1 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}(G_1) = \mathbf{F}_1 \times (G_1 - L_1) + \boldsymbol{\phi}_1 \times (G_1 - H_1),$$

dove

$$\mathbf{K}(G_1) = I \dot{\delta}_1 \mathbf{i} + (I_R \dot{\varphi}_1 + I \dot{\mu}_1) \mathbf{j} + (C \dot{\psi} + I \dot{\nu}_1) \mathbf{k},$$

diventa

$$(17) \quad \begin{aligned} I\ddot{\delta}_1 - \dot{\psi}(I_R\dot{\varphi}_1 + I\dot{\mu}_1) &= lF_{1z} + a\phi_{1y}, & I_R\ddot{\varphi}_1 + I\ddot{\mu}_1 + I\dot{\psi}\dot{\delta}_1 &= -a\phi_{1x}, \\ C\ddot{\psi} + I\ddot{\nu}_1 &= -lF_{1x}. \end{aligned}$$

In modo analogo, ricordando (1), (3), (10), (12), (13), per il secondo girostato si ottiene

$$(18) \quad \begin{aligned} ma\ddot{\varphi}_2 &= f^0 \sin \psi + F_{2x} + \phi_{2x}, & ma\dot{\psi}\dot{\varphi}_2 &= f^0 \cos \psi + F_{2y} + \phi_{2y}, \\ 0 &= f_0 + F_{2z} + \phi_{2z}, \end{aligned}$$

$$(19) \quad \begin{aligned} I\ddot{\delta}_2 - \dot{\psi}(I_R\dot{\varphi}_2 + I\dot{\mu}_2) &= -lF_{2z} + a\phi_{2y}, \\ I_R\ddot{\varphi}_2 + I\ddot{\mu}_2 + I\dot{\psi}\dot{\delta}_2 &= -a\phi_{2x}, & C\ddot{\psi} + I\ddot{\nu}_2 &= lF_{2x}. \end{aligned}$$

Scriviamo ora il teorema del moto assoluto del baricentro Q dell'asta L_1L_2

$$M \frac{d\mathbf{v}(Q)}{dt} = M\mathbf{g} - \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 + \mathbf{R}.$$

Ricordando (4), (8), (9), (11), (13), (14), si ottiene

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{Ma}{2} [(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) \cos \psi - (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \dot{\psi} \sin \psi] &= -(F_{1x} + F_{2x}) \cos \psi \\ &\quad + (F_{1y} + F_{2y}) \sin \psi + R_x, \\ \frac{Ma}{2} [(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) \sin \psi + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \dot{\psi} \cos \psi] &= -(F_{1x} + F_{2x}) \sin \psi \\ &\quad - (F_{1y} + F_{2y}) \cos \psi + R_y + p^0. \\ p_0 + R_z - F_{1z} - F_{2z} &= 0. \end{aligned}$$

Nel teorema del momento delle quantità di moto dell'asta L_1L_2 ,

$$(20)' \quad \frac{d\mathbf{K}(Q)}{dt} = -\mathbf{F}_1 \times (Q - L_1) - \mathbf{F}_2 \times (Q - L_2) + \boldsymbol{\Omega}(Q),$$

ricordato che l'asta trasla, è $\mathbf{K}(Q) = 0$; inoltre

$$Q - L_1 = b\mathbf{j}' = b \cos \theta_0 \mathbf{i}_0 + b \sin \theta_0 \mathbf{j}_0, \quad Q - L_2 = -b\mathbf{j}' = -b \cos \theta_0 \mathbf{i}_0 - b \sin \theta_0 \mathbf{j}_0.$$

Tenuto conto di (9) e (13), la (20)' diventa

$$(21) \quad \begin{aligned} b \operatorname{sen} \theta_0 (F_{1z} - F_{2z}) + \Omega' \operatorname{sen} \theta_0 &= 0, & b \cos \theta_0 (F_{2z} - F_{1z}) - \Omega' \cos \theta_0 &= 0, \\ b(F_{1\eta} \cos \theta_0 - F_{1\xi} \operatorname{sen} \theta_0) + b(F_{2\xi} \operatorname{sen} \theta_0 - F_{2\eta} \cos \theta_0) + \Omega_z &= 0. \end{aligned}$$

Ma (21)_I e (21)_{II} sono equivalenti all'unica equazione

$$(22) \quad b(F_{1z} - F_{2z}) + \Omega' = 0.$$

L'equazione (21)_{III}, tramite le (14), si può scrivere

$$(23) \quad b[(F_{1x} - F_{2x}) \operatorname{sen} (\psi - \theta_0) + (F_{1y} - F_{2y}) \cos (\psi - \theta_0)] + \Omega_z = 0.$$

Si hanno così 18 equazioni (7), (16), (17), (18), (19), (20), (22), (23), nelle 21 incognite ψ , φ_1 , φ_2 , δ_1 , μ_1 , ν_1 , δ_2 , μ_2 , ν_2 , F_{1x} , F_{1y} , F_{1z} , F_{2x} , F_{2y} , F_{2z} , ϕ_{1x} , ϕ_{1y} , ϕ_{1z} , ϕ_{2x} , ϕ_{2y} , ϕ_{2z} , con 9 parametri e 12 reazioni scalari. A queste 18 equazioni vanno aggiunte le due relazioni dell'attrito (15) che, per assicurare il puro rotolamento delle due ruote, costituiscono delle limitazioni per \mathbf{R} , $\mathbf{\Omega}$, α e le condizioni iniziali, in quanto ad ogni soluzione dinamica corrispondono delle ϕ_1 , ϕ_2 (funzioni di \mathbf{R} , $\mathbf{\Omega}$, α e dei parametri) soddisfacenti le (15) in ogni istante e quindi, in particolare, anche per $t = 0$.

