Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 347-362

CARLO CATTANEO (*)

Teoremi di minimo nella dinamica dei sistemi vincolati (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

I diversi principi di minimo formulati nella dinamica classica costituiscono altrettanti modi di enunciare le leggi del moto. Raramente essi presentano un'utilità pratica per la risoluzione dei singoli problemi dinamici; in compenso essi permettono, sotto diverse angolazioni, di penetrare più a fondo nella struttura intima delle leggi dinamiche e di coglierne aspetti talora non prevedibili. Il loro interesse è quindi essenzialmente concettuale; non è escluso peraltro che un approfondimento concettuale, contribuendo ad affinare l'intuito meccanico, possa, per via indiretta, avere influenza positiva anche sul piano applicativo.

Quanto precede vorrebbe, nelle intenzioni, giustificare il tema di questo articolo, esplicitamente rivolto a questioni di minimo nella dinamica dei sistemi vincolati. Esso prenderà le mosse dal celebre principio gaussiano del minimo sforzo, pubblicato nel 1829, che io esporrò nella sua forma tradizionale, salvo qualche piccolo alleggerimento dimostrativo. Successivamente riporterò, un po' decantati e con qualche complemento, alcuni miei contributi personali, pubblicati nel 1942, che dal principio di Gauss hanno tratto lo spunto. Questi sono: (a) un enunciato più generale e più circostanziato del principio di Gauss, che conduce tra l'altro ad una espressiva decomposizione della costrizione vincolare; (b) formulazione di un nuovo principio algebrico di minimo che, non

(*) Indirizzo: Istituto Matematico « Guido Castelnuovo », Città Universitaria, 00185 Roma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 28-XI-1978.

soltanto sotto l'aspetto matematico ma anche per la sua interpretazione fisica, si può considerare complementare del principio di Gauss [1].

Benché molto classico, credo che l'argomento non sia privo di interesse. Se oggi teorema di Gauss e questioni connesse non trovano più posto nei nostri corsi di meccanica razionale, non è escluso che vi sia ancora, anche tra i giovani, chi trovi in esse materia di riflessione.

Dedico queste pagine al professore Giorgio Sestini, quale omaggio alla sua opera di uomo, scienziato, maestro e come testimonianza di un'antica amicizia.

1. - Notazioni e ipotesi. Impostazione generale del problema dinamico

Sia S un sistema materiale che, senza limitazioni di sostanza, possiamo supporre costituito da un numero finito N di punti materiali (P_i), di masse rispettive (m_i) $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Adottato nello spazio di riferimento una terna cartesiana trirettangola, diciamo (ξ_i, η_i, ζ_i) le coordinate dei punti del sistema. Sarà però comodo, per economia di scrittura, adottare per le $3N$ variabili di posizione, anche una notazione più compatta x^A $(A = 1, 2, \ldots, 3N)$ con la seguente regola di equivalenza

$$x^A = \xi_i \;:\; A = 3i - 2\,; \qquad x^A = \eta_i \;:\; A = 3i - 1\,; \qquad x^A = \zeta_i \;:\; A = 3i \tag{1.1}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N;\; A = 1, 2, \ldots, 3N)\,.$$

Notazione analoga adotteremo per le masse, scrivendole nella forma m_A con le equivalenze seguenti

$$m_A = m_i \;:\; A = 3i - 2,\; 3i - 1,\; 3i\,. \tag{1.2}$$

Quando non vi sia motivo di equivoco, potremo adottare una notazione ulteriormente abbreviata, eliminando anche l'indice numerico A.

Vincoli geometrico-cinematici.

Supporremo il sistema soggetto a L vincoli indipendenti, olonomi od anolonomi, fissi o variabili nel tempo, tutti bilaterali. Ciascuno di tali vincoli impone alle velocità del sistema limitazioni esprimibili mediante una condizione lineare, generalmente non omogenea, nelle $\dot{x}^A$ (derivate delle x^A rispetto al

---

[1] Il contenuto di questo articolo ha costituito oggetto di una conferenza presso il Seminario matematico dell'Università e del Politecnico di Torino (15 dicembre 1977).

tempo)

$$\sum_A L_A^h \dot{x}^A + l^h = 0 \qquad (A = 1, 2, ..., 3N;\ h = 1, 2, ..., L)\,, \tag{1.3}$$

con coefficienti L_A^h e termine l^h dipendenti dalla posizione $\{x^A\}$ e dal tempo t. Le relazioni (1.3) divengono omogenee, e i coefficienti L_A^h indipendenti da t, nel caso particolare di vincoli fissi.

Accanto alle (1.3), che in corrispondenza al generico istante t, limitano l'atto di moto possibile di S, scriviamo anche le relazioni che ne caratterizzano tutti gli spostamenti virtuali $\delta S \equiv \{\delta x^A\}$; come è noto, esse si ottengono dalle stesse (1.3) abolendo i termini l^h e sostituendo ad ogni componente di velocità $\dot{x}^A$ la corrispondente componente di spostamento virtuale δx^A

$$\sum_A L_A^h\, \delta x^A = 0 \qquad (h = 1, 2, ..., L)\,. \tag{1.4}$$

La supposta indipendenza dei legami (1.3) tra le $\dot{x}^A$, e la conseguente indipendenza dei legami (1.4) tra le δx^A, fa sì che L tra le quantità δx^A si possano esprimere come funzioni lineari omogenee delle rimanenti $3N - L$. In termini equivalenti si può dire che soltanto $3N - L$ spostamenti virtuali indipendenti sono compatibili con le (1.4) ($3N - L$: *grado di libertà locale* del sistema S).

