Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 305-319

GIOVANNI CRUPI (*)

Considerazioni generali sulla dinamica del punto a massa variabile in relatività generale. Aspetti newtoniani (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

Introduzione

In una recente nota [**3**]$_1$ ho considerato, in relatività generale, il problema della dinamica del punto a massa di quiete variabile per espulsione o per ricezione di particelle.

In questo lavoro, sempre in relatività generale, mi propongo di estendere lo studio al caso in cui la massa di quiete del punto vari a causa di processi concomitanti sia di espulsione che di ricezione di particelle.

Si propone, in primo luogo, la formulazione assoluta dell'equazione fondamentale. Successivamente, dopo aver esplicitato taluni legami fondamentali tra grandezze assolute e grandezze relative ad un assegnato riferimento fisico, vengono precisate ed interpretate le relazioni che connettono le variazioni di massa propria del punto a massa variabile e le masse proprie degli elementi espulsi e di quelli simultaneamente ricevuti. Infine, vengono poste in forma relativa, e suscettibile di interpretazione newtoniana, sia l'equazione del moto che quella del bilancio energetico.

1. - Sia $\mathscr{V}_4$ la varietà riemanniana cronotopica di metrica iperbolica normale

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)\,, \tag{1}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, via C. Battisti 90, 98100 Messina, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 13-XI-1978.

con segnatura $+ + + -$. Le (x^i) indicano un sistema di coordinate locali associate al generico punto P della varietà, essendo le (x^α), $(\alpha = 1, 2, 3)$, coordinate spaziali e $x^4 = ct$ la coordinata temporale.

Sia P, $m_0(\tau)$ un punto a massa di quiete variabile per processi concomitanti di perdita ed acquisto di particelle. Indicando con τ il tempo proprio di P, per ogni valore di τ resta associata al punto P la quadriquantità di moto

$$Q = m_0(\tau)\, U\,, \tag{2}$$

dove $m_0(\tau)$ si presuppone derivabile rispetto a τ ed

$$U = \mathrm{d}P/\mathrm{d}\tau\,, \tag{3}$$

definisce, in forma intrinseca, la quadrivelocità assoluta di P.

Indichiamo, inoltre, con P^*, $\mathrm{d}\mu_1$ e P^{**}, $\mathrm{d}\mu_2$ gli elementi che da τ a $\tau + \mathrm{d}\tau$, a causa di processi concomitanti di espulsione e di ricezione, vengono, rispettivamente, espulso ed assorbito da P, $m_0(\tau)$. Le quantità $\mathrm{d}\mu_1$ e $\mathrm{d}\mu_2$ danno, rispettivamente, le masse di istantanea quiete dell'elemento espulso e di quello ricevuto.

Agli elementi P^*, $\mathrm{d}\mu_1$ e P^{**}, $\mathrm{d}\mu_2$ restano associate le quadriquantità di moto

$$Q^* = \mathrm{d}\mu_1\, U^*\,, \qquad Q^{**} = \mathrm{d}\mu_2\, U^{**}\,, \tag{4}$$

essendo

$$U^* = \mathrm{d}P^*/\mathrm{d}\tau^*\,, \qquad U^{**} = \mathrm{d}P^{**}/\mathrm{d}\tau^{**} \tag{5}$$

le quadrivelocità assolute, rispettivamente, di P^* e P^{**}.

Ovviamente τ^* e τ^{**} rappresentano i tempi propri associati ai punti P^* e P^{**}.

Introdotte le quantità precedenti, l'equazione assoluta fondamentale del moto, per un punto a massa di quiete variabile a causa di processi concomitanti di perdita e di acquisto di massa, può essere ottenuta come naturale generalizzazione di quella proposta in [**3**]$_1$.

Così, in forma intrinseca, si ha

$$\mathrm{d}Q = -(\mathrm{d}\mu_1)\, U^* + (\mathrm{d}\mu_2)\, U^{**}\,. \tag{6}$$

Ci proponiamo, ora, di scrivere la (6) in termini delle componenti controvarianti.

Se indichiamo con $\{\partial P/\partial x^i\}$ la base naturale associata alle coordinate locali x^i, le quadriquantità di moto possono essere scritte nella forma

$$\boldsymbol{Q} = Q^i\,\partial P/\partial x^i\,, \qquad \boldsymbol{Q}^* = Q^{*i}\,\partial P/\partial x^i\,, \qquad \boldsymbol{Q}^{**} = Q^{**i}\,\partial P/\partial x^i\,, \tag{7}$$

dove

$$Q^i = m_0\,U^i\,, \qquad Q^{*i} = \mathrm{d}\mu_1\,U^{*i}\,, \qquad Q^{**i} = \mathrm{d}\mu_2\,U^{**i}\,. \tag{8}$$