3. - Separazione delle reazioni dai parametri

Da (17)_{III} e (19)_{III} si deduce immediatamente

$$(24) \quad F_{1x} = -\frac{1}{l} (C\ddot{\psi} + I\ddot{\nu}_1), \quad F_{2x} = \frac{1}{l} (C\ddot{\psi} + I\ddot{\nu}_2).$$

Da (20)_{III} e (22), con operazioni di somma e sottrazione, si ottiene

$$(25) \quad F_{1z} = \frac{1}{2} (p_0 + R_z - \frac{\Omega'}{b}), \quad F_{2z} = \frac{1}{2} (p_0 + R_z + \frac{\Omega'}{b}).$$

Da (16)_{III} e (18)_{III}, tenuto conto delle (25), si ricavano

$$(26) \quad \phi_{1z} = -\frac{1}{2} (2f_0 + p_0 + R_z - \frac{\Omega'}{b}), \quad \phi_{2z} = -\frac{1}{2} (2f_0 + p_0 + R_z + \frac{\Omega'}{b}),$$

mentre da (17)_I e (19)_I seguono

$$(27) \quad \begin{aligned} \phi_{1y} &= \frac{1}{a} [I\ddot{\delta}_1 - (I_R\dot{\phi}_1 + I\dot{\mu}_1)\dot{\psi} - \frac{l}{2}(R_z + p_0 - \frac{\Omega'}{b})], \\ \phi_{2y} &= \frac{1}{a} [I\ddot{\delta}_2 - (I_R\dot{\phi}_2 + I\dot{\mu}_2)\dot{\psi} + \frac{l}{2}(R_z + p_0 + \frac{\Omega'}{b})]. \end{aligned}$$

Le (17)_{II} e (19)_{II} forniscono poi

$$(28) \quad \phi_{1x} = -\frac{1}{a} (I_R\ddot{\phi}_1 + I\ddot{\mu}_1 + I\dot{\psi}\dot{\delta}_1), \quad \phi_{2x} = -\frac{1}{a} (I_R\ddot{\phi}_2 + I\ddot{\mu}_2 + I\dot{\psi}\dot{\delta}_2).$$

Infine, da (16)_{II} e (18)_{II}, tenuto conto delle (27), risulta

$$(29) \quad \begin{aligned} F_{1y} &= ma\dot{\psi}\dot{\phi}_1 - \frac{1}{a} [I\ddot{\delta}_1 - (I_R\dot{\phi}_1 + I\dot{\mu}_1)\dot{\psi} - \frac{l}{2}(R_z + p_0 - \frac{\Omega'}{b})] - f^0 \cos \psi, \\ F_{2y} &= ma\dot{\psi}\dot{\phi}_2 - \frac{1}{a} [I\ddot{\delta}_2 - (I_R\dot{\phi}_2 + I\dot{\mu}_2)\dot{\psi} + \frac{l}{2}(R_z + p_0 + \frac{\Omega'}{b})] - f^0 \cos \psi. \end{aligned}$$

Andiamo ora a ricavare le equazioni del moto nei soli parametri. Da (16)_I, sostituendovi (24)_I e (28)_I, e moltiplicando per a , si ottiene

$$(30) \quad (ma^2 + I_R)\ddot{\phi}_1 + \frac{aC}{l}\ddot{\psi} + I\dot{\psi}\dot{\delta}_1 + I\ddot{\mu}_1 + \frac{aI}{l}\ddot{v}_1 = af^0 \sin \psi.$$

Analogamente, dalla (18)_I, sostituendovi (24)_{II} e (28)_{II}, moltiplicando per a , si ricava

$$(31) \quad (ma^2 + I_R)\ddot{\phi}_2 - \frac{aC}{l}\ddot{\psi} + I\dot{\psi}\dot{\delta}_2 + I\ddot{\mu}_2 - \frac{aI}{l}\ddot{v}_2 = af^0 \sin \psi.$$

Moltiplichiamo ora la (20)_I per $\cos \psi$ e la (20)_{II} per $\sin \psi$, sommiamo membro a membro e sostituiamo a F_{1x} e F_{2x} le loro espressioni (24). Otteniamo

$$(32) \quad \frac{Ma}{2}(\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2) + \frac{I}{l}(\ddot{v}_2 - \ddot{v}_1) = R_z \cos \psi + (R_n + p^0) \sin \psi.$$

Sommate ancora membro a membro la (20)_I moltiplicata per $(-\sin \psi)$ e la (20)_{II} per $\cos \psi$, sostituite poi a F_{1y} , F_{2y} le loro espressioni (29), moltiplicando per a si ricava

$$(33) \quad \left(\frac{Ma^2}{2} + ma^2 + I_n\right) (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \dot{\psi} + I(\dot{\mu}_1 + \dot{\mu}_2) \dot{\psi} - I(\ddot{\delta}_1 + \ddot{\delta}_2) \\ = \frac{l}{b} \Omega' - aR_\xi \sin \psi + a(R_n + p^0 + 2f^0) \cos \psi.$$