Sempre dalle (1.3) si ottengono poi, mediante derivazione totale rispetto al tempo, le limitazioni imposte dai vincoli alle accelerazioni, anche esse lineari nelle $\ddot{x}^A$ ed analoghe alle (1.3), ma con diverso termine noto

$$\sum_A L_A^h \ddot{x}^A + s^h = 0 \qquad (h = 1, 2, ..., L)\,. \tag{1}$$

Queste relazioni, che abbiamo distinto con la denominazione speciale (1), avranno una parte importante in tutto il seguito. In esse il termine s^h sta per l'espressione seguente

$$s^h(x, x, t) = \sum_{A,B} \frac{\partial L_A^h}{\partial x^B}\, \dot{x}^A \dot{x}^B + \sum_A \left(\frac{\partial L_A^h}{\partial t} + \frac{\partial l^h}{\partial x^A}\right) \dot{x}^A + \frac{\partial l^h}{\partial t}\,. \tag{1.5}$$

Se, per un medesimo istante t, una medesima posizione $\{x^A\}$ e un medesimo atto di moto $\{\dot{x}^A\}$, si considerano due diversi atti accelerativi $\{\ddot{x}^A\}$ e $\{\ddot{x}'^A\}$, entrambi compatibili con i vincoli (1), la loro differenza, soddisfacendo alle (1.4), si identifica, salvo un inessenziale fattore dimensionale, con uno spostamento virtuale di S

$$\ddot{x}^A - \ddot{x}'^A = \delta x^A\,. \tag{1.6}$$

Altri elementi essenziali per la determinazione del moto di S, oltre alle condizioni cinematiche (1), sono da un lato le *equazioni newtoniane*, che legano il moto alla sollecitazione agente, attiva e vincolare, dall'altro la *equazione simbolica*, che caratterizza il comportamento dei vincoli dal punto di vista dinamico.

Equazioni newtoniane del moto.

Indichiamo con $\boldsymbol{f}_i$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ le forze attive agenti sul sistema S, che pensiamo conosciute in funzione della posizione $\{x^A\}$, dell'atto istantaneo di moto $\{\dot{x}^A\}$, ed eventualmente del tempo t, e con $\boldsymbol{r}_i$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ le reazioni vincolari. Se anche per le componenti delle $\boldsymbol{f}_i$ e, delle $\boldsymbol{r}_i$ si adottano notazioni compatte f_A e r_A con equivalenze analoghe alle (1.1), le equazioni newtoniane del moto si scrivono

$$m_A \ddot{x}^A = f_A + r_A \qquad (A = 1, 2, \dots, 3N)\,. \tag{N}$$

Comportamento reattivo dei vincoli: equazione simbolica.

Se si suppone che i vincoli agenti su S sono *perfetti* o, come meglio si dovrebbe dire, realizzati in modo fisicamente perfetto (dispositivi ausiliari di massa nulla, assenza di attrito e di ogni altra dissipazione) il comportamento reattivo dei vincoli è completamente caratterizzato dalla *uguaglianza simbolica*

$$\sum_A r_A\,\delta x^A = 0 \qquad \forall\{\delta x^A\}\,, \tag{II}$$

da pensare valida per tutti e soli gli spostamenti virtuali di S, a loro volta caratterizzati dalle (1.4). L'equazione simbolica (II) compendia le capacità reattive dei vincoli, nel senso che i sistemi reattivi $\{r_A\}$ che i vincoli sono capaci di esplicare sono tutti e soli quelli soddisfacenti alla (II). Stante l'arbitrarietà dello spostamento virtuale $\{\delta x^A\}$, l'equazione simbolica (II) equivale a tante uguaglianze indipendenti quanti sono gli spostamenti virtuali indipendenti, cioè $3N - L$.

Stato iniziale di S.

Nelle precedenti equazioni (I) (N) (II) le espressioni delle forze attive f_A in funzione delle x, $\dot{x}$, t si devono pensare come *dati*. Del pari come un dato si deve considerare lo stato iniziale del sistema, cioè la sua posizione e il suo atto di moto ad un assegnato istante iniziale t_0

$$x_0^A \equiv x^A(t_0)\,, \qquad \dot{x}_0^A \equiv \dot{x}_0^A(t_0)\,. \tag{1.7}$$

Questi dati iniziali, supposti naturalmente compatibili con i vincoli, si intenderanno ormai assegnati una volta per tutte.

Determinatezza del problema dinamico.

Nel complesso delle equazioni (I) (N) (II), che costituiscono $6N$ equazioni indipendenti nelle $6N$ quantità incognite $\ddot{x}^A$, r_A, si compendia l'impostazione del problema dinamico. Infatti da esse è possibile, in linea teorica, determinare le $\ddot{x}^A$ e le r_A in funzione delle x, $\dot{x}$, t

$$\ddot{x}^A = a^A(x, \dot{x}, t)\,, \tag{1.8}$$

$$r_A = r_A(x, \dot{x}, t)\,; \tag{1.9}$$

le (1.8) costituiscono un sistema normale del secondo ordine che, completato dai dati iniziali (1.7), determina univocamente le $3N$ funzioni incognite $x^A(t)$; note che siano queste ultime, le (1.9) forniranno in termini espliciti le reazioni vincolari $r_A(t)$.