Dopo la $(7)_1$, si ha

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Q} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = \left(\frac{\mathrm{d}Q^i}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\partial P}{\partial x^i} + Q^i\,\frac{\partial^2 P}{\partial x^k \partial x^i}\,U^k\right)\mathrm{d}\tau\,, \tag{9}$$

e questa, essendo

$$\frac{\mathrm{d}Q^i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial Q^i}{\partial x^k}\,U^k\,, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x^k\,\partial x^i} = \Gamma^s_{ki}\,\frac{\partial P}{\partial x^s}\,, \tag{10}$$

è suscettibile della forma

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Q} = (\nabla_k Q^s)\,\mathrm{d}x^k\,\frac{\partial P}{\partial x^s} = \mathrm{D}Q^s\,\frac{\partial P}{\partial x^s}\,, \tag{11}$$

dove con Γ^s_{ki} sono stati indicati i simboli di Christoffel di seconda specie, con ∇_k l'operazione di derivazione covariante e con D l'operazione di differenziazione assoluta, $[\mathbf{2}]_1$.

Tenendo presente la (11), dalla (6) si traggono le seguenti equazioni dinamiche in termini di componenti controvarianti dei quadrivettori $\boldsymbol{Q}$, $\mathrm{d}\mu_1\,\boldsymbol{U}^*$ e $\mathrm{d}\mu_2\,\boldsymbol{U}^{**}$

$$\mathrm{D}Q^s = -\,\mathrm{d}\mu_1\,U^{*s} + \mathrm{d}\mu_2\,U^{**s}\,. \tag{12}$$

Negli sviluppi successivi, per ragioni di sinteticità, utilizzeremo il formalismo vettoriale [**4**].

L'equazione (6), dopo la (2), può anche essere ricondotta alla

$$\mathrm{d}m_0\,\boldsymbol{U} + m_0\,\mathrm{d}\boldsymbol{U} = -\,\mathrm{d}\mu_1\,\boldsymbol{U}^* + \mathrm{d}\mu_2\,\boldsymbol{U}^{**}\,. \tag{13}$$

Moltiplicando quest'ultima scalarmente per $\boldsymbol{U}$ si ottiene

$$\mathrm{d}m_0 = \mathrm{d}\mu_1\,\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^*/c^2 - \mathrm{d}\mu_2\,\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^{**}/c^2\,, \tag{14}$$

e questa ci suggerisce di concepire la variazione $\mathrm{d}m_0$ di $m_0(\tau)$ come sovrapposizione di due contributi, e cioè

$$\mathrm{d}m_0 = (\mathrm{d}m_0)_1 + (\mathrm{d}m_0)_2\,, \tag{15}$$

dove

$$(\mathrm{d}m_0)_1 = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^*/c^2\,\mathrm{d}\mu_1\,, \qquad (\mathrm{d}m_0)_2 = -\,\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^{**}/c^2\,\mathrm{d}\mu_2\,. \tag{16}$$

La $(16)_1$ dà la relazione tra la massa di istantanea quiete dell'elemento espulso P^*, $\mathrm{d}\mu_1$ e la corrispondente variazione di massa di quiete $(\mathrm{d}m_0)_1$ subita da P, m_0. Analoga è l'interpretazione della $(16)_2$.

Dopo le (16), le (6) e (13) sono suscettibili della forma

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Q} = -\frac{(\mathrm{d}m_0)_1}{\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^*/c^2}\,\boldsymbol{U}^* - \frac{(\mathrm{d}m_0)_2}{\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^{**}/c^2}\,\boldsymbol{U}^{**}\,, \tag{17}$$

$$\mathrm{d}m_0\,\boldsymbol{U} + m_0\,\mathrm{d}\boldsymbol{U} = -\frac{(\mathrm{d}m_0)_1}{\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^*/c^2}\,\boldsymbol{U}^* - \frac{(\mathrm{d}m_0)_2}{\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^{**}/c^2}\,\boldsymbol{U}^{**}\,. \tag{18}$$

Indicando con τ il tempo proprio di P, $m_0(\tau)$, le precedenti possono essere poste anche nella forma

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{c^2}{\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^*}\,\frac{(\mathrm{d}m_0)_1}{\mathrm{d}\tau}\,\boldsymbol{U}^* - \frac{c^2}{\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^{**}}\,\frac{(\mathrm{d}m_0)_2}{\mathrm{d}\tau}\,\boldsymbol{U}^{**}\,, \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}\tau}\,\boldsymbol{U} + m_0\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{c^2}{\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^*}\,\frac{(\mathrm{d}m_0)_1}{\mathrm{d}\tau}\,\boldsymbol{U}^* - \frac{c^2}{\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^{**}}\,\frac{(\mathrm{d}m_0)_2}{\mathrm{d}\tau}\,\boldsymbol{U}^{**}\,. \tag{20}$$

La (19), o la (20), rappresenta l'equazione della dinamica del punto a massa variabile in relatività generale, in forma assoluta, nel caso generale in cui la massa di quiete $m_0(\tau)$ varia per cause concomitanti di espulsione e ricezione di particelle.