Sostituite in (23) le espressioni di F_{1x} , F_{2x} , F_{1y} , F_{2y} fornite da (24) e (29), dopo aver moltiplicato per a , si ha

$$(34) \quad a\left[\frac{2C}{l} \ddot{\psi} + \frac{I}{l} (\ddot{v}_1 + \ddot{v}_2)\right] \sin(\theta_0 - \psi) + [(ma^2 + I_n)(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \dot{\psi} \\ - I(\ddot{\delta}_1 - \ddot{\delta}_2) + I(\dot{\mu}_1 - \dot{\mu}_2) \dot{\psi} + l(R_z + p_0)] \cos(\theta_0 - \psi) = -\frac{a}{b} \Omega_z.$$

Ricordate le espressioni di \mathcal{S} e \mathcal{S}^* e sostituite le equazioni (30) e (31) con le equazioni ottenute rispettivamente sommandole e sottraendole membro a membro, le equazioni del moto nei soli parametri possono essere riassunte nel seguente sistema

$$\dot{\psi} = \frac{a}{2l} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2), \\ \mathcal{S}(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + I\dot{\psi}(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) + I(\ddot{\mu}_1 + \ddot{\mu}_2) + \frac{aI}{l} (\ddot{v}_1 - \ddot{v}_2) = 2af^0 \sin \psi, \\ 2\left(\frac{l}{a} \mathcal{S} + \frac{a}{l} C\right) \ddot{\psi} + I\dot{\psi}(\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_2) + I(\ddot{\mu}_1 - \ddot{\mu}_2) + \frac{a}{l} I(\ddot{v}_1 + \ddot{v}_2) = 0, \\ \frac{Ma}{2} (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + \frac{I}{l} (\ddot{v}_2 - \ddot{v}_1) = R_\xi \cos \psi + (R_n + p^0) \sin \psi, \\ (35) \quad \mathcal{S}^* \dot{\psi} (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) + I\dot{\psi}(\dot{\mu}_1 + \dot{\mu}_2) - I(\ddot{\delta}_1 + \ddot{\delta}_2) \\ = \frac{l}{b} \Omega' - aR_\xi \sin \psi + a(R_n + p^0 + 2f^0) \cos \psi, \\ a\left[\frac{2C}{l} \ddot{\psi} + \frac{I}{l} (\ddot{v}_1 + \ddot{v}_2)\right] \sin(\theta_0 - \psi) \\ + \left[\frac{2l}{a} \mathcal{S} \dot{\psi}^2 - I(\ddot{\delta}_1 - \ddot{\delta}_2) + I\dot{\psi}(\dot{\mu}_1 - \dot{\mu}_2)\right] \cos(\theta_0 - \psi) \\ = -l(R_z + p_0) \cos(\theta_0 - \psi) - \frac{a}{b} \Omega_z.$$

Si tratta di un sistema di 6 equazioni nei 9 parametri $\psi, \varphi_1, \varphi_2, \delta_1, \mu_1, \nu_1, \delta_2, \mu_2, \nu_2$, con i primi 3 parametri « esterni » e i rimanenti 6 parametri « interni ».

Prima di proseguire è opportuno ricavare dal sistema (35) alcune relazioni che torneranno utili in seguito. La prima di tali relazioni si ottiene sostituendo in (35)_V l'espressione di $(\ddot{\nu}_1 + \ddot{\nu}_2)$ ricavata da (35)_{III}

$$(36) \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{2l\mathcal{J}}{a} \dot{\psi} \sin(\theta_0 - \psi) + I(\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_2) \cos(\theta_0 - \psi) + I(\dot{\mu}_1 - \dot{\mu}_2) \sin(\theta_0 - \psi) \right] \\ = l(p_0 + R_2) \cos(\theta_0 - \psi) + \frac{\Omega_z a}{b}.$$

Sommando membro a membro le equazioni (35)_{II} e (35)_{IV}, dopo aver moltiplicato quest'ultima per a , risulta

$$(37) \quad \mathcal{J}^*(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + I\dot{\psi}(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) + I(\ddot{\mu}_1 + \ddot{\mu}_2) \\ = aR_z \cos \psi + a(2f^0 + R_n + p^0) \sin \psi.$$

Moltiplicando adesso (37) per $\cos \psi$ e (35)_V per $(-\sin \psi)$ e sommando membro a membro, si ottiene

$$(38) \quad \frac{d}{dt} [\mathcal{J}^*(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cos \psi + I(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) \sin \psi + I(\dot{\mu}_1 + \dot{\mu}_2) \cos \psi] \\ = -\frac{l\Omega'}{b} \sin \psi + aR_z,$$

mentre moltiplicando (37) per $\sin \psi$ e (35)_V per $\cos \psi$, e sommando, si ha

$$(39) \quad \frac{d}{dt} [\mathcal{J}^*(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \sin \psi - I(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) \cos \psi + I(\dot{\mu}_1 + \dot{\mu}_2) \sin \psi] \\ = \frac{l\Omega'}{b} \cos \psi + a(2f^0 + p^0 + R_n).$$

Le relazioni (36), (38), (39), quando il peso è la sola forza esterna agente sul carrello, costituiscono degli integrali primi del moto.

