Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 105-113

Vincenzo Millucci (*)

Ancora sulle onde di gravità in Magnetofluidodinamica (**)

A Giorgio Sestini per il suo 70° compleanno

1. - Introduzione

Le cosidette « onde di gravità », ben note in idrodinamica, sono caratterizzate dal propagarsi sotto l'azione delle forze peso (cfr. per es. [**9**] nn. 12, 13). Esse possono essere distinte in « onde di acqua bassa » ed « onde di acqua alta » (cfr. per es. [**3**] cap. 5, [**8**] cap. VIII-IX [**2**], cap. 5). Scopo principale del presente lavoro è lo studio, in Magnetofluidodinamica (MFD), delle « onde di acqua alta » (1), mentre in [**13**] è stato trattato il problema MFD relativo alle onde di acqua bassa.

L'interesse per tali indagini è giustificato dalla presenza determinante in questo tipo di problemi MFD di forze di massa non elettromagnetiche e dalla loro influenza anche su certe condizioni al contorno. Per una bibliografia sulla trattazione in MFD di problemi connessi alle onde di gravità si rimanda a [**11**], [**5**], [**6**], [**1**], [**4**], [**14**], [**15**].

L'uso di opportune condizioni al contorno permetterà, analogamente a quanto fatto in [**13**], rapide considerazioni sul comportamento di tali onde. Questo risulta in accordo con i risultati di alcuni esperimenti riportati in [**10**].

Si consideri dunque un fluido non viscoso, incomprimibile, omogeneo e perfettamente conduttore dell'elettricità; siano poi trascurabili la tensione superficiale e l'effetto Hall. Sia T una terna di coordinate cartesiane ortogonali, x, y e z, con versori, rispettivamente, $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$ e $\boldsymbol{i}_3$ ed il fluido occupi la regione $z \leqslant 0$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Via del Capitano 15, 53100 Siena, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 3-VII-1978.

(1) Per comodità di riferimento si useranno ancora i termini idrodinamici « onde di acqua bassa » ed « alta ».

Saranno esaminate perturbazioni che si propagano in una sola direzione, coincidente con quella dell'asse x. La gravità sia diretta come $-\boldsymbol{i}_3$, mentre l'induzione magnetica imperturbata, $\boldsymbol{B}_0$, sia uniforme e diretta come $+\boldsymbol{i}_3$. Senza perdere in generalità si potrà assumere inoltre che le perturbazioni siano rappresentate da funzioni dipendenti solo dalle coordinate x e z, oltre che dal tempo.

Al n. **2** si richiamano le equazioni e le condizioni al contorno cui le funzioni incognite debbono soddisfare.

Al n. **3** si fa vedere come sia possibile, anche in presenza della gravità, la propagazione di onde di Alfvèn. Ciò vale anche per onde ad ampiezza finita. La presenza della superficie libera determina la riflessione totale di tali onde.

Al n. **4** si presentano i risultati relativi alle onde di acqua alta in MFD.

2. - Impostazione matematica del problema

2.1. - Equazioni delle perturbazioni

Per il fluido di cui alla Introduzione, le equazioni di base, in unità di Gauss, sono:

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\operatorname{grad}\tilde{\boldsymbol{v}} = \operatorname{grad}\left(U - \frac{\tilde{p}}{\varrho}\right) + \frac{1}{4\pi\mu\varrho}(\operatorname{rot}\tilde{\boldsymbol{b}})\wedge\tilde{\boldsymbol{b}}, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div}\tilde{\boldsymbol{v}} = 0, \qquad \operatorname{div}\tilde{\boldsymbol{b}} = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{b}}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\tilde{\boldsymbol{v}}\wedge\tilde{\boldsymbol{b}}), \tag{2.3}$$

dove $\tilde{\boldsymbol{v}}$ è la velocità, U il potenziale delle forze di massa non elettromagnetiche, $\tilde{p}$ la pressione, ϱ la densità (costante), μ la permeabilità magnetica (costante), $\tilde{\boldsymbol{b}}$ il vettore induzione magnetica.

Per tenere conto della azione della gravità e in accordo a quanto, in MFD, è già stato fatto in [**11**], [**5**], [**6**], [**1**], [**4**], [**14**], [**15**] assumeremo per U la forma: $U = -gz$, con g accelerazione (costante) di gravità.