2. – In questo numero, introdotto in $\mathscr{V}_4$ un riferimento fisico caratterizzato da un campo di vettori unitari $\boldsymbol{\gamma}$ di specie temporale ($\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma} = -1$), ci proponiamo di esprimere le grandezze assolute che figurano nella (20), in termini di grandezze relative al riferimento fisico considerato.

Ricordiamo che un ente si dice *relativo* se esso è definito rispetto ad un riferimento fisico.

Siano

$$\mathrm{d}T = -\,\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathrm{d}P/c\,,\qquad \mathrm{d}T^* = -\,\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathrm{d}P^*/c\,,\qquad \mathrm{d}T^{**} = -\,\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathrm{d}P^{**}/c\,, \tag{21}$$

i tempi elementari relativi standard associati, rispettivamente, a P, m_0, P^*, $\mathrm{d}\mu_1$ e P^{**}, $\mathrm{d}\mu_2$.

Le quadrivelocità relative al riferimento $\boldsymbol{\gamma}$ dei punti P, P^* e P^{**}, definite da

$$\boldsymbol{V} = \mathrm{d}P/\mathrm{d}T\,,\qquad \boldsymbol{V}^* = \mathrm{d}P^*/\mathrm{d}T^*\,,\qquad \boldsymbol{V}^{**} = \mathrm{d}P^{**}/\mathrm{d}T^{**}\,, \tag{22}$$

risultano legate alle rispettive velocità assolute nelle relazioni

$$\boldsymbol{U} = \eta\boldsymbol{V}\,,\qquad \boldsymbol{U}^* = \eta^*\boldsymbol{V}^*\,,\qquad \boldsymbol{U}^{**} = \eta^{**}\boldsymbol{V}^{**}\,, \tag{23}$$

avendo posto

$$\eta = \mathrm{d}T/\mathrm{d}\tau\,,\qquad \eta^* = \mathrm{d}T^*/\mathrm{d}\tau^*\,,\qquad \eta^{**} = \mathrm{d}T^{**}/\mathrm{d}\tau^{**}\,. \tag{24}$$

Presupponendo, com'è usuale,

$$\eta > 0\,,\qquad \eta^* > 0\,,\qquad \eta^{**} > 0\,, \tag{25}$$

le quadrivelocità relative $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}^*$ e $\boldsymbol{V}^{**}$ risultano orientate, come le corrispondenti quadrivelocità assolute, verso il futuro.

Adesso decomponiamo lo spazio tangente T_x, associato al generico punto (x^i) nella somma di due sottospazi supplementari ed ortogonali tra loro $T_x = \Sigma + \theta$, dove θ è unidimensionale e parallelo a $\boldsymbol{\gamma}(x^i)$, mentre Σ è tridimensionale ed ortogonale a $\boldsymbol{\gamma}(x^i)$. Nella interpretazione fisica, θ e Σ rappresentano localmente tempo e piattaforma spaziale associati al riferimento individuato dal campo dei vettori unitari $\boldsymbol{\gamma}$.

Applicando la nota regola di decomposizione di un vettore secondo due sottospazi supplementari ed ortogonali tra loro, i quadrivettori relativi $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}^*$ e $\boldsymbol{V}^{**}$, introdotti con le (22), possono univocamente essere decomposti secondo θ e la piattaforma Σ. Tale decomposizione conduce a

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V} &= -\,(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma} + (\boldsymbol{V} + (\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma})\,,\\
\boldsymbol{V}^* &= -\,(\boldsymbol{V}^*\cdot\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma} + (\boldsymbol{V}^* + (\boldsymbol{V}^*\cdot\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma})\,,\\
\boldsymbol{V}^{**} &= -\,(\boldsymbol{V}^{**}\cdot\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma} + (\boldsymbol{V}^{**} + (\boldsymbol{V}^{**}\cdot\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma})\,,
\end{aligned} \tag{26}$$

e queste, tenendo presente che dalle (21) si trae

$$\gamma \cdot V = \gamma \cdot V^* = \gamma \cdot V^{**} = -c\,, \tag{27}$$

possono essere trascritte nella forma

$$V = c\gamma + \boldsymbol{u}\,, \qquad V^* = c\gamma + \boldsymbol{u}^*, \qquad V^{**} = c\gamma + \boldsymbol{u}^{**}, \tag{28}$$

avendo posto

$$\boldsymbol{u} = V - c\gamma\,, \qquad \boldsymbol{u}^* = V^* - c\gamma\,, \qquad \boldsymbol{u}^{**} = V^{**} - c\gamma\,. \tag{29}$$

I tre vettori spaziali $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}^*$ ed $\boldsymbol{u}^{**}$, $(\boldsymbol{u}\cdot\gamma = \boldsymbol{u}^*\cdot\gamma = \boldsymbol{u}^{**}\cdot\gamma = 0)$, definiti dalle (29), si interpretano, rispettivamente, come le 3-velocità relative standard dei tre punti P, P^*, P^{**}.