4. - Considerazioni sulle equazioni differenziali del moto

Con una sollecitazione esterna generica, cioè con \mathbf{R} ed $\mathbf{\Omega}$ arbitrari, non si possono ovviamente fare che delle considerazioni qualitative basate sul bilancio

fra equazioni ed incognite nel sistema (35). A tale scopo si può procedere in vari modi. Anzitutto l'abbondanza di parametri fa pensare ad una sovrabbondanza di giroscopi; tuttavia, per conservare comode simmetrie nelle equazioni, piuttosto che eliminare alcuni giroscopi, sembra conveniente mantenerli tutti imponendo loro opportuni sincronismi. Senza avere la pretesa di esaurire tutta la casistica possibile ed osservato che il moto (esterno) del sistema è noto se si conoscono due delle tre funzioni $\psi(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ in quanto la terza è data dalla (35), accenniamo ad alcuni casi che ci sembrano particolarmente significativi.

(a) *Assegnati la sollecitazione ed il moto esterni* si possono considerare tre sottocasi sincronizzando i giroscopi su due assi omonimi, ossia imponendo

(a)' sugli assi (G_1, \mathbf{i}) e (G_2, \mathbf{i})

$$(40) \quad \dot{\delta}_1(t) = \dot{\delta}_2(t) = \dot{\delta}(t),$$

(a)'' oppure sugli assi (G_1, \mathbf{j}) e (G_2, \mathbf{j})

$$(41) \quad \dot{\mu}_1(t) = \dot{\mu}_2(t) = \dot{\mu}(t),$$

(a)''' oppure sugli assi (G_1, \mathbf{k}) e (G_2, \mathbf{k})

$$(42) \quad \dot{\nu}_1(t) = \dot{\nu}_2(t) = \dot{\nu}(t).$$

Nei primi due sottocasi il sistema (35) si riduce a 5 equazioni in 5 incognite per cui, imposte le condizioni iniziali, *ogni soluzione limitata* determina completamente il moto dei giroscopi, e quindi il moto del sistema. Nel sottocaso (a)''' invece l'equazione (35) diventa una condizione di compatibilità fra moto e sollecitazione esterni e perciò il sistema (35) si riduce a 4 equazioni nei 5 parametri ν , μ_1 , μ_2 , δ_1 , δ_2 . Per avere il bilancio fra equazioni ed incognite è allora necessaria, per esempio, un'ulteriore sincronizzazione fra due giroscopi su assi omonimi, ricadendo così in casi particolari di (a)' o di (a)''.

(b) *Assegnata la sollecitazione esterna*, si sincronizzano i giroscopi sugli assi omonimi, cioè si impongono le condizioni (40), (41), (42). Allora la soluzione del sistema (35), se limitata, determina il moto interno delle tre coppie di giroscopi indipendenti ed il moto esterno di tutto il sistema meccanico.

(c) *Assegnati la sollecitazione esterna, il parametro esterno $\psi(t)$ e le rotazioni uniformi dei due giroscopi sugli assi (G_1, \mathbf{k}) e (G_2, \mathbf{k})* , ossia

$$(43) \quad \dot{\nu}_1 = \dot{\nu}_{01}, \quad \dot{\nu}_2 = \dot{\nu}_{02},$$

con $\dot{\nu}_{01}$ e $\dot{\nu}_{02}$ costanti, allora (35)_I e (35)_{IV} determinano immediatamente $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$, cioè il moto esterno, dopodichè le rimanenti 4 equazioni di (35) determinano il moto interno degli altri 4 giroscopi.

5. - Caso pesante

In relazione ai casi prospettati nel n. 4, vediamo ora altrettanti esempi nell'ipotesi che sul carrello agiscano le sole forze peso e quindi sia

$$(44) \quad \mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{\Omega} = 0.$$

(a) Il moto esterno assegnato sia il seguente

$$(45) \quad \psi(t) = \dot{\psi}_0 t + \psi_0, \quad \dot{\psi}_0 \neq 0$$

$$\varphi_1(t) = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{a \dot{\psi}_0^2} \operatorname{sen} \psi + \lambda_{11} t + \lambda_{12}, \quad \varphi_2(t) = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{a \dot{\psi}_0^2} \operatorname{sen} \psi + \lambda_{21} t + \lambda_{22},$$

dove

$$\lambda_{11} = \dot{\varphi}_{10} - \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{a \dot{\psi}_0} \cos \psi_0, \quad \lambda_{21} = \dot{\varphi}_{20} - \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{a \dot{\psi}_0} \cos \psi_0,$$

$$\lambda_{12} = \varphi_{10} - \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{a \dot{\psi}_0^2} \operatorname{sen} \psi_0, \quad \lambda_{22} = \varphi_{20} - \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{a \dot{\psi}_0^2} \operatorname{sen} \psi_0,$$

con $\dot{\psi}_0$, $\dot{\varphi}_{10}$, $\dot{\varphi}_{20}$ soddisfacenti, in virtù di (35)_I, la relazione

$$(46) \quad \dot{\psi}_0 = \frac{a}{2l} (\dot{\varphi}_{10} - \dot{\varphi}_{20}).$$