Si ammetta che le onde in studio rappresentino delle piccole perturbazioni ad uno stato iniziale d'equilibrio e, in accordo alle ipotesi fatte nella Introduzione, si scrivano i campi incogniti nella forma

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}, \qquad \tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{b}, \tag{2.4}$$

$$\tilde{p} = p^* + p\,, \tag{2.5}$$

dove: $\boldsymbol{B}_0 = B_0 \boldsymbol{i}_3$, $p^* = p_0 - \varrho g z$ con p_0 pressione iniziale (costante) sulla superficie libera del fluido. $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{b}$ e p rappresentano le perturbazioni allo stato iniziale caratterizzato da velocità nulla, da $\boldsymbol{B}_0$ e p^*. È semplice verificare che tali valori iniziali soddisfano le (2.1), (2.2) e (2.3). In accordo a quanto detto nella Introduzione si scriverà poi

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{3} v_k(x, z, t)\,\boldsymbol{i}_k\,, \qquad \boldsymbol{b} = \sum_{k=1}^{3} b_k(x, z, t)\,\boldsymbol{i}_k\,, \qquad p = p(x, z, t)\,. \tag{2.6}$$

Sostituendo le (2.4) e (2.5) nelle (2.1), (2.2) e (2.3) si potranno trascurare i termini non lineari in $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{b}$ e p. Se si proiettano ora le equazioni così ottenute lungo i tre assi coordinati, si ottiene (cfr. (2.6))

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{B_0}{4\pi\mu\varrho}\left(\frac{\partial b_1}{\partial z} - \frac{\partial b_3}{\partial x}\right), \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{B_0}{4\pi\mu\varrho}\frac{\partial b_2}{\partial z}\,, \qquad \frac{\partial b_2}{\partial t} = B_0\frac{\partial v_2}{\partial z}\,, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\,, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0\,, \qquad \frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_3}{\partial z} = 0\,, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial t} = B_0\frac{\partial v_1}{\partial z}\,, \qquad \frac{\partial b_3}{\partial t} = -B_0\frac{\partial v_1}{\partial x}\,. \tag{2.11}$$

2.2. - Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno sulla superficie libera $z = 0$ sono (cfr. [**13**] e la bibliografia ivi citata): (1) continuità della pressione; (2) continuità dell'induzione magnetica $\tilde{\boldsymbol{b}}$.

Si può poi dimostrare (cfr. (2.12) e (2.13) di [**13**]) che, nell'ambito linearizzato, la (1) si traduce nella

$$\left|\frac{\partial p}{\partial t} - \varrho g v_3\right|_{z=0} = 0 \tag{2.12}$$

($|f|_{z=0}$ indica il valore assunto dalla funzione f per $z = 0$).

3. - Onde di Alfvén

Nel sistema di equazioni (2.7), ..., (2.11) le (2.8) risultano separate dalle altre e forniscono per v_2 e b_2

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} - \frac{1}{A_0^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 b_2}{\partial z^2} - \frac{1}{A_0^2}\frac{\partial^2 b_2}{\partial t^2} = 0\,,$$

dove $A_0^2 = B_0^2/4\pi\mu\varrho$ è il quadrato della velocità di Alfvèn. Potremo allora scrivere in particolare

$$v_2 = v_2^0 \exp\big(i(Kz \pm \omega t)\big)\,, \qquad b_2 = b_2^0 \exp\big(i(Kz \pm \omega t)\big)\,, \tag{3.1}$$

con chiaro significato dei simboli.

È poi semplice controllare che le equazioni (2.7), (2.9), (2.10) e (2.11) ammettono, insieme ad altre che qui non si considerano, le seguenti soluzioni

$$v_1 = v_1^0 \exp\big(i(Kz \pm \omega t)\big)\,, \qquad b_1 = b_1^0 \exp\big(i(Kz \pm \omega t)\big)\,, \tag{3.2}$$
$$v_3 = 0\,, \qquad b_3 = 0\,, \qquad p = 0\,.$$

Inoltre per le (3.1) e (3.2) vale

$$\boldsymbol{b} = \pm\sqrt{4\pi\mu\varrho}\,\boldsymbol{v}\,, \tag{3.3}$$

dove i segni $+$ e $-$ si riferiscono, rispettivamente, alle onde propagantesi nel verso negativo e positivo dell'asse z.

In pratica si ritrovano, in presenza della gravità, le classiche onde piane di Alfvèn, polarizzate linearmente e con direzione di propagazione parallela al campo $\boldsymbol{B}_0$ (cfr. per es. [**2**] n. 3.1).