Inserendo le (28) nelle (23), si ottiene che le quadrivelocità assolute sono suscettibili della seguente decomposizione relativa al riferimento γ

$$\boldsymbol{U} = \eta(c\gamma + \boldsymbol{u})\,, \qquad \boldsymbol{U}^* = \eta^*(c\gamma + \boldsymbol{u}^*)\,, \qquad \boldsymbol{U}^{**} = \eta^{**}(c\gamma + \boldsymbol{u}^{**})\,. \tag{30}$$

Calcolando la norma di ambo i membri di ciascuna delle (30) e tenendo conto delle (25), si traggono per i coefficienti η, η^* ed η^{**} le seguenti espressioni

$$\eta = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}\,, \qquad \eta^* = 1/\sqrt{1 - u^{*2}/c^2}\,, \qquad \eta^{**} = 1/\sqrt{1 - u^{**2}/c^2}\,, \tag{31}$$

dove si è posto

$$u^2 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = u^i u_i\,, \qquad u^{*2} = u^{*i} u^*{}_i\,, \qquad u^{**2} = u^{**i} u^{**}{}_i\,. \tag{32}$$

I prodotti scalari $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^*$ ed $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^{**}$, che intervengono come coefficienti nei secondi membri delle (16), dopo le (30), sono suscettibili delle seguenti espressioni

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^* = -\eta\eta^*(c^2 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*)\,, \qquad \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^{**} = -\eta\eta^{**}(c^2 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^{**})\,, \tag{33}$$

e da queste, essendo i quadrivettori $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}^*$ e $\boldsymbol{U}^{**}$ del genere tempo ed orientati verso il futuro, si trae che

$$c^2 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^* > 0\,, \qquad c^2 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^{**} > 0\,. \tag{34}$$

Passiamo, ora, alla formulazione della quadriaccelerazione assoluta di P in termini di quantità relative al riferimento fisico γ.

Per definizione la quadriaccelerazione assoluta di P è data da

$$\mathscr{A} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}\tau}, \tag{35}$$

e questa può essere scritta anche nella forma

$$\mathscr{A} = \eta \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{dT}},$$

da cui, tenendo presente la $(23)_1$, si ottiene

$$\mathscr{A} = \eta^2 \boldsymbol{A} + \eta \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}T} \boldsymbol{V}. \tag{36}$$

essendo

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}T} \tag{37}$$

la quadriaccelerazione relativa al riferimento γ. La (36) esprime la quadriaccelerazione assoluta come combinazione lineare delle grandezze relative $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{V}$.

Successivamente, la (37), invocando la $(28)_1$ può essere esplicitata nella

$$\boldsymbol{A} = c\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}T} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}T}, \tag{38}$$

con $\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}T$ del genere spazio $(\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}T \cdot \gamma = 0)$.

Al fine di poter esprimere $\boldsymbol{A}$ nella somma di un vettore del genere spazio e di un vettore del genere tempo, procediamo alla decomposizione di $\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}T$ secondo i due sottospazi supplementari ed ortogonali tra loro θ e Σ.

Applicando la nota formula di decomposizione, si ha

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}T} = -\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}T}\cdot\gamma\right)\gamma + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}T} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}T}\cdot\gamma\right)\gamma\right). \tag{39}$$

Indicando il componente secondo Σ con

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}T} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}T}\cdot\gamma\right)\gamma, \tag{40}$$

la (39) può essere scritta più brevemente nella forma

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}T} = -\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}T}\cdot\boldsymbol{\gamma}\right)\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{a}\,. \tag{41}$$

Il vettore spaziale $\boldsymbol{a}$ definisce la 3-accelerazione relativa $[\mathbf{1}]_1$.

Osservando che $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\gamma} = 0$, la (40) e la (41) possono anche essere così trascritte

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}T} - \left(\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}T}\right)\boldsymbol{\gamma}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}T} = \left(\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}T}\right)\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{a}\,. \tag{42}$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri della $(42)_1$ per $\boldsymbol{u}$ si trae

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}(u^2/2)\,, \tag{43}$$

e questa estende formalmente nell'ambito della relatività generale una nota relazione della cinematica classica.

Adesso, inserendo la $(42)_2$ nella (38), si ottiene

$$\boldsymbol{A} = \left(c\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}T} + \boldsymbol{a}\right) + \left(\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}T}\right)\boldsymbol{\gamma}\,, \tag{44}$$

e questa, appunto, esprime la quadriaccelerazione relativa $\boldsymbol{A}$ come somma di un componente spaziale $c\,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}/\mathrm{d}T + \boldsymbol{a}$ e di uno temporale $(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}/\mathrm{d}T)\boldsymbol{\gamma}$.