Tale moto soddisfa al vincolo (7) ed è quello del carrello simmetrico visto in [2]₃. Qui ci limitiamo a ricordare (cfr. [2]_{1,2} che, su un piano inclinato, ($0 < \alpha < \pi/2$), il baricentro Q dell'asta $L_1 L_2$ percorre, in generale, una curva dotata di nodi e cuspidi, o di soli nodi, o di sole cuspidi, a seconda delle condizioni iniziali, con gli assali delle ruote che ruotano uniformemente attorno ai rispettivi giunti L_1 , L_2 . Se invece il piano d'appoggio è orizzontale ($\alpha = 0$) Q descrive, in generale, una circonferenza di centro e raggio determinati dalle condizioni iniziali. Può anche accadere (se $\dot{\varphi}_{10} = \dot{\varphi}_{20}$) che Q (e quindi l'asta) stia fermo, mentre le ruote ruotano uniformemente attorno ai rispettivi giunti.

L'assegnazione di questo moto esterno è di particolare interesse perchè proprio tale moto può essere riguardato come il moto « naturale » del carrello pesante. Infatti il carrello, privo dei giroscopi, e soggetto, oltre al peso, solo ad opportune forze atte a garantire il rispetto dei vincoli di puro rotolamento (8) e ad impedire il verificarsi di incompatibilità, nell'ipotesi $\dot{\psi}_0 \neq 0$, si muove esattamente in questo modo (cfr. [2]₃).

Infine, prima di andare a considerare ciascuno dei tre sottocasi (a)', (a)", (a)", osserviamo che in virtù delle ipotesi (44) e (45), la (35)_{IV} fornisce immediatamente

$$(47) \quad \ddot{v}_1 = \ddot{v}_2.$$

(a)' Tenuto conto delle ipotesi (40) e (44), le relazioni (38) e (39), integrate rispetto al tempo, forniscono i due integrali primi seguenti

$$(48) \quad \mathcal{I}^*(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cos \psi + 2I\dot{\delta} \sin \psi + I(\dot{\mu}_1 + \dot{\mu}_2) \cos \psi = A_1,$$

$$(49) \quad \mathcal{I}^*(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \sin \psi - 2I\dot{\delta} \cos \psi + I(\dot{\mu}_1 + \dot{\mu}_2) \sin \psi - a(2f^0 + p^0)t = A_2,$$

con A_1 ed A_2 costanti d'integrazione.

Da (48), (49) moltiplicate rispettivamente per $\sin \psi$, $(-\cos \psi)$ e poi per $\cos \psi$, $\sin \psi$, sommando membro a membro ed integrando, seguono

$$(50) \quad \delta(t) = \frac{-1}{2I\dot{\psi}_0} [a(2f^0 + p^0)(t \sin \psi + \frac{1}{\dot{\psi}_0} \cos \psi) + A_1 \cos \psi + A_2 \sin \psi] + A_3,$$

$$(51) \quad \mu_1(t) + \mu_2(t) = -\frac{1}{I} \mathcal{I}^*(\varphi_1 + \varphi_2) + \\ + \frac{1}{I\dot{\psi}_0} [a(2f^0 + p^0)(-t \cos \psi + \frac{1}{\dot{\psi}_0} \sin \psi) + A_1 \sin \psi - A_2 \cos \psi] + A_4,$$

con A_3 , A_4 costanti d'integrazione. A_1 , A_2 , A_3 , A_4 si calcolano imponendo le condizioni iniziali in (48), (49), (50), (51).

La relazione (36), considerate le ipotesi (40), (44), (45), integrata rispetto al tempo, fornisce l'integrale primo

$$(52) \quad \left[\frac{2l\mathcal{I}\dot{\psi}_0}{a} + I(\dot{\mu}_1 - \dot{\mu}_2) + \frac{l}{\dot{\psi}_0} p_0 \right] \sin(\theta_0 - \psi) = A_5.$$

Poichè (52) deve essere soddisfatta per qualunque t , e quindi anche per qualunque ψ , ed essendo il membro sinistro di questa uguaglianza nullo per

$\psi = \theta_0 + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ne consegue che la costante di integrazione A_5 è nulla. Di conseguenza si ha

$$(53) \quad \dot{\mu}_1 - \dot{\mu}_2 = -\frac{1}{I} \left(\frac{2l\mathcal{J}}{a} \dot{\psi}_0 + \frac{l}{\dot{\psi}_0} p_0 \right),$$

da cui

$$(54) \quad \ddot{\mu}_1 = \ddot{\mu}_2,$$

ossia i due giroscopi sugli assi \mathbf{j} sono dotati della stessa accelerazione angolare. Tenuto conto di (45) e (47), la (35)_{III} fornisce allora $\ddot{\nu}_1 = \ddot{\nu}_2 = 0$, cioè i due giroscopi sugli assi \mathbf{k} sono dotati di rotazione uniforme,

$$(55) \quad \nu_1(t) = \dot{\nu}_{10}t + \nu_{10}, \quad \nu_2(t) = \dot{\nu}_{20}t + \nu_{20},$$

e se $\dot{\nu}_{10} = \dot{\nu}_{20}$, sono anche sineroni.