Con riguardo alla presenza della superficie del fluido, se nella regione $z > 0$ l'induzione magnetica è rappresentata dal solo campo $\boldsymbol{B}_0$, la condizione (2) del n. **2.2** impone che per $z = 0$ sia nullo il campo $\boldsymbol{b}$ «interno» al fluido.

Questa condizione può essere soddisfatta interpretando le soluzioni (3.1), (3.2) come un treno d'onde propagantesi in direzione $+\,\boldsymbol{i}_3$ che incide sulla superficie libera e viene totalmente riflesso. Infatti, chiamando $\boldsymbol{b}_i$ e $\boldsymbol{b}_r$ i campi incidenti e riflesso, deve essere per $z = 0$

$$\boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{b}_r = 0\,. \tag{3.4}$$

Questo implica che $\boldsymbol{b}$ inverte la fase nella riflessione mentre da (3.3) segue che per il campo cinetico $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_r$; cioè non c'è alterazione di fase. Questo è in accordo con i risultati dati in [**5**] n. 3.5, con riguardo a problemi di riflessione e rifrazione di onde MFD.

Da ultimo si può osservare che in assenza di forze di massa di origine non elettromagnetica sono note onde MFD ad ampiezza finita (cfr. [**5**] pag. 69-70). La condizione richiesta per l'esistenza di tali onde è che tutte le variabili dipendano solo dalla coordinata z oltre che dal tempo, ferma restando l'ipotesi di campo imperturbato $\boldsymbol{B}_0$ (uniforme) diretto lungo z.

Nel presente lavoro sono presenti le forze peso ma, con riferimento alle (3.1) e (3.2), sono ancora verificate le condizioni di cui sopra. Per tali onde e in presenza della gravità sarà dunque possibile anche la propagazione con ampiezza finita.

4. - Onde di acqua alta in MFD

4.1. - Soluzioni indefinite

In idrodinamica con il nome di onde di acqua alta si intendono quelle perturbazioni per le quali non è trascurabile la componente verticale dell'accelerazione (cfr. per es. [**3**] p. 77, [**8**] cap. IX). A questo tipo di onde appartengono la maggior parte di quelle suscitate dal vento o dalla tensione superficiale; il moto non si estende molto al di sotto della superficie libera del liquido. Per questo l'ampiezza delle perturbazioni dipende dalla coordinata z e sono spesso chiamate « onde superficiali ».

Lo studio di queste onde in MFD può essere fatto partendo dal sistema di equazioni (2.7), (2.9), (2.10), (2.11) e ammettendo che le perturbazioni dipendano solo dalle coordinate x, z e t secondo le

$$\boldsymbol{v} = [V_1(z)\boldsymbol{i}_1 + V_3(z)\boldsymbol{i}_3] \exp\big(i(Kx - \omega t)\big) , \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{b} = [B_1(z)\,\boldsymbol{i}_1 + B_3(z)\,\boldsymbol{i}_3 \exp\big(i(Kx - \omega t)\big) , \tag{4.2}$$

$$p = P(z) \exp\big(i(Kx - \omega t)\big) , \tag{4.3}$$

con ovvio significato dei simboli.

Nel caso puramente idrodinamico, con fluido ideale, si richiede che K ed ω siano reali e non nulli. Ciò traduce il disinteresse per eventuali soluzioni che rappresentino smorzamenti non compatibili con il modello assunto. Nel caso MFD assumeremo la stessa ipotesi per K ed ω.

Sostituendo (4.1), ..., (4.3) nelle equazioni (2.7), (2.9), (2.10) e (2.11) si ottiene il seguente sistema determinato di equazioni indipendenti

$$-i\omega V_1 + i\frac{K}{\varrho}P - \frac{B_0}{4\pi\mu\varrho}\left(\frac{\mathrm{d}B_1}{\mathrm{d}z} - iKB_3\right) = 0\,, \tag{4.4}$$

$$-i\omega V_3 + \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = 0\,, \tag{4.5}$$

$$iKV_1 + \frac{\mathrm{d}V_3}{\mathrm{d}z} = 0\,, \tag{4.6}$$

$$-i\omega B_1 = B_0\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}z}\,, \tag{4.7}$$

$$-i\omega B_3 = -iKB_0V_1\,. \tag{4.8}$$

Le incognite V_1, V_3, B_1, B_3 e P dovranno poi soddisfare la condizione (2.12) che fornirà l'equazione di dispersione.