Infine, introducendo la $(28)_1$ e la (44) nella (36), si ottiene

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_\Sigma + 1/c(\mathscr{A}_\Sigma\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{\gamma}\,, \tag{45}$$

con

$$\mathscr{A}_\Sigma = \eta^2\boldsymbol{a} + \eta^2 c\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}T} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\eta^2}{\mathrm{d}T}\boldsymbol{u}\,. \tag{46}$$

La (45), dopo la (46), esprime la quadriaccelerazione assoluta come somma di un componente spaziale e di uno temporale, espressi in termini di enti relativi al riferimento fisico assegnato $\boldsymbol{\gamma}$.

3. – Vogliamo ora procedere alla interpretazione fisica relativa degli scalari invarianti $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^*/c^2$ e $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^{**}/c^2$ che figurano nelle (16) come fattori di connessione tra le masse proprie degli elementi P^*, $d\mu_1$, P^{**}, $d\mu_2$ e le corrispondenti variazioni di $m_0(\tau)$.

Tenendo presenti le (31) e le (33), si ottiene

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^*/c^2 &= -\frac{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)(1-u^{*2}/c^2)}}\,,\\
\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^{**}/c^2 &= -\frac{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^{**}/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)(1-u^{**2}/c^2)}}\,.
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Inoltre applicando ai punti P^* e P^{**} il teorema locale dei moti relativi, nella forma stabilita da Benenti $[\mathbf{1}]_2$, in relatività generale, si trovano nella piattaforma Σ le seguenti relazioni

$$
\widehat{\boldsymbol{u}}^{*\prime} = \frac{\nu^*}{\eta}\boldsymbol{u}^* - \frac{\eta}{\eta+1}\left(1+\frac{\nu^*}{\eta}\right)\boldsymbol{u}\,,\quad \widehat{\boldsymbol{u}}^{**\prime} = \frac{\nu^{**}}{\eta}\boldsymbol{u}^{**} - \frac{\eta}{\eta+1}\left(1+\frac{\nu^{**}}{\eta}\right)\boldsymbol{u}\,,
\tag{48}
$$

dove

$$
\nu^* = \frac{1}{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*/c^2}\,,\quad \nu^{**} = \frac{1}{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^{**}/c^2}\,,
\tag{49}
$$

$\widehat{\boldsymbol{u}}^{*\prime}$ ed $\widehat{\boldsymbol{u}}^{**\prime}$ forniscono, rispettivamente, le valutazioni nella piattaforma Σ delle 3-velocità relative standard di P^* e P^{**} rispetto a P, cioè in quel riferimento fisico S' nel quale è nulla la 3-velocità relativa standard di P. Ovviamente, S' è caratterizzato da un campo di vettori unitari $\boldsymbol{\gamma}'$ di specie temporale, in genere distinto da $\boldsymbol{\gamma}$.

Mediante semplici manipolazioni, indicate in $[\mathbf{3}]_1$, le (48) si possono scrivere anche nella forma

$$
\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{u}}^{*\prime} &= \nu^*\left(\frac{\boldsymbol{u}^*}{\eta} + \left((1-1/\eta)\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*}{u^2}-1\right)\boldsymbol{u}\right),\\
\widehat{\boldsymbol{u}}^{**\prime} &= \nu^{**}\left(\frac{\boldsymbol{u}^{**}}{\eta} + \left((1-1/\eta)\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^{**}}{u^2}-1\right)\boldsymbol{u}\right),
\end{aligned}
\tag{50}
$$

e queste hanno, separatamente la medesima *struttura formale* del teorema dei moti relativi nell'usuale formulazione della relatività ristretta [**5**].

Dalle (50) si deducono le relazioni

$$
(51)\qquad
\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{u}}^{*\prime 2} &= \frac{(\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u})^2 - 1/c^2[u^2 u^{*2} - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*)^2]}{(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*/c^2)^2}\,,\\
\widehat{\boldsymbol{u}}^{**\prime 2} &= \frac{(\boldsymbol{u}^{**} - \boldsymbol{u})^2 - 1/c^2[u^2 u^{**2} - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^{**})^2]}{(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^{**}/c^2)^2}\,,
\end{aligned}
$$

e, successivamente,

$$
(52)\qquad
\begin{aligned}
\sqrt{1 - \frac{\widehat{\boldsymbol{u}}^{*\prime 2}}{c^2}} &= \frac{\sqrt{(1 - u^{*2}/c^2)(1 - u^2/c^2)}}{1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*/c^2}\,,\\
\sqrt{1 - \frac{\widehat{\boldsymbol{u}}^{**\prime 2}}{c^2}} &= \frac{\sqrt{(1 - u^{**2}/c^2)(1 - u^2/c^2)}}{1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^{**2}/c^2}\,.
\end{aligned}
$$

Adesso, inserendo le (52) nelle (47), restano stabilite le seguenti relazioni

$$
(53)\qquad \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^*/c^2 = -\frac{1}{\sqrt{1 - \widehat{u}^{*\prime 2}/c^2}}\,,\quad \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^{**}/c^2 = -\frac{1}{\sqrt{1 - \widehat{u}^{**\prime 2}/c^2}}\,,
$$

che forniscono un evidente significato fisico relativo dei due scalari assoluti $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^*/c^2$ ed $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^{**}/c^2$.