Tutto ciò in linea teorica e generale. Nei singoli casi concreti la determinazione effettiva del moto può offrire più o meno gravi difficoltà matematiche; ma il principio di Gauss non si propone la determinazione esplicita del moto: vuole soltanto metterne in evidenza una proprietà caratteristica.

2. - Divario tra moti vincolati e moti liberi. Teorema di Gauss

Chiamiamo M il generico moto di S rispettante sia i vincoli cinematici (I) sia le condizioni iniziali (1.7). Più in particolare in questa classe di moti indichiamo con M_n il cosiddetto *moto naturale*, cioè il moto effettivamente assunto da S sotto l'azione congiunta dei vincoli e della sollecitazione attiva $\{f_A\}$. Diremo invece M_* il *moto libero* di S, cioè il moto che animerebbe il sistema S se, con le stesse condizioni iniziali e sotto l'azione della medesima sollecitazione attiva, a partire dall'istante t_0 venisse abolito ogni vincolo. Se di tutti i moti ora nominati, che hanno in comune posizione e atto di moto iniziale, ci limitiamo a considerare soltanto una breve fase iniziale $(t_0, t_0 + \tau)$, a caratterizzarli e quindi a differenziarli l'uno dall'altro potrà bastare l'atto accelerativo iniziale $\mathscr{A} \equiv \{\ddot{x}^A(t_0)\}$. Ciò in virtù dell'ovvio sviluppo

$$x^A(t_0 + \tau) \cong x_0^A + \dot{x}_0^A \tau + \tfrac{1}{2}\ddot{x}_0^A \tau^2 + \dots\,; \tag{2.1}$$

tutti i moti nominati, identici per ciò che riguarda i primi due termini, non differiscono che per il terzo, e cioè appunto per l'atto accelerativo iniziale. Sottintendendo le specificazioni relative all'istante iniziale t_0, da ora in poi indicheremo l'atto accelerativo iniziale semplicemente con $\mathscr{A} \equiv \{\ddot{x}^A\}$, senza altra aggiunta se si tratta del generico moto vincolato M, mentre indicheremo con $\mathscr{A}_n \equiv \{\ddot{x}_n^A\}$ l'atto accelerativo iniziale del moto naturale, e con $\mathscr{A}_* \equiv \{\ddot{x}_*^A\}$

l'atto accelerativo iniziale del moto libero. In modo analogo le posizioni assunte da S all'istante $t+\tau$ nei diversi moti sopra nominati verranno così contraddistinte: $\{P_i\}$, posizione assunta in detto istante dal sistema nel generico moto M; P_i^n, simultanea posizione nel moto M_n; P_i^*, simultanea posizione nel moto M_*.

Tutto ciò premesso, chiamiamo *divario* tra il generico moto M e il moto libero M_* all'istante $t+\tau$ la quantità positiva

$$\mathscr{D}(M, M_*) \equiv \sum_{i=i}^{N} m_i(P_iP_i^*)^2 \cong \frac{\tau^4}{4}\sum_{A=1}^{3N} m_A(\ddot{x}^A - \ddot{x}^A_*)^2 + \dots, \tag{2.2}$$

la cui parte principale in τ, come risulta dal terzo membro, resta caratterizzata dal divario $D(\mathscr{A}, \mathscr{A}^*)$ tra i corrispondenti atti accelerativi iniziali, così definito

$$D(\mathscr{A}, \mathscr{A}^*) \equiv \sum_A m_A(\ddot{x}^A - \ddot{x}^A_*)^2 . \tag{2.3}$$

Nel confronto tra M_n, moto naturale di S, e tutti gli altri moti M, possedenti lo stesso stato iniziale (1.7) e soggetti unicamente al rispetto dei vincoli cinematici (I), sussiste il seguente celebre teorema.

Teorema di Gauss. *Tra tutti i moti M il moto naturale M_n è quello che presenta il minimo divario rispetto al moto libero M_*.*

Dato che il confronto si intende limitato a una fase iniziale di piccola durata τ, l'enunciato non fa che esprimere una proprietà di minimo per l'istantaneo divario accelerativo, cioè la disuguaglianza

$$D(\mathscr{A}, \mathscr{A}_*) > D(\mathscr{A}_n, \mathscr{A}_*) \qquad \forall \mathscr{A} \neq \mathscr{A}_n . \tag{2.4}$$

La dimostrazione della (2.4), e quindi del teorema di Gauss, è immediata. Si ha infatti successivamente (in notazione concisa)

$$\begin{aligned} D(\mathscr{A}, \mathscr{A}_*) &= \sum m[(\ddot{x} - \ddot{x}_n) + (\ddot{x}_n - \ddot{x}_*)]^2 \\ &= D(\mathscr{A}, \mathscr{A}_n) + D(\mathscr{A}_n, \mathscr{A}_*) + 2\sum_A r_A(\ddot{x}^A - \ddot{x}^A_n) . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Se si rammenta che la differenza tra due atti accelerativi distinti, ma entrambi rispettanti i vincoli (I) e corrispondenti a uno stesso atto di moto, è vettorialmente identificabile con uno spostamento virtuale del sistema, si riconosce che l'ultima sommatoria in (2.5) è nulla. La stessa (2.5) diviene allora

$$D(\mathscr{A}, \mathscr{A}_*) = D(\mathscr{A}, \mathscr{A}_n) + D(\mathscr{A}_n, \mathscr{A}_*) . \tag{2.6}$$

Stante il carattere positivo di $D(\mathscr{A}, \mathscr{A}_n)$, riducentesi a zero soltanto se il moto M coincide col moto naturale M_n, la (2.6) implica come immediata conseguenza la disuguaglianza (2.4) e quindi il teorema.