Integrando (53) si ottiene

$$\mu_1(t) - \mu_2(t) = -\frac{l}{I} \left(\frac{2\dot{\psi}_0\mathcal{J}}{a} + \frac{p_0}{\dot{\psi}_0} \right) t + \mu_{10} - \mu_{20},$$

che sommata e sottratta alla (51) fornisce rispettivamente

$$(56) \quad \begin{aligned} \mu_1(t) = & \frac{1}{2I\dot{\psi}_0} [a(2f^0 + p^0) (-t \cos \psi + \frac{1}{\dot{\psi}_0} \sin \psi) - l(p_0 + f_0)t + A_1 \sin \psi \\ & - A_2 \cos \psi] - \frac{1}{2I} [2\mathcal{J}^*(\varphi_1 + \varphi_2) + (\dot{\varphi}_{10} - \dot{\varphi}_{20})t] + A_4 + \mu_{10} - \mu_{20}, \end{aligned}$$

$$(57) \quad \begin{aligned} \mu_2(t) = & \frac{1}{2I\dot{\psi}_0} [a(2f^0 + p^0) (-t \cos \psi + \frac{1}{\dot{\psi}_0} \sin \psi) + l(p_0 + f_0)t + A_1 \sin \psi \\ & - A_2 \cos \psi] - \frac{1}{2I} [2\mathcal{J}^*(\varphi_1 + \varphi_2) - (\dot{\varphi}_{10} - \dot{\varphi}_{20})t] + A_4 - \mu_{10} + \mu_{20}. \end{aligned}$$

(50), (55), (56), (57) determinano quindi completamente i moti interni.

(a)^{''} Se si sincronizzano i due giroscopi sugli assi (G_1, \mathbf{j}) e (G_2, \mathbf{j}) , procedendo in modo analogo a quanto fatto nel caso (a)', si dimostra che la soluzione non è fisicamente accettabile, in quanto non limitata.

(a)^m Come già osservato nel paragrafo precedente, sincronizzando i due giroscopi sugli assi (G_1, \mathbf{k}) e (G_2, \mathbf{k}) si perviene ad un sistema di 4 equazioni in 5 incognite, per cui è necessario

(\cdot) sincronizzare anche i due giroscopi sugli assi \mathbf{i} , ed allora si ricade nel caso (a)', con l'unica differenza che mentre prima (55) era un risultato, adesso è un'ipotesi (con $\dot{v}_{10} = \dot{v}_{20}$), oppure

($\cdot\cdot$) sincronizzare i due giroscopi sugli assi \mathbf{j} , ed allora si ricade nel caso (a)ⁿ, per cui la soluzione non è fisicamente accettabile.

(b) Valgono le ipotesi (40), (41), (42), per cui, tenuto conto anche di (44), l'equazione (35)_{VI} può essere così riscritta

$$(58) \quad \frac{2a}{l} (C\ddot{\psi} + I\ddot{v}) \sin(\theta_0 - \psi) + \frac{2l}{a} \mathcal{J}\dot{\psi}^2 \cos(\theta_0 - \psi) = -lp_0 \cos(\theta_0 - \psi),$$

mentre dall'equazione (35)_{III} si ricava

$$(59) \quad \ddot{v} = -\frac{1}{I} \left(C + \frac{l^2}{a^2} \mathcal{J} \right) \ddot{\psi}.$$

Sostituita (59) in (58) si ottiene

$$(60) \quad 2\mathcal{J}[\ddot{\psi} \sin(\theta_0 - \psi) - \dot{\psi}^2 \cos(\theta_0 - \psi)] = ap_0 \cos(\theta_0 - \psi),$$

che integrata fornisce $\psi(t)$.

Integrando due volte rispetto al tempo (59), si ricava

$$(61) \quad v(t) = -\frac{1}{I} \left(C + \frac{l^2}{a^2} \mathcal{J} \right) (\psi - \psi_0) + [\dot{v}_0 + \frac{1}{I} \left(C + \frac{l^2}{a^2} \mathcal{J} \right) \dot{\psi}_0] t + v_0,$$

con $\dot{v}_0 = \dot{v}_{10} = \dot{v}_{20}$.

Da (35)_I e (35)_{IV}, risolte rispetto a $\ddot{\varphi}_1$ e $\ddot{\varphi}_2$, si ottengono

$$(62) \quad \ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{a} (l\ddot{\psi} - g \sin \alpha \sin \psi),$$

$$(63) \quad \ddot{\varphi}_2 = -\frac{1}{a} (l\ddot{\psi} + g \sin \alpha \sin \psi),$$

che, nota $\psi(t)$, mediante integrazione, forniscono $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$.

Le relazioni (38) e (39), tenendo ancora conto delle ipotesi fatte, integrate rispetto al tempo, forniscono i due integrali primi seguenti

$$(64) \quad \mathcal{I}^*(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cos \psi + 2I\dot{\delta} \sin \psi + 2I\dot{\mu} \cos \psi = B_1,$$

$$(65) \quad \mathcal{I}^*(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \sin \psi - 2I\dot{\delta} \cos \psi + 2I\dot{\mu} \sin \psi - a(2f^0 + p^0)t = B_2,$$

con B_1 e B_2 costanti d'integrazione.