Dopo le (53), alle (16) si può dare la forma

$$
(54)\qquad (\mathrm{d}m_0)_1 = -\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\sqrt{1 - \widehat{\boldsymbol{u}}^{*\prime 2}/c^2}}\,,\ (\mathrm{d}m_0)_2 = \frac{\mathrm{d}\mu_2}{\sqrt{1 - \widehat{\boldsymbol{u}}^{**\prime 2}/c^2}}\qquad (\mathrm{d}\mu_1 > 0,\ \mathrm{d}\mu_2 > 0)\,,
$$

che è suscettibile di immediata interpretazione fisica. E precisamente, $(\mathrm{d}m_0)_1$ e $(\mathrm{d}m_0)_2$ sono, rispettivamente, uguali alle masse relative standard di P^*, $\mathrm{d}\mu_1$ e P^{**}, $\mathrm{d}\mu_2$ valutate dal sistema S' di istantanea quiete di P, m_0.

Le (54) estendono alla relatività generale risultati già noti in relatività ristretta $[\mathbf{3}]_2$.

Consideriamo ora alcuni aspetti particolari delle (50).

(a) Sia $\boldsymbol{u} = 0$. In tal caso da $(31)_1$ e (49) si trae $\eta = \nu^* = \nu^{**} = 1$, e quindi le (50) si particolarizzano nelle

$$
(55)\qquad \widehat{\boldsymbol{u}}^{*\prime} = \boldsymbol{u}^*\,,\qquad \widehat{\boldsymbol{u}}^{**\prime} = \boldsymbol{u}^{**}\,.
$$

(b) Sia $\boldsymbol{u}^* = 0$. In tal caso $\nu^* = 1$, e la $(50)_1$ si particolarizza nella

$$
(56)\qquad \widehat{\boldsymbol{u}}^{*\prime} = -\,\boldsymbol{u}\,.
$$

(c) Sia $\boldsymbol{u}^{**} = 0$. In tal caso $\nu^{**} = 1$, e la $(50)_2$ si riduce alla

$$\widehat{\boldsymbol{u}}^{**\prime} = -\,\boldsymbol{u}\,. \tag{57}$$

Il significato delle (55), (56) e (57) appare evidente.

4. – In questo numero ci soffermeremo sulla formulazione relativa al riferimento fisico γ delle equazioni del moto e della energia, evidenziandone le interpretazioni locali newtoniane.

A tale scopo cominciamo col notare che l'equazione fondamentale assoluta (20), in termini di enti relativi al riferimento fisico γ, può essere esplicitata nella

$$\begin{aligned}(58)\qquad &\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}T}\eta^2\boldsymbol{u} + m_0\mathscr{A}_\Sigma - \frac{1}{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*/c^2}\frac{(\mathrm{d}m_0)_1}{\mathrm{d}T}\boldsymbol{u}^* - \frac{1}{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*/c^2}\frac{(\mathrm{d}m_0)_2}{\mathrm{d}T}\boldsymbol{u}^{**} =\\ &= \Big(-\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}T}\eta^2 c - \frac{m_0}{c}(\mathscr{A}_\Sigma\cdot\boldsymbol{u}) + \frac{c}{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*/c^2}\frac{(\mathrm{d}m_0)_1}{\mathrm{d}T} + \frac{c}{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^{**}/c^2}\frac{(\mathrm{d}m_0)_2}{\mathrm{d}T}\Big)\boldsymbol{\gamma}\,,\end{aligned}$$

dopo aver tenuto presenti la $(24)_1$, le (30), la (45), le (52) e le (53).

Il primo membro della (58), essendo una combinazione lineare di vettori del genere spazio, appartiene a Σ, mentre il secondo membro, essendo un vettore del genere tempo, appartiene a θ. Ma Σ e θ sono due sottospazi supplementari in cui è stato decomposto lo spazio tangente T_x, e quindi la (58) conduce alle due equazioni

$$(59)\qquad \begin{aligned}&\eta^2\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}T}\boldsymbol{u} + m_0\mathscr{A}_\Sigma = \frac{(\mathrm{d}m_0)_1/\mathrm{d}T}{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*/c^2}\boldsymbol{u}^* + \frac{(\mathrm{d}m_0)_2/\mathrm{d}T}{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^{**}/c^2}\boldsymbol{u}^{**}\,,\\ &\eta^2\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}T}c^2 + m_0(\mathscr{A}_\Sigma\cdot\boldsymbol{u}) = c^2\frac{(\mathrm{d}m_0)_1/\mathrm{d}T}{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*/c^2} + c^2\frac{(\mathrm{d}m_0)_2/\mathrm{d}T}{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^{**}/c^2}\,.\end{aligned}$$

È agevole accertare che la $(59)_2$ si può dedurre come conseguenza della $(59)_1$. A tale scopo basta moltiplicare scalarmente ambo i membri della $(59)_1$ per $\boldsymbol{u}$, e poi tenere presenti la $(31)_1$ e la (15).