Non è inutile sottolineare che il teorema di Gauss più che un vero confronto tra moti è un confronto puramente algebrico tra due atti accelerativi istantanei (e simultanei), l'uno rispettante soltanto le equazioni cinematiche dei vincoli, l'altro anche le condizioni dinamiche.

Prima di aggiungere qualche commento al teorema ora dimostrato, diciamo qualcosa di una sua semplice generalizzazione.

3. - Teorema generalizzato. Considerazioni illustrative

Il teorema di Gauss può enunciarsi in una forma un po' più generale che mette in evidenza la tendenza di un sistema vincolato S a discostarsi il meno possibile non soltanto dal moto libero ma anche dal moto che esso assumerebbe, sotto l'azione delle medesime forze attive e a partire dalle medesime condizioni iniziali, qualora soltanto una parte dei vincoli fosse abolita.

Dividiamo i vincoli (I) agenti sul sistema in due classi qualunque (I_1) e (I_2), per esempio la prima costituita dai primi l vincoli, la seconda dai rimanenti $L-l$. Diciamo ancora M il generico moto di S rispettante *tutti* i vincoli (I) e le medesime condizioni iniziali (1.7). Invece con M_* indicheremo ora il moto che animerebbe S se, a partire dalle medesime condizioni iniziali e sotto l'azione delle medesime forze attive, esso rispettasse soltanto i vincoli (I_1). Ciò premesso, se si confrontano gli atti accelerativi iniziali corrispondenti ai moti M completamente vincolati con il moto M_* vincolato soltanto parzialmente, si arriva all'enunciato seguente.

T e o r e m a g e n e r a l i z z a t o d i G a u s s. *Il moto naturale M_n di un sistema vincolato S è, tra tutti i moti M compatibili con la totalità dei vincoli* (I) *e corrispondenti agli stessi dati iniziali, quello che ha minimo divario rispetto al moto M_* che il sistema avrebbe se fosse liberato da una parte dei vincoli.*

Anche ora la dimostrazione è assai semplice. Conformemente alle notazioni introdotte si ha

$$\begin{aligned}(3.1)\qquad D(\mathscr{A}, \mathscr{A}_*) &= \sum_A m_A(\ddot{x}^A - \ddot{x}^A_*)^2 = \sum_A m_A\{(\ddot{x}^A - \ddot{x}^A_n) + (\ddot{x}^A_m - \ddot{x}^A_*)\}^2 \\ &= D(\mathscr{A}, \mathscr{A}_n) + D(\mathscr{A}_n, \mathscr{A}_*) + 2\sum_A m_A(\ddot{x}^A - \ddot{x}^A_n)(\ddot{x}^A_n - \ddot{x}^A_*)\,.\end{aligned}$$

Le differenze $\ddot{x}^A - \ddot{x}^A_n$ tra due atti accelerativi distinti ma entrambi soddisfacenti alla totalità dei vincoli, costituiscono le componenti δx^A di uno spostamento virtuale tanto per il sistema che obbedisce a tutti i vincoli, quanto per il sistema che ne rispetti soltanto una parte; quindi l'ultima sommatoria a terzo membro di (3.1), potendosi scrivere $-2\sum_A (f_A - m_A \ddot{x}^A_n)\,\delta x^A + 2\sum_A (f_A - m_A \ddot{x}^A_*)\,\delta x^A$ consta di due parti separatamente nulle. La (3.1) diviene allora

$$D(\mathscr{A}, \mathscr{A}_*) = D(\mathscr{A}, \mathscr{A}_n) + D(\mathscr{A}_n, \mathscr{A}_*)\,; \tag{3.2}$$

da questa consegue la disuguaglianza

$$D(\mathscr{A}, \mathscr{A}_*) > D(\mathscr{A}_n, \mathscr{A}_*) \qquad \forall \mathscr{A} \neq \mathscr{A}_n\,, \tag{3.3}$$

che prova il teorema.

È opportuna, a questo punto, qualche breve considerazione illustrativa dei contenuti del teorema di Gauss. Ciò che diremo di questo sussiste ovviamente anche per la versione generalizzata.

