Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 413-432

L. BASSOTTI RIZZA - G. DI COLA (*)

Difetti ed eccessi degli autovalori di un problema di elasticità relativo al cubo (**)

1. – Sia $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$ un punto dello spazio cartesiano $\mathscr{R}^3$, K il cubo definito da $|x_i| < \pi/2$, $\mathscr{C}^\infty(K)$ lo spazio dei vettori $w \equiv (w_1, w_2, w_3)$ con w_i funzione reale di classe C^∞ in K. In un precedente lavoro (^{1}) L. Bassotti ha dimostrato che lo spazio $\mathscr{C}^\infty(K)$ si può decomporre in sedici sottospazi, ciascuno dei quali risulta invariante per l'operatore vettoriale dell'elasticità

$$L_\sigma \equiv - \Delta_2 - \sigma \operatorname{grad} \operatorname{div}, \tag{1.1}$$

ove σ è una costante positiva assegnata. La decomposizione ottenuta gode della proprietà che, se v è un vecttore continuo in $\bar{K}$ e nullo su $\mathscr{F}K$, lo stesso avviene per le proiezioni di v in ciascuno dei sottospazi della decomposizione.

Si consideri ora il seguente problema di autovalori

$$L_\sigma w - \lambda w = 0 \quad \text{in } K, \qquad w = 0 \quad \text{su } \mathscr{F}K, \tag{1.2}$$

nello spazio vettoriale $U(K)$ costituito dai vettori di $\mathscr{C}^\infty(K)$ con componenti di quadrato sommabile in K e dotate di derivate prime di quadrato sommabile in K (^{2}).

(*) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.I.M. (C.N.R.). I risultati di questo lavoro saranno comunicati al « International Congress of Mathematicians - Helsinki, Finland - August 15-23, 1978 ». — Ricevuto il 12-VI-1978.

(^{1}) Si confronti [2]$_3$. Successivamente in [2]$_4$ è stata ottenuta una decomposizione ulteriore di alcuni sottospasi, raggiungendo così una decomposizione in 20 sottospazi. Ai fini del presente lavoro, quest'ultima decomposizione non si è dimostrata utile.

(^{2}) Per un vettore $w \in U(K)$, la condizione $w = 0$ su $\mathscr{F}K$ va intesa in senso generalizzato. Se H denota l'insieme dei punti regolari di $\mathscr{F}K$, ogni vettore w soluzione di $L_\sigma w - \lambda w = 0$ in K è continuo in $K \cup H$ e di conseguenza la condizione $w = 0$ può essere interpretata in senso classico.

In questo lavoro si mostra come, utilizzando la decomposizione sopra accennata, si possano ottenere limitazioni per eccesso e per difetto di 70 autovalori, in corrispondenza a $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ (50 autovalori per $\sigma = 3$, 4 e 5), con un errore relativo per molti di essi inferiore a 0,1 e comunque non superiore a 0,2; si danno inoltre indicazioni sulla molteplicità di alcuni autovalori.

Per il calcolo delle approssimazioni per eccesso si è usato il metodo di Rayleigh-Ritz, operando in ciascuno dei 16 sottospazi con matrici di ordine compreso fra 55 e 65. Le approssimazioni per difetto sono state invece ottenute con il metodo degli invarianti ortogonali di G. Fichera e precisamente per mezzo dell'invariante $\mathfrak{J}_1^3(\tilde{\Gamma}_\sigma)$ di un opportuno operatore $\tilde{\Gamma}_\sigma$ approssimante l'operatore di Green associato al problema di Dirichlet per l'operatore (1.1).

L'applicazione dei metodi ora accennati allo specifico problema da noi studiato ha richiesto il superamento di particolari difficoltà che sono state affrontate usando alcuni accorgimenti che verranno in seguito segnalati.

Tutti i calcoli sono stati eseguiti sul minicalcolatore DIGITAL PDP 11/40, dotato di $32K$ parole di memoria, dell'Istituto di Matematica dell'Università di Parma.

2. – Dal lavoro [**2**]$_3$ segue subito che lo spazio vettoriale $U(K)$, nel quale si considera il problema (1.2), è somma diretta di sedici sottospazi $U^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(K)$ $(\alpha_i = 0, 1)$; pertanto il problema (1.2) si spezza nei sedici problemi

$$L_\sigma w - \lambda w = 0 \quad \text{in } K, \qquad w = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}K, \qquad w \in U^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(K). \tag{2.1}$$

Fissato il sottospazio $U^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(K)$, il relativo problema (2.1) ammette una successione infinita di autovalori $\lambda_i^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ tutti positivi, ciascuno di molteplicità finita

$$\lambda_1^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \leqslant \lambda_2^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \leqslant \ldots . \tag{2.2}$$

In essa ogni autovalore è ripetuto un numero di volte uguale alla molteplicità.