In realtività generale, la $(59)_1$ e la $(59)_2$ danno, rispettivamente, in forma relativa l'equazione vettoriale del moto e l'equazione del bilancio energetico di un punto a massa di quiete variabile a causa di processi concomitanti di espulsione e di accumulo di particelle.

Le (59) possono essere poste in una forma molto più espressiva ai fini di una più immediata interpretazione fisica. È su ciò che ora ci soffermeremo.

La $(59)_1$, dopo la (46) e la (40), è riconducibile alla

$$(60)\qquad \left(\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}T}\right)_\Sigma = m\boldsymbol{\Gamma} + \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*/c^2}\frac{(\mathrm{d}m_0)_1}{\mathrm{d}T}\boldsymbol{u}^* + \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^{**}/c^2}\frac{(\mathrm{d}m_0)_2}{\mathrm{d}T}\boldsymbol{u}^{**},$$

dove con

$$(61)\qquad \begin{gathered} m = \eta m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = -c\,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}/\mathrm{d}T, \\ \left(\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}T}\right)_\Sigma = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}T} + \left(\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}T}\cdot\boldsymbol{\gamma}\right)\boldsymbol{\gamma} \end{gathered}$$

sono stati indicati, rispettivamente, la massa relativa standard $[\mathbf{2}]_2$, il campo gravitazionale relativo standard $[\mathbf{1}]_1$ ed il componente di $\mathrm{d}(m\boldsymbol{u})/\mathrm{d}T$ secondo la base spaziale Σ ortogonale a $\boldsymbol{\gamma}$.

L'equazione (60) suggerisce, in relatività generale, una formulazione newtoniana dell'equazione relativa del moto di un punto a massa di quiete variabile a causa di processi concomitanti di espulsione ed accumulo. E può essere così enunciata: *durante il moto di P, $m_0(T)$, in ogni istante T, la parte spaziale della derivata rispetto a T della 3-quantità di moto* $m\boldsymbol{u}$ *è uguale alla somma della forza gravitazionale agente sulla massa relativa standard e delle due forze convettive generate dai concomitanti processi di espulsione e di accumulo di particelle.*

Consideriamo, adesso, alcuni casi particolari notevoli della (60).

$(a)_1$ Supponiamo l'assenza di campi gravitazionali veri.

In tal caso la varietà metrica riemanniana si riduce alla varietà piatta di Minkowski, e quindi la metrica iperbolica normale (1), in coordinate galileiane, si specializza nella

$$(62)\qquad \mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2 - (\mathrm{d}x^4)^2 .$$

In tale schema il campo dei vettori unitari $\boldsymbol{\gamma}$ diviene uniforme e costante, e quindi

$$(63)\qquad \Gamma = -c\,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}/\mathrm{d}T = 0,$$

$$(64)\qquad \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}T}\cdot\boldsymbol{\gamma} = m\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}T} = 0 .$$

Adattando le coordinate galileiane al riferimento $\boldsymbol{\gamma}$, lungo le rette della congruenza di riferimento varia solo la x^4. Allora ne segue che $[\mathbf{2}]_1$

$$(65)\qquad \mathrm{d}T = \mathrm{d}t .$$

Tenendo presenti le (63), (64) e (65), la (60) si specializza nella

$$\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*/c^2}\frac{(\mathrm{d}m_0)_1}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}^* + \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^{**}/c^2}\frac{(\mathrm{d}m_0)_2}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}^{**}, \tag{66}$$

che coincide con un'equazione già nota in relatività ristretta [**3**]$_2$.

(a)$_2$ Siano assenti processi di espulsione e di accumulo di particelle $(\mathrm{d}m_0)_1 = (\mathrm{d}m_0)_2 = 0$, $m_0 = \text{cost.}$

In tal caso la (60) si riduce all'equazione

$$\left(\frac{\mathrm{d}(\eta\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}T}\right)_\Sigma = \eta\Gamma, \tag{67}$$

che è stata stabilita da Benenti [**1**]$_1$.

(a)$_3$ Siano $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^{**} = \boldsymbol{u}$. Dalle (50) segue $\widehat{\boldsymbol{u}}^{*\prime} = \widehat{\boldsymbol{u}}^{**\prime} = 0$, e ciò fisicamente significa che la perdita e l'acquisto di elementi da parte di P, m_0 avviene con 3-velocità relativa standard nulla. In tal caso l'equazione dinamica relativa (60) si riduce ancora alla (67), in analogia a ciò che è noto nella dinamica classica newtoniana del punto a massa variabile.

(a)$_4$ Siano $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^{**} = 0$, cioè siano nulle le 3-velocità relative standard degli elementi P^* e P^{**} rispetto al riferimento fisico associato a γ.