(a) Il significato immediato della grandezza che viene assunta come elemento di confronto tra i diversi moti vincolati M — il loro divario dal moto libero — è del tutto evidente: esso misura globalmente, tenendo conto anche dell'importanza delle singole masse, quanto le posizioni del sistema vincolato distano dalle posizioni assunte dal sistema libero. È però interessante osservare che questo divario può essere espresso anche in termini di sollecitazione. Basta, a questo scopo, anzitutto sostituire le accelerazioni libere $\ddot{x}^A_*$, moltiplicate per le rispettive masse, con le forze attive f_A, poi osservare che le quantità $m_A\ddot{x}^A - f_A$ non sono altro che le forze r_A che sarebbe necessario aggiungere alle f_A per produrre le accelerazioni $\ddot{x}^A$. Pertanto, in termini di sollecitazione, il divario accelerativo si esprime semplicemente così

$$D(\mathscr{A}, \mathscr{A}_*) \equiv \sum_A \frac{r_A^2}{m_A}\,, \tag{3.4}$$

$\{r_A\}$ essendo la ora nominata sollecitazione aggiuntiva.

Al secondo membro di (3.4) si dà comunemente il nome di *costrizione vincolare*. Si noti però che per un generico moto M che non sia il moto naturale, le $\{r_A\}$ non sono interpretabili come reazioni vincolari, poichè non rientrano tra le sollecitazioni che i vincoli sono capaci di esplicare. Si tratta di una sollecitazione puramente ipotetica che, aggiunta alla sollecitazione attiva $\{f_A\}$, produrrebbe le accelerazioni caratterizzanti il particolare moto M in esame. L'introduzione della sollecitazione addizionale $\{r_A\}$ permette di dare al teorema di Gauss il seguente altro enunciato.

Tra tutti i moti M compatibili con i vincoli geometrico-cinematici e con le assegnate condizioni iniziali, il moto naturale M_n è quello che richiede la sollecitazione addizionale $\{r_A\}$ di minima costrizione $\sum_A r_A^2/m_A$.

Naturalmente le $\{r_A\}$ minimizzanti si identificano con le reazioni effettivamente offerte dai vincoli nel moto naturale.

(b) Altro elemento da osservare è che, a differenza del principio di Hamilton o del principio dell'azione stazionaria, il principio di Gauss non è un principio variazionale, nel senso tecnico della parola: infatti esso non stabilisce una proprietà di carattere integrale, bensì una proprietà relativa a un singolo istante. Inoltre, mentre i nominati principi variazionali sono essenzialmente principi di stazionarietà, il principio di Gauss esprime sempre una vera proprietà di minimo.

(c) Sempre in confronto con i suddetti principi variazionali, conviene sottolineare la maggiore generalità di ipotesi sotto le quali sono validi il principio di Gauss e la sua generalizzazione: vincoli indifferentemente fissi o variabili, olonomi od anolonomi. Tutto ciò non per stabilire una gerarchia tra i diversi principi della meccanica, bensì per chiarirne il diverso contenuto. Tanto nella sua formulazione originaria come in quella generalizzata, il principio di Gauss deve considerarsi equivalente al principio di d'Alembert che, come è ben noto, rappresenta la formulazione più generale delle leggi dinamiche per un sistema a vincoli perfetti.

4. - Proprietà additiva dei divari

In quanto precede si è tacitamente utilizzata una proprietà additiva dei divari che ora enunceremo in modo esplicito.

Accanto al generico moto M e al moto naturale parzialmente vincolato M_*, consideriamo anche il moto totalmente libero, che indicheremo ora con M_{**}. Considerati i corrispondenti atti accelerativi iniziali $\mathscr{A} \equiv \{\ddot{x}^A\}$, $\mathscr{A}_* \equiv \{\ddot{x}^A_*\}$, $\mathscr{A}_{**} \equiv \{\ddot{x}^A_{**}\}$, si ha palesemente

$$D(\mathscr{A}, \mathscr{A}_{**}) = D(\mathscr{A}, \mathscr{A}_*) + D(\mathscr{A}_*, \mathscr{A}_{**}) + 2 \sum_A m_A(\ddot{x}^A - \ddot{x}^A_*)(\ddot{x}^A_* - \ddot{x}^A_{**}) , \tag{4.1}$$

relazione da non confondere con la (3.1). Le differenze $x^A - x^A_*$ sono le componenti di uno spostamento virtuale $\{\delta x^A\}$ sia per il moto libero sia per il moto parzialmente vincolato. Pertanto l'ultima sommatoria, che può scriversi $\sum_A (f_A + r_A - f_A)\,\delta x^A \equiv \sum_A r_A\,\delta x^A$, le $\{r_A\}$ essendo le reazioni vincolari che si esplicano nel moto naturale parzialmente vincolato M_*, è nulla.

Si ha quindi

$$D(\mathscr{A}, \mathscr{A}_{**}) = D(\mathscr{A}, \mathscr{A}_*) + D(\mathscr{A}_*, \mathscr{A}_{**}) . \tag{4.2}$$

La relazione vale in particolare quando il moto M si identifica con il moto naturale M_n e dà luogo al seguente enunciato.