Moltiplicata (64) per $\cos \psi$ e (65) per $\sin \psi$ e sommando membro a membro, si ottiene

$$(66) \quad \dot{\mu} = \frac{1}{2I} [-\mathcal{I}^*(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) + B_1 \cos \psi + B_2 \sin \psi + a(2f^0 + p^0)t \sin \psi],$$

mentre moltiplicando (64) per $\sin \psi$ e (65) per $(-\cos \psi)$ e sommando, risulta

$$(67) \quad \dot{\delta} = \frac{1}{2I} [B_1 \sin \psi - B_2 \cos \psi - a(2f^0 + p^0)t \cos \psi].$$

Queste due ultime equazioni, note $\psi(t)$, $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$, previa integrazione, forniscono $\mu(t)$ e $\delta(t)$.

Il moto del carrello risulta dunque pienamente determinato: (60), (62) e (63) forniscono il moto esterno, mentre (61), (66) e (67) forniscono il moto interno.

(c) Supposto che valga l'ipotesi (43), assegnamo il parametro $\psi(t)$ come in (45)_I. Allora, tenuto conto anche di (44), da (35)_I e (35)_{IV} si ricava

$$(68) \quad \ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 = -\frac{g \operatorname{sen} \alpha}{a} \operatorname{sen} \psi.$$

Integrando due volte rispetto al tempo, si perviene a (45)_{II} e (45)_{III}, con i dati iniziali ψ_0 , $\dot{\varphi}_{10}$, $\dot{\varphi}_{20}$ che debbono soddisfare, sempre in virtù di (35)₁, alla condizione (46). Si è dunque trovato che, quando il carrello è soggetto solo alle forze peso, le ipotesi (43) e (45)₁ impongono al carrello il moto esterno che abbiamo chiamato « naturale ».

Andiamo ora a ricavare il moto interno. A tale fine consideriamo le equazioni (35)_{II}, (35)_{III}, (35)_V e (35)_{VI}, tenendo conto delle ipotesi (43), (44), (45)_I e del

risultato (68); esse forniscono ⁽⁵⁾ il seguente sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_0(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) + \ddot{\mu}_1 + \ddot{\mu}_2 &= \frac{2}{I} \left(\frac{g \operatorname{sen} \alpha \mathcal{J}}{a} + a f^0 \right) \operatorname{sen} \psi, \\
 \dot{\psi}_0(\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_2) + \ddot{\mu}_1 - \ddot{\mu}_2 &= 0, \\
 \dot{\psi}_0(\dot{\mu}_1 + \dot{\mu}_2) - (\ddot{\delta}_1 + \ddot{\delta}_2) &= \frac{1}{I} \left[a(2f^0 + p^0) - \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{a} \mathcal{J}^* \right] \cos \psi - \\
 \dot{\psi}_0(\dot{\mu}_2 - \dot{\mu}_1) + (\ddot{\delta}_1 - \ddot{\delta}_2) &= \frac{l}{I} \left(\frac{2\dot{\psi}_0^2 \mathcal{J}}{a} + p_0 \right). \qquad \frac{\dot{\psi}_0 \mathcal{J}^*}{I} (\lambda_{11} + \lambda_{21}),
 \end{aligned}
 \tag{69}$$

Posto

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{I} \left(\frac{g \operatorname{sen} \alpha \mathcal{J}}{a} + a f^0 \right) &= c_1, & \frac{1}{2I} \left[a(2f^0 + p^0) - \frac{2g \operatorname{sen} \alpha \mathcal{J}^*}{a} \right] &= c_2, \\
 -\frac{\dot{\psi}_0}{2I} (\lambda_{11} + \lambda_{21}) \mathcal{J}^* &= c_3, & \frac{l}{2I} \left(2 \frac{\dot{\psi}_0^2 \mathcal{J}}{a} + p_0 \right) &= c_4,
 \end{aligned}$$

il sistema (69) può essere sostituito dal seguente sistema equivalente

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_0 \dot{\delta}_1 + \ddot{\mu}_1 &= c_1 \operatorname{sen} \psi, & \dot{\psi}_0 \dot{\delta}_2 + \ddot{\mu}_2 &= c_1 \operatorname{sen} \psi, \\
 \dot{\psi}_0 \dot{\mu}_1 - \ddot{\delta}_1 &= c_2 \cos \psi + c_3 - c_4, & \dot{\psi}_0 \dot{\mu}_2 - \ddot{\delta}_2 &= c_2 \cos \psi + c_3 + c_4.
 \end{aligned}$$

L'integrale generale di questo sistema di equazioni differenziali è dato da

$$\delta_1(t) = D_{11} \operatorname{sen} \dot{\psi}_0 t + D_{12} \cos \dot{\psi}_0 t - \frac{c_1 + c_2}{2\dot{\psi}_0} t \operatorname{sen} \psi + E_1,$$

$$\delta_2(t) = D_{21} \operatorname{sen} \dot{\psi}_0 t + D_{22} \cos \dot{\psi}_0 t - \frac{c_1 + c_2}{2\dot{\psi}_0} t \operatorname{sen} \psi + E_2,$$

$$\mu_1(t) = D_{11} \cos \dot{\psi}_0 t - D_{12} \operatorname{sen} \dot{\psi}_0 t - \frac{c_1 + c_2}{2\dot{\psi}_0} t \cos \psi + \frac{c_2 - c_1}{2\dot{\psi}_0^2} \operatorname{sen} \psi + \frac{c_3 - c_4}{\dot{\psi}_0} t + E_3,$$

$$\mu_2(t) = D_{21} \cos \dot{\psi}_0 t - D_{22} \operatorname{sen} \dot{\psi}_0 t - \frac{c_1 + c_2}{2\dot{\psi}_0} t \cos \psi + \frac{c_2 - c_1}{2\dot{\psi}_0^2} \operatorname{sen} \psi + \frac{c_3 + c_4}{\dot{\psi}_0} t + E_4,$$