In base ad un precedente risultato ([3]), gli autovalori del problema (1.2) si ottengono riunendo in un'unica successione gli autovalori delle successioni (2.2); inoltre riesce

$$\lambda_k^{\alpha\alpha\gamma\beta} = \lambda_k^{\alpha\gamma\alpha\beta} = \lambda_k^{\gamma\alpha\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1; \ \alpha \neq \gamma). \tag{2.3}$$

([3]) Si confronti [**2**]$_3$ teor. 4.1.

Le (2.3) permettono di ridurre il calcolo degli autovalori a soli otto sottospazi. Dalle (2.3) appare che *ogni autovalore* $\lambda_k^{\alpha\alpha\gamma\beta}$ $(\alpha \neq \gamma)$ *risulta essere almeno triplo come autovalore di* (1.2).

Nel seguito i problemi relativi all'approssimazione degli autovalori verranno studiati negli otto sottospazi $U^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 0, 1)$; quando non ci sia luogo ad equivoco, gli autovalori del problema (2.1), corrispondenti ad un fissato sottospazio $U^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K)$, saranno indicati semplicemente con $\lambda_k^{(\sigma)}$.

3. – Lo spazio $U(K)$ può riguardarsi come sottospazio vettoriale dello spazio di Hilbert $W(K)$ dei vettori a tre componenti funzioni misurabili e di quadrato sommabile (secondo Lebesgue) in K, con la consueta definizione di prodotto scalare

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{3} \int_K u_i(x) v_i(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{3.1}$$

Lo spazio $W(K)$, che è la chiusura di $U(K)$ sulla metrica definita dal prodotto scalare (3.1), può decomporsi anch'esso in sedici sottospazi $W^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(K)$, ciascuno dei quali è la chisura del corrispondente $U^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(K)$.

Conviene ora fissare, in ciascun sottospazio, una base numerabile costituita di vettori nulli su $\mathcal{F}K$. È abbastanza naturale scegliere come base in $U^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K)$, e quindi in $W^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K)$, il sistema ortonormale $\{v_k\}$ degli autovettori del problema (2.1) corrispondente al caso $\sigma = 0$; com'è noto, detto sistema risulta completo in $W^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K)$. Posto

$$\varphi_{h_1h_2h_3}(x) = \operatorname{sen} h_1(x_1 + \pi/2) \operatorname{sen} h_2(x_2 + \pi/2) \operatorname{sen} h_3(x_3 + \pi/2)\,, \qquad h_j \in N^+\,,$$

risulta

$$\Delta_2 \varphi_{h_1h_2h_3} = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)\varphi_{h_1h_2h_3} \quad \text{in } K\,, \qquad \varphi_{h_1h_2h_3} = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}K\,. \tag{3.2}$$

Di conseguenza i vettori

$$\big(\varphi_{h_1h_2h_3}(x), 0, 0\big)\,, \qquad \big(0, \varphi_{h_1h_2h_3}(x), 0\big)\,, \qquad \big(0, 0, \varphi_{h_1h_2h_3}(x)\big)\,, \tag{3.3}$$

al variare della terna $h_1h_2h_3$, danno luogo ad un sistema ortogonale di autovettori del problema (1.2) relativo a $\sigma = 0$, completo in $W(K)$. Combinando opportunamente i vettori del sistema (3.3), si ottengono vettori appartenenti ai sottospazi della decomposizione considerata. Precisamente, *i vettori*

$$2\pi^{-3/2}\big(\varphi_{r_1r_2r_3}(x), (-1)^\beta \varphi_{r_1r_2r_3}(x), 0\big) \tag{3.4}$$

$$(3.5) \qquad 2\pi^{-3/2}(1+\delta_{t_2}^{t_1})^{-1/2}(0,0,\varphi_{t_1t_2t_3}(x)+(-1)^\beta\varphi_{t_1t_2t_3}(x))$$

nulli su $\mathcal{F}K$, *al variare delle terne di interi positivi* $r_1r_2r_3$ *e* $t_1t_2t_3$ *con le condizioni*

$$(3.6) \qquad r_1\equiv\alpha\,,\quad r_2\equiv\alpha+1\,,\quad r_3\equiv\gamma+1 \qquad (\operatorname{mod}2)\,,$$

$$(3.7) \qquad t_1\equiv t_2\equiv\alpha+1\,,\quad t_3\equiv\gamma \qquad (\operatorname{mod}2)\,,$$

$$(3.8) \qquad t_1\leqslant t_2 \quad \text{se } \beta=0\,,\qquad t_1>t_2 \quad \text{se } \beta=1\,,$$

appartengono ad $U^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K)$ *e costituiscono un sistema ortonormale e completo in* $W^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K)$.