Il divario che il moto naturale M_n rispettante la totalità dei vincoli cinematici (I) *presenta rispetto al moto libero M_{**} è la somma del divario che esso presenta rispetto al moto naturale parzialmente vincolato M_* più il divario tra quest'ultimo e il moto completamente libero M_{**}.*

Indichiamo con M_1 il moto naturale del nostro sistema liberato del primo vincolo; con M_2 il suo moto naturale in assenza dei primi due vincoli; con M_r il suo moto naturale in assenza dei primi r vincoli. Porremo anche, per uniformità, $M_0 = M_n$, $M_L = M_{**}$ (si ricordi che L è il numero complessivo dei vincoli). Ciò posto, l'applicazione ripetuta del teorema precedente conduce alla uguaglianza seguente

$$\mathscr{D}(M_0, M_L) = \mathscr{D}(M_0, M_1) + \mathscr{D}(M_1, M_2) + \ldots + \mathscr{D}(M_{L-1}, M_L)\,. \tag{4.3}$$

Se si chiamano *contigui* due movimenti naturali M_r quando i rispettivi indici differiscono di un'unità, l'uguaglianza (4.3) si può così enunciare

Il divario tra il moto naturale in presenza di L vincoli, $M_0 \equiv M_n$, e il moto completamente libero, $M_L \equiv M_{**}$, è uguale alla somma dei divari tra tutti i moti contigui.

Un importante corollario del teorema di Gauss fu enunciato da H. Hertz nell'ipotesi di assenza di ogni forza attiva (*principio della direttissima*). Analogo corollario discende dal teorema di Gauss generalizzato. Su questi argomenti non ci soffermeremo e del pari sorvoleremo su espressive interpretazioni geometriche che dei teoremi di Gauss e di Hertz si possono dare sia nella loro forma originaria, sia nella forma generalizzata. Per queste interpretazioni rinviamo al lavoro [**1**] già citato.

Nella seconda parte del presente articolo vogliamo invece esaminare la dinamica di un sistema vincolato da un punto di vista radicalmente diverso.

5. - Teorema complementare: una proprietà di minimo per le reazioni vincolari

Senza più pensare ad alcuna soppressione di vincoli, consideriamo il nostro sistema S soggetto alla totalità dei vincoli (I), sempre supposti realizzati in modo perfetto, e alle forze attive $f_A(x, \dot{x}, t)$. L'evoluzione del sistema è retta, come sappiamo, dal complesso delle equazioni (I), (N), (II), completate dalle condizioni iniziali (1.7).

Nel complesso di equazioni ora nominate i vincoli cinematici (I), le espressioni delle forze attive $f_A(x, \dot{x}, t)$ e lo stato iniziale di S vanno considerati come *dati* del problema. Vanno invece considerati come incogniti l'atto accelerativo $\{\ddot{x}^A\}$ e la sollecitazione reattiva $\{r_A\}$.

Si possono utilizzare le equazioni newtoniane (N) per eliminare dalle (I) le accelerazioni $\ddot{x}^A$: rimarranno in giuoco le sole incognite $\{r_A\}$, in numero di $3N$, per le quali sussistono le seguenti equazioni

$$\text{(I)} \qquad \sum_A L^h_A \frac{(f_A + r_A)}{m_A} + s^h(x, \dot{x}, t) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, L)\,,$$

$$\text{(II)} \qquad \sum_A r_A\,\delta x^A = 0 \qquad \forall\{\delta x^A\}: \sum_A L^h_A\,\delta x^A = 0\,.$$

Nel complesso le (I), (II) costituiscono $3N$ equazioni algebriche indipendenti, quante sono appunto le incognite $\{r_A\}$.

In sostanza il principio di Gauss, nella sua forma originaria, ricerca il sistema delle reazioni effettive nella classe delle sollecitazioni $\{r_A\}$ che, aggiunte alla sollecitazione attiva $\{f_A\}$, soddisfano alle equazioni (I) e riconosce che, in detta classe, esso è quello che rende minima la quantità $\sum_A r_A^2/m_A$.

Ma è anche possibile porsi da un punto di vista diverso: considerare la classe delle sollecitazioni $\{r_A\}$ che soddisfano alla condizione (II), *cioè la classe delle sollecitazioni reattive che i vincoli sono capaci di esplicare*, e di vedere quale sia il carattere di privilegio che in questa classe presenta la sollecitazione reattiva effettivamente esplicata dai vincoli, cioè quella che soddisfa *anche* alle condizioni (I). È questo, per così dire, il punto di vista complementare del precedente.

A questo scopo conviene anzitutto ricordare che la condizione (II) può essere risoluta rispetto alle variabili incognite r_A nella forma parametrica riconosciuta da Lagrange

$$\text{(5.2)} \qquad r_A = \sum_{k=1}^{L} L^k_A \lambda_k\,,$$

dove i «moltiplicatori» λ_k sono L parametri *completamente liberi*, ciascuno nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$; comunque essi siano scelti, le corrispondenti $\{r_A\}$ soddisfano automaticamente all'equazione simbolica (II), quale che sia lo spostamento virtuale $\{\delta x^A\}$, né vi è altro modo di soddisfarla.