Con tale ipotesi la (60) si particolarizza nella

$$\left(\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}T}\right)_\Sigma = m\boldsymbol{\Gamma}, \tag{68}$$

da cui

$$\left(m_0\frac{\mathrm{d}(\eta\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}T}\right)_\Sigma = m_0\eta\boldsymbol{\Gamma} - \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}T}\eta\boldsymbol{u}. \tag{69}$$

Passiamo, ora, ad approfondire il commento e la interpretazione dei termini che figurano nell'equazione relativa (59)$_2$ del bilancio energetico.

La (59)$_2$, dopo la (43) e la (31)$_1$, si specializza nella

$$\frac{\mathrm{d}(\eta m_0 c^2)}{\mathrm{d}T} = -m_0\eta c\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}T}\cdot\boldsymbol{u} + c^2\frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*/c^2}\frac{(\mathrm{d}m_0)_1}{\mathrm{d}T} + c^2\frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^{**}/c^2}\frac{(\mathrm{d}m_0)_2}{\mathrm{d}T}, \tag{70}$$

e questa, invocando la nozione di energia relativa standard [**2**]$_2$,

$$E = m_0 c^2/\sqrt{1 - u^2/c^2}\,, \tag{71}$$

e tenendo presenti le (52), (61)$_1$ e la (61)$_2$ è suscettibile della forma

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T} = m\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{u} + c^2 \frac{\sqrt{1 - \widehat{\boldsymbol{u}}^{*\prime 2}/c^2}}{1 - u^{*2}/c^2}\,\frac{(\mathrm{d}m_0)_1}{\mathrm{d}T} + c^2 \frac{\sqrt{1 - \widehat{u}^{**\prime 2}/c^2}}{1 - u^{**2}/c^2}\,\frac{(\mathrm{d}m_0)_2}{\mathrm{d}T}\,, \tag{72}$$

oppure, dopo le (54),

$$\mathrm{d}E = m\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}T - \mathrm{d}\varepsilon_1 + \mathrm{d}\varepsilon_2\,, \tag{73}$$

dove si è posto

$$\mathrm{d}\varepsilon_1 = \frac{c^2\,\mathrm{d}\mu_1}{1 - u^{*2}/c^2}\,, \quad \mathrm{d}\varepsilon_2 = \frac{c^2\,\mathrm{d}\mu_2}{1 - u^{**2}/c^2}\,. \tag{74}$$

Evidentemente, le (74) sono interpretabili, rispettivamente, come l'energia relativa standard degli elementi P^*, $\mathrm{d}\mu_1$ e P^{**}, $\mathrm{d}\mu_2$.

La (73) permette, in relatività generale, di enunciare con linguaggio newtoniano l'equazione del bilancio energetico della dinamica del punto a massa di quiete variabile nel caso generale. E più precisamente, essa esprime che *durante il moto relativo di un punto* P, m_0 *a massa di quiete variabile a causa di processi concomitanti di espulsione e ricezione simultanea di particelle, in ogni intervallo infinitesimo di tempo relativo standard* $\mathrm{d}T$, *il differenziale dell'energia relativa standard di* P, m_0 *è dato dal lavoro elementare della forza gravitazionale diminuito di* $\mathrm{d}\varepsilon_1$ *ed aumentato di* $\mathrm{d}\varepsilon_2$.

In assenza di campi gravitazionali veri la (73) si particolarizza in una relazione già nota in relatività ristretta [**3**]$_2$.

Bibliografia

[**1**] S. Benenti: [•]$_1$ *Accelerazione relativa e derivazione vincolata ad un generico riferimento fisico in relatività generale*, Rend. Mat. (VI) **2** (1969), 235-244; [•]$_2$ *Teorema dei moti relativi e di Coriolis in relatività generale*, Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino **28** (1968-1969), 115-133.

[**2**] C. Cattaneo: [•]$_1$ *Introduzione alla teoria einsteiniana della gravitazione*, Libreria Eredi Veschi, Roma 1960-1961; [•]$_2$ *General relativity: relative standard mass, momentum, energy and gravitational field in a general system of reference*, Nuovo Cimento **10** (1958), 318-337.

[**3**] G. CRUPI: [•]$_1$ *Sulla dinamica del punto a massa variabile in relatività generale. Aspetti newtoniani* (inviato per la pubblicazione presso il Boll. Un. Mat. Ital. 1978); [•]$_2$ *Considerazioni generali sulla dinamica relativistica del punto a massa variabile*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **105** (1971), 336-352.

[**4**] G. FERRARESE, *Contributi alla tecnica delle proiezioni in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale*, Rend. Mat. **22** (1963), 147-168.

[**5**] V. FOCK, *The theory of space time and gravitation*, Pergamon Press, 1964, 45-47.

Summary

We deduce in general relativity both the equations of the motion and of the energy for a material point of varying mass, when separation and addition of particles takes place simultaneously. In absence of a gravitational field we obtain the known results of the special relativity [**3**]$_2$.

* * *