Derivando (4.4) rispetto a z ed eliminando

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}z}\,,\quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2B_1}{\mathrm{d}z^2}\,,\quad \frac{\mathrm{d}B_3}{\mathrm{d}z}$$

si ottiene

$$\frac{B_0^2}{4\pi\mu\varrho\omega K}\frac{\mathrm{d}^4V_3}{\mathrm{d}z^4} + \left(\frac{\omega}{K} - \frac{K}{\omega}\frac{B_0^2}{4\pi\mu\varrho}\right)\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2} - \omega KV_3 = 0\,. \tag{4.9}$$

Questa ammette come soluzioni le combinazioni lineari del tipo

$$V_3 = \sum_{r=1}^{4} c_r \exp(\lambda_r z)\,, \tag{4.10}$$

con c_r costanti arbitrarie, e

$$\lambda_{\substack{1\\2}} = \pm K\,, \qquad \lambda_{\substack{3\\4}} = \pm i\frac{\omega}{A_0}\,, \tag{4.11}$$

con A_0 velocità di Alfvèn.

In base alla forma di $\lambda_{\substack{1\\2}}$ si può assumere che K abbia sempre valori positivi. Segue allora che $\lambda_2 = -K$ non è accettabile. Infatti il fluido è confinato nella regione $z \leqslant 0$ e dunque le (4.1), (4.2) e (4.3) avrebbero, in corrispondenza di λ_2, ampiezze divergenti e ciò non è fisicamente corretto. Situazioni analoghe sono note anche in idrodinamica (cfr. per es. [**9**] p. 53), ed in altri problemi MFD (cfr. per es. [**15**] p. 122).

Per i valori $\lambda_{\substack{3\\4}}$ si può osservare già che le corrispondenti soluzioni (con K ed ω reali) per $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{b}$ e p rappresenterebbero onde con direzione di propagazione generica parallela al piano x, z. Non sarebbe più possibile quindi considerarle come onde di acqua alta in MFD.

Dalle (4.4), ..., (4.8) segue, in definitiva, per le soluzioni del nostro problema

$$v_1 = ic_1 \exp(Kz) \exp\big(i(Kx-\omega t)\big)\,, \quad v_3 = c_1 \exp(Kz) \exp\big(i(Kx-\omega t)\big)\,, \tag{4.12}$$

$$b_1 = -c_1 \frac{KB_0}{\omega} \exp(Kz) \exp\big(i(Kx-\omega t)\big)\,, \quad b_3 = i\frac{KB_0}{\omega} c_1 \exp(Kz) \exp\big(i(Kx-\omega t)\big),$$

$$p = i\frac{\omega}{K} \varrho c_1 \exp(Kz) \exp\big(i(Kx-\omega t)\big)\,,$$

dove c_1 è ancora una costante arbitraria e, come d'uso in simili trattazioni, è la parte reale di queste funzioni ad avere significato fisico.

È da notare che le soluzioni per v_1, v_3 e p coincidono con quelle del caso puramente idrodinamico. In **4.2** si controllerà che anche la equazione di dispersione è la stessa. Nell'ambito magnetofluidodinamico c'è, in più, la sola perturbazione all'induzione magnetica.

Ciò si può spiegare osservando che dalle (4.12) segue: $\operatorname{rot} \boldsymbol{b} = 0$. Siamo quindi in presenza di un particolare caso dei cosiddetti «force-free fields» (cfr. [**1**] n. 40(b)). Per questi campi l'equazione di moto è quella puramente idrodinamica e dunque il campo cinetico avrà le stesse soluzioni indefinite. Non è però nullo il termine $\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}_0)$ che determina la variazione temporale di $\boldsymbol{b}$. Da qui segue l'esistenza delle perturbazioni all'induzione magnetica.

4.2. - Condizioni al contorno

Imponendo alle (4.12) di verificare anche la condizione (2.12) si ottiene

$$\frac{B_0^2}{4\pi\mu\omega K^2}\lambda_r^3 + \Big(\frac{\omega}{K^2}\varrho - \frac{B_0^2}{4\pi\mu\omega}\Big)\lambda_r - \frac{\varrho g}{\omega} = 0\,, \tag{4.13}$$

con λ_r forniti da (4.11).

Il fatto che a diversi valori di λ_r corrispondano differenti equazioni di dispersione suggerisce che le (4.10) possano rappresentare la sovrapposizione di fenomeni fisicamente distinti.