4. – Si consideri ora il sottospazio $U^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K)$. Questo numero è dedicato all'approssimazione per eccesso degli autovalori del problema

$$(4.1) \qquad L_\sigma w-\lambda w=0 \quad \text{in } K\,,\qquad w=0 \quad \text{su } \mathcal{F}K\,,\qquad w\in U^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K)\,.$$

Scelti due interi positivi p, q, si considerino p vettori $v_1,\dots,v_p$ del sistema (3.4), q vettori $v_{p+1},\dots,v_{p+q}$ del sistema (3.5) e si costruisca la matrice $C^{(\sigma)}$ di ordine $s=p+q$, di elementi

$$(4.2) \qquad c_{ij}^{(\sigma)}=(L_\sigma v_i,v_j)\,,\qquad (i,j=1,\dots,s)\,.$$

La matrice $C^{(\sigma)}$ è simmetrica e definita positiva per ogni $\sigma\geqslant0$; i suoi autovalori danno luogo alla successione

$$(4.3) \qquad \mu_1^{(\sigma)}\leqslant\mu_2^{(\sigma)}\leqslant\dots\leqslant\mu_s^{(\sigma)}\,,$$

nella quale ogni autovalore è ripetuto un numero di volte uguale alla molteplicità.

Com'è noto, il procedimento di Rayleigh-Ritz assicura che il k-esimo autovalore $\lambda_k^{(\sigma)}$ del problema (4.1) e il k-esimo autovalore $\mu_k^{(\sigma)}$ della matrice $C^{(\sigma)}$ sono legati dalla diseguaglianza

$$(4.4) \qquad \lambda_k^{(\sigma)}\leqslant\mu_k^{(\sigma)}\,.$$

Per $\sigma=0$, nella (4.4) si ha l'uguaglianza per ogni k.

Inoltre, per una proprietà della forma quadratica $(L_\sigma v,v)$ associata al problema (4.1), se $0\leqslant\sigma\leqslant\sigma'$, riesce

$$(4.5) \qquad \lambda_k^{(0)}\leqslant\lambda_k^{(\sigma)}\leqslant\lambda_k^{(\sigma')}\,,\qquad \mu_k^{(0)}\leqslant\mu_k^{(\sigma)}\leqslant\mu_k^{(\sigma')}\,.$$

Tenendo presente le (4.4) e fissato l'ordine s della matrice $C^{(\sigma)}$, si è sfruttata l'arbitrarietà della scelta di s vettori nei sistemi (3.4) e (3.5) per migliorare le approssimazioni $\mu_k^{(\sigma)}$ minimizzando la traccia di $C^{(\sigma)}$. Inoltre in ciascuno sottospazio si è scelto s in modo che tutte le approssimazioni $\mu_k^{(\sigma)}$ $(k = 1, \ldots, s)$ cadano in un fissato intervallo $[0, N]$.

I calcoli sono stati eseguiti per $\sigma = 1, 2, 3, 4$ e 5, fissato in corrispondenza $N = 110, 120, 130, 140, 160$; l'ordine s della matrice $C^{(\sigma)}$ è risultato sempre compreso fra 50 e 65. È stata infine controllata la stabilità delle prime 10 approssimazioni $\mu_k^{(\sigma)}$ al crescere dell'ordine di $C^{(\sigma)}$.

Nelle tabelle che seguono vengono riportati i valori ottenuti per $\mu_k^{(\sigma)}$ in corrispondenza a $\sigma = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ed a $k = 1, \ldots, 10$, in ciascuno degli otto sottospazi considerati.

Valori per eccesso $\mu_k^{(\sigma)}$ *in* U^{0010}.

	$\sigma = 0$	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 3$	$\sigma = 4$	$\sigma = 5$
$k = 1$	3	3.872	4.607	5.257	5.843	6.363
$= 2$	9	10.985	11.356	11.652	11.969	12.309
$= 3$	11	13.367	15.93	17.45	18.30	18.73
$= 4$	11	18.80	19.04	19.24	19.46	19.69
$= 5$	17	19.32	22.65	24.63	26.57	27.81
$= 6$	19	22.03	25.33	26.91	28.16	28.87
$= 7$	19	23.05	27.12	28.62	30.63	32.33
$= 8$	21	26.99	28.62	31.13	33.95	35.66
$= 9$	21	28.03	30.68	32.52	35.71	36.49
$= 10$	27	29.81	34.78	35.21	36.47	38.09

Valori per eccesso $\mu_k^{(\sigma)}$ *in* U^{0011}.