Per riconoscere che la (5.2) è conseguenza necessaria della (II) sostituiamo le condizioni (1.4) che caratterizzano gli spostamenti virtuali $\{\delta x^A\}$ con un'unica condizione

$$\text{(a)} \qquad \sum_{A,k} \mu_k L^k_A\,\delta x^A = 0 \qquad (A = 1, 2, \ldots, 3N;\; k = 1, 2, \ldots, L)\,,$$

pensata sussistere per valori completamente arbitrari dei coefficienti numerici μ_k. Dalla (a), risolvendo rispetto a δx^{3N}, si trae

$$\delta x^{3N} = -\sum_{\alpha,k} \mu_k L^k_\alpha \delta x^\alpha / \sum_p \mu_p L^p_{3N} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 3N-1)\,, \tag{b}$$

dove l'indice α si intende variare da 1 a $3N-1$. Sostituita (b) in (a), questa assume la forma

$$\sum_\alpha \{r_\alpha - \sum_k \mu_k L^k_\alpha r_{3N} / \sum_p \mu_p L^p_{3N}\} \delta x^\alpha = 0\,, \tag{a$'$}$$

in cui le $3N-1$ δx^α sono del tutto arbitrarie. Ne conseguono le $3N-1$ uguaglianze

$$r_\alpha = \sum_k \lambda_k L^k_\alpha \qquad (k = 1, 2, \ldots, L;\ \alpha = 1, 2, \ldots, 3N-1)\,, \tag{c}$$

ove si è posto

$$\lambda_k \equiv \mu_k r_{3N} / \sum_p \mu_p L^p_{3N}\,. \tag{d}$$

Le (d) corrispondono alle prime $3N-1$ delle (5.2). Quanto all'ultima delle (5.2) ($r_{3N} = \sum_k \lambda_k L^k_{3N}$), si riconosce che essa sussiste quale semplice identità in virtù delle posizioni (d).

Risoluta parametricamente la (II) nella forma (5.2), sostituiamo le espressioni (5.2) nel sistema (I): si dà luogo allora a un sistema di L equazioni lineari nelle L incognite λ_k

$$\sum_k M^{hk} \lambda_k + M^h = 0 \qquad (k, h = 1, 2, \ldots, L)\,, \tag{5.3}$$

dove si è posto

$$M^{hk} = \sum_A \frac{L^h_A L^k_A}{m_A}\,, \qquad M^h = \sum_A \frac{L^h_A f_A}{m_A} + s^h\,, \tag{5.4}$$

s^h essendo dato dalla (1.5).

Come constateremo tra un momento, nelle ipotesi da noi assunte il determinante dei coefficienti M^{hk} è certamente diverso da zero; quindi il sistema (5.3) individua univocamente i valori incogniti delle λ_k. Ciò premesso, risulta evidente che le (5.3) esprimono le condizioni di stazionarietà per la funzione quadratica

$$H(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_L) = \tfrac{1}{2} \sum_{h,k} M^{hk} \lambda_h \lambda_k + \sum_h M^h \lambda_h + M\,, \tag{5.5}$$

M essendo una funzione arbitraria delle quantità f_A, x^A, $\dot{x}^A$, t, ma indipendente dalle λ_k.

Si osservi ora che, essendo la matrice (M^{hk}) il quadrato, eseguito riga per riga, della matrice rettangolare di rango massimo $(L_B^h/\sqrt{m_B})$, non soltanto il suo determinante ma anche tutti i suoi minori principali sono diversi da zero e positivi; in particolare sono positivi tutti i suoi elementi diagonali. Ne consegue: (i) il sistema (5.3), come avevamo anticipato, individua univocamente le λ_k; (ii) la soluzione del sistema (5.3) rende non soltanto stazionaria ma addirittura minima la funzione H. Si tratta di un punto di minimo relativo che, essendo unico nel dominio aperto $(-\infty, +\infty)^L$, è anche di minimo assoluto. Sussiste pertanto il seguente teorema complementare del teorema di Gauss.

Teorema complementare. *Tra gli insiemi di reazioni* $\{r_A\}$ *che i vincoli sono capaci di esplicare, quello effettivo rende minima la funzione* (5.5). *Tale minimo vale* $H_{\min} = -\tfrac{1}{2} \sum_A r_A^2/m_A + M$.

L'ultima affermazione si giustifica saturando (5.3) con λ_h, utilizzando il risultato in (5.5) e infine tenendo conto di (5.2).

6. - Significato meccanico della funzione H in condizioni di moto incipiente

Supponiamo che i vincoli (I) siano tutti indipendenti dal tempo, e che l'atto di moto iniziale sia nullo. Ne discende $M^h = \sum_A L_A^h f_A/m_A$, $\sum M^h \lambda_h = \sum r_A f_A/m_A$. Se allora scegliamo M, termine tuttora disponibile in (5.5), uguale a $\tfrac{1}{2} \sum_A f_A^2/m_A$, la funzione estremanda assume la forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_A \frac{(f_A + r_A)^2}{m_A}\,. \tag{6.1}$$

Se a questo punto immaginiamo aboliti tutti i vincoli e ad essi sostituito uno qualunque degli insiemi di reazioni che essi sono capaci di esplicare, si dà origine a un atto accelerativo fittizio (perchè generalmente non compatibile con i vincoli) e si riconosce che la funzione estremanda H coincide con la corrispondente energia di accelerazione

$$H = \tfrac{1}{2} \sum_A m_A \ddot{x}_A^2\,. \tag{6.2}$$

Il teorema generale stabilito nel paragrafo precedente, nel caso attuale si può allora enunciare così:

Nel caso di vincoli fissi e in condizioni di moto incipiente le reazioni effettive sono, tra quante ne possono esplicare i vincoli, quelle che danno luogo alla minima energia di accelerazione.