⁽⁵⁾ L'equazione (35)_{IV}, riscritta tenendo conto delle ipotesi fatte, dà

$$\left[2 \frac{l \mathcal{J} \dot{\psi}_0^2}{a} - I(\ddot{\delta}_1 - \ddot{\delta}_2) + I\dot{\psi}_0(\dot{\mu}_1 - \dot{\mu}_2) \right] \cos(\theta_0 - \psi) = -l p_0 \cos(\theta_0 - \psi),$$

che dovendo valere per qualunque t , e quindi per qualunque ψ , implica (69)_{IV}.

con $D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}, E_1, E_2, E_3, E_4$ costanti d'integrazione da determinarsi mediante le condizioni iniziali. Risulta dunque determinato anche il moto interno del carrello.

6. - Caso del carrello pesante senza asta

Consideriamo ora il carrello semplificato sopprimendo l'asta L_1L_2 . I due girostati hanno allora gli assali delle due ruote allineati e uniti nel punto L mediante un giunto sferico. Il moto di tale carrello, privo dei giroscopi e soggetto alle sole forze peso, è stato studiato dettagliatamente in [2]₂ ed è quel moto che abbiamo definito « naturale ». Ci si pone qui il problema di vedere quanti e quali giroscopi sono necessari e sufficienti per garantire un qualunque moto esterno prefissato. Col vincolo olonomo (7) e i due vincoli anolonomi (8), tutte le considerazioni cinematiche già fatte in [2]₂ e concernenti il moto esterno del carrello, sono ancora valide. Tenuto conto che nel punto L comune ai due assali delle due ruote c'è una reazione interna $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$, posto $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}$ ed $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}$, le equazioni (15), (16), (17) valgono immutate. Tali equazioni costituiscono, assieme a (7), un sistema di 13 equazioni nelle 18 incognite $\psi, \varphi_1, \varphi_2, \delta_1, \mu_1, \nu_1, \delta_2, \mu_2, \nu_2, \phi_{1x}, \phi_{1y}, \phi_{1z}, \phi_{2x}, \phi_{2y}, \phi_{2z}, F_x, F_y, F_z$, con 9 parametri e 9 reazioni scalari.

Separato il problema del moto da quello delle reazioni, si perviene al seguente sistema di 4 equazioni differenziali nei 9 parametri $\psi, \varphi_1, \varphi_2, \delta_1, \mu_1, \nu_1, \delta_2, \mu_2, \nu_2$

$$\dot{\psi} = \frac{a}{2l} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2), \quad \nu_1 = \nu_2,$$

$$(70) \quad \mathcal{I}(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + I(\ddot{\mu}_1 + \ddot{\mu}_2) + I\dot{\psi}(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) = 2af^0 \sin \psi,$$

$$\left(\frac{2l}{a}\mathcal{I} + \frac{2a}{l}C\right)\ddot{\psi} + \frac{2a}{l}I\ddot{\nu}_1 + I(\ddot{\mu}_1 - \ddot{\mu}_2) + I\dot{\psi}(\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_2) = 0.$$

È immediato osservare che bastano due soli giroscopi per assicurare un qualunque moto esterno prefissato (naturalmente soddisfacente ai vincoli (7) ed (8)). Soppressi infatti i due giroscopi sugli assi \mathbf{k} , è soddisfatta la (70)_{II}, e soppressi i due giroscopi sugli assi \mathbf{i} (o quelli sugli assi \mathbf{j}), le equazioni (70)_{III} e (70)_{IV} determinano, previa integrazione, il moto dei due giroscopi rimasti.

È altresì evidente che sopprimendo tutti i giroscopi, il sistema (70) fornisce ancora il moto « naturale » a cui abbiamo già ampiamente accennato.

Bibliografia

- [1] B. MESSORI, *Sul controllo del moto di un particolare girostato mediante giroscopi*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **25** (1976), 160-174.
- [2] I. FERRARI: [\bullet]₁ *Su un particolare sistema dinamico anolonomo riducibile alle quadrature*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **8** (1958), 54-66; [\bullet]₂ *Su due particolari sistemi dinamici anolonomi riducibili alle quadrature*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **23** (1974), 241-261; [\bullet]₃ *Ancora su particolari sistemi dinamici anolonomi riducibili alle quadrature*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **23** (1974), 376-392.

S u n t o

Ci si occupa del controllo, mediante giroscopi interni, del moto di un particolare sistema dinamico anolonomo costituito da due girostati, uniti da un telaio rigido e soggetto a forze attive esterne largamente arbitrarie.

Si scrivono le equazioni cardinali del moto (n. 2) e, separato il problema del moto da quello delle reazioni (n. 3), si perviene ad un sistema di 6 equazioni differenziali in 9 parametri. Si esaminano alcuni casi in cui tale sistema è determinato (n. 4) e si danno le soluzioni nell'ipotesi che il peso sia la sola forza esterna (n. 5). Infine, sempre nell'ipotesi del solo peso, si considera il caso (n. 6) in cui, soppresso il telaio, i due girostati siano congiunti direttamente fra loro.

* * *