In corrispondenza del valore $\lambda_1 = K$ si ottiene il seguente legame tra ω e K relativamente alle soluzioni (4.12)

$$\omega^2 - Kg = 0 . \tag{4.14}$$

È questa la stessa equazione di dispersione valida nel caso puramente idrodinamico (cfr. [**9**] p. 53).

Gli aspetti tipicamente magnetofluidodinamici del problema sono messi in evidenza dalla discussione della condizione al contorno che richiede la continuità di $\boldsymbol{b}$ per $z = 0$.

Se all'esterno del fluido esiste solo il campo $\boldsymbol{B}_0$ allora si dovrà imporre che $\boldsymbol{b}$ si annulli sulla superficie $z = 0$. Ma ciò, si veda le (4.12), implica che tutte le perturbazioni si annullino per qualunque valore di x, z e t. Cioè le soluzioni date non sono compatibili con le condizioni al contorno e non sarà possibile eccitare onde di acqua alta nel nostro fluido sottoposto all'azione del campo $\boldsymbol{B}_0$.

Negli esperimenti di cui in [**10**] si possono trovare le conferme sperimentali per questo tipo di risultato. Inoltre, con argomenti diversi, la conclusione presentata è discussa in [**14**] (pt. III/A) e [**1**] (n. 96(b)).

L'unico modo per avere soluzioni non nulle è quello di soddisfare la condizione di continuità di $\boldsymbol{b}$ per $z = 0$ con opportuni campi magnetici generati all'esterno del fluido. Per problemi analoghi a questo ma in assenza della gravità si rimanda a [**7**] (sect. 8.6 e seguenti).

Può essere interessante osservare, infine, che in corrispondenza dei valori λ_3 e λ_4 dati in (4.11) si otterrebbero equazioni di dispersione in base alle quali K e ω non potrebbero avere, entrambi contemporaneamente, valori reali. Ciò rafforza quanto già osservato in **4.1**, a proposito delle corrispondenti soluzioni per $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{b}$ e p: non rappresentano soluzioni compatibili con il problema delle onde di acqua alta in MFD. Anche questo è in accordo con quanto, per altra via, è affermato nei già citati [**14**] e [**1**].

Bibliografia

[**1**] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic stability,* Oxford 1961.

[**2**] B. H. Chirgwin and C. Plumpton, *Elementary classical Hydrodynamics,* Pergamon Press, Oxford 1967.

[**3**] C. A. Coulson, *Onde,* Cremonese, 1965.

[4] L. E. FRAENKEL, *A shallow liquid theory in Magnetohydrodynamics*, J. Fluid Mech. **7**/1, 81.

[5] V. C. A. FERRARO and C. PLUMPTON, *An introduction to Magnetofluid Mechanics*, Oxford 1966.

[6] E. HIDE and P. H. ROBERTS, *Some elementary problems in Magnetohydrodynamics*, Advances in Applied Mechanics, Academic Press, New York **7** (1962).

[7] W. F. HUGHES and F. J. YOUNG, *The electromagnetodynamics of fluids*, Wiley 1966.

[8] H. LAMB, *Hydrodynamics*, Cambridge 1975.

[9] L. LANDAU and c. LIFCHITZ, *Mécanique des fluides*, Ed. Mir 1971.

[10] B. LEHNERT, *On the behaviour of an electrically conductive liquid in a magnetic field*, Ark. f. Fys. **5** (1952), 69.

[11] S. LUNDQUIST, *Studies in Magnetohydrodynamics*, Ark. f. Fys. **5** (1952), 297.

[12] G. MATTEI, *Propagazione di onde magnetofluidodinamiche in un plasma incomprimibile*, Ann. Mat. Pura Appl. **94** (1972), 315-344.

[13] V. MILLUCCI, *Onde di gravità in Magnetofluidodinamica*, Rend. Sem. Mat. Univ. e Politecn. Torino **36** (1977-78), 173-181.

[14] P. H. ROBERTS and A. D. BOARDMAN, *The effect of a vertical magnetic field on the propagation of gravity waves along the plane surface of a seminfinite viscous, electrically conducting fluids*, Astrophys. J. **135** (1962), 552-592.

[15] D. SUMMERS, *Gravity modified sound waves in a conducting stratified atmosphere*, Quart. J. Mech. Appl. Math. **29** (1976), 117-126.

Summary

In a previous paper we have studied, in Magnetofluid-dynamics, the propagation of a certain type of gravity waves. In this paper we examine a different type of waves of the same family. Attention is given to the influence of the boundary conditions on determining the actual solutions.

* * *