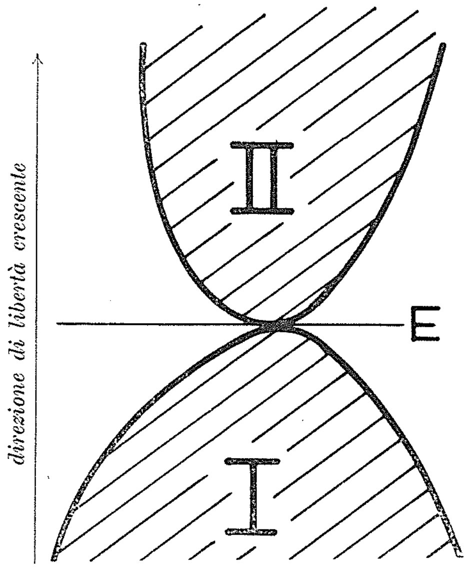
Conviene ripetere che la classe di sollecitazioni $\{r_A\}$ nella quale si cerca il sistema delle reazioni effettive, è costituita dalle sollecitazioni reattive che i vincoli sono dinamicamente capaci di esplicare, ma l'atto accelerativo generato da esse e dalle concomitanti forze attive non è generalmente compatibile con i vincoli cinematici.

7. - Qualche commento

Nella fisica matematica esistono altri esempi di teoremi di minimo, o quantomeno di stazionarietà, tra loro complementari, in un senso analogo a quello messo in evidenza in questo lavoro. Tali sono, per esempio, due tra i più importanti teoremi della teoria classica dell'elasticità: il teorema della minima energia totale da un lato, il teorema di Menabrea dall'altro.

Nel problema della determinazione della deformazione di un corpo elastico sotto l'azione di forze assegnate si devono considerare come incognite sia le componenti del tensore di deformazione, sia le componenti del tensore degli sforzi. Di fronte a questo complesso di incognite la teoria offre le equazioni seguenti: (A) Equazioni di congruenza per le caratteristiche di deformazione. (B) I legami tra sforzi e deformazioni. (C) Le equazioni dell'equilibrio, indefinite e al contorno, espresse nelle componenti del tensore degli sforzi. Le relazioni (B) permettono di esprimere le rimanenti equazioni (A) e (C) o tutte nelle componenti di deformazione o tutte nelle componenti di tensione. Ciò premesso, il teorema della minima energia totale prende in considerazione la classe delle deformazioni congruenti e in questa caratterizza la deformazione effettiva come quella che rende stazionaria l'energia totale. Invece il teorema di Menabrea si pone dal punto di vista complementare: considera tutti i sistemi di sforzi equilibrati, cioè soddisfacenti alle equazioni (C), senza preoccuparsi di sapere se essi sono o non sono compatibili con la continuità e l'integrità del corpo elastico, e in questa classe individua gli sforzi effettivi (che saranno i soli a dare luogo a deformazioni congruenti) in base a un'altra proprietà di stazionarietà.

Tornando al teorema di Gauss e al suo teorema complementare, si può osservare che essi mettono in evidenza due tendenze opposte. Il primo teorema esprime la tendenza del sistema a discostarsi il meno possibile dal moto libero, cioè a sfuggire quanto più è possibile all'azione dei vincoli. Esso esprime, per così dire, la tendenza del sistema alla libertà. All'opposto, il teorema complementare esprime la tendenza, da parte dei vincoli, ad ostacolare quanto più possono, il moto del sistema (minima energia di accelerazione). Queste opposte tendenze si possono rappresentare in un disegno simbolico (v. figura).



Spazio rappresentativo di tutti gli atti accelerativi a priori possibili. Regione I: *classe degli atti accelerativi rispettanti le condizioni geometrico-cinematiche imposte dai vincoli. Regione* II: *classe degli atti accelerativi rispettanti le capacità reattive dei vincoli. E: atto accelerativo effettivo, di massima libertà nella classe* I, *di minima libertà nella classe* II.

Supponiamo che i punti del piano del disegno rappresentino tutti i possibili atti accelerativi del nostro sistema. Più precisamente i punti della regione I rappresentino gli atti accelerativi compatibili con i vincoli cinematici imposti al sistema, vale a dire gli atti accelerativi rispettanti le equazioni (I). Supponiamo inoltre che la direzione segnata con una freccia rappresenti una direzione di libertà crescente. Il teorema di Gauss individua l'atto accelerativo effettivo E come quello che si trova all'apice di questa regione, cioè come l'atto accelerativo che, nella classe (I), realizza la massima libertà.

La regione II rappresenti invece gli atti accelerativi, generalmente incompatibili con le condizioni cinematiche imposte dai vincoli, ma dinamicamente possibili, cioè rispettanti il gruppo di equazioni (II). Il teorema complementare individua l'atto accelerativo effettivo E, lo stesso di prima, come quello che dà luogo alla minima libertà.

Riferimenti

[1] C. Cattaneo, *Alcuni teoremi di minimo in dinamica e in cinetostatica*, Rend. Mat. (5) **2** (1941), 321-335.

[2] K. F. Gauss, *Uber ein neues algemeines Grundgesetz der Mechanik*, J. Reine Angew. Math. **4** (1829).

[3] T. Levi Civita e U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale*, (II), Cap. XI, Ed. Zanichelli, Bologna 1927.

Summary

A generalized version of Gauss theorem of the least constraint is given, based on a distributive property of the constraint. Another minimum principle, complementary to the Gauss theorem, is then stated, having a significant physical interpretation when the system is initially at rest.

* * *