	$\sigma = 0$	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 3$	$\sigma = 4$	$\sigma = 5$
$k = 1$	9	10.553	10.794	10.892	10.957	11.007
$= 2$	11	12.794	14.638	15.686	16.286	16.646
$= 3$	17	17.99	18.89	19.61	20.16	20.54
$= 4$	19	21.59	22.82	24.12	25.39	26.33
$= 5$	21	26.38	27.80	28.43	28.95	29.29
$= 6$	21	27.45	29.12	29.84	30.63	31.53
$= 7$	27	30.14	32.31	34.19	35.23	35.39
$= 8$	29	32.78	34.79	35.21	36.93	38.58
$= 9$	29	34.52	35.16	36.36	38.05	39.59
$= 10$	33	35.86	42.02	44.07	44.51	46.26

Valori per eccesso $\mu_k^{(\sigma)}$ *in* U^{1100}.

	$\sigma=0$	$\sigma=1$	$\sigma=2$	$\sigma=3$	$\sigma=4$	$\sigma=5$
$k=1$	6	7.468	8.662	9.665	10.476	11.124
$=2$	12	13.583	13.990	14.298	14.601	14.920
$=3$	14	16.46	18.24	18.92	19.47	20.06
$=4$	14	18.35	19.25	20.41	21.25	22.44
$=5$	18	24.09	25.78	26.04	26.17	26.30
$=6$	22	25.87	27.18	28.64	29.82	31.42
$=7$	24	26.30	31.14	32.76	34.25	36.22
$=8$	24	29.67	33.12	36.26	37.51	39.84
$=9$	26	31.56	35.22	37.28	39.16	40.69
$=10$	26	35.51	38.20	39.36	39.98	42.04

Valori per eccesso $\mu_k^{(\sigma)}$ *in* U^{1101}.

	$\sigma=0$	$\sigma=1$	$\sigma=2$	$\sigma=3$	$\sigma=4$	$\sigma=5$
$k=1$	6	6.146	6.207	6.241	6.265	6.352
$=2$	14	14.138	14.193	14.225	14.249	14.340
$=3$	14	17.44	17.76	17.88	17.95	18.76
$=4$	18	20.30	22.53	23.43	23.89	25.35
$=5$	22	24.16	24.96	25.53	25.86	26.52
$=6$	24	25.85	26.01	26.13	26.32	27.39
$=7$	26	28.76	30.17	30.22	30.31	30.34
$=8$	26	30.09	31.49	32.99	33.91	34.55
$=9$	30	30.31	34.11	36.61	37.99	41.33
$=10$	30	36.28	38.03	39.13	40.82	42.00

Valori per eccesso $\mu_k^{(\sigma)}$ *in* U^{1110}.

	$\sigma=0$	$\sigma=1$	$\sigma=2$	$\sigma=3$	$\sigma=4$	$\sigma=5$
$k=1$	9	9.143	9.201	9.235	9.259	9.347
$=2$	9	10.960	12.467	13.692	14.686	15.580
$=3$	17	20.06	20.48	20.65	20.80	21.34
$=4$	17	21.15	21.20	21.25	21.31	22.30
$=5$	21	21.62	22.55	23.53	24.59	28.11
$=6$	21	23.81	26.11	27.32	29.63	30.89
$=7$	21	29.33	32.86	33.10	33.53	33.76
$=8$	29	32.32	32.91	33.27	33.61	35.69
$=9$	29	33.35	36.51	39.34	41.33	41.37
$=10$	29	33.47	38.61	41.29	41.57	45.07

Valori per eccesso $\mu_k^{(\sigma)}$ *in* U^{1111}.

	$\sigma=0$	$\sigma=1$	$\sigma=2$	$\sigma=3$	$\sigma=4$	$\sigma=5$
$k=1$	9	9.143	9.201	9.235	9.259	9.346
$=2$	17	20.064	20.478	20.640	20.744	21.271
$=3$	21	21.09	21.14	21.17	21.20	21.34
$=4$	21	21.15	21.20	21.23	21.26	22.13
$=5$	21	23.81	26.10	27.30	28.04	29.22
$=6$	29	30.00	30.47	30.80	31.07	33.35
$=7$	29	32.32	32.88	32.98	33.04	34.46
$=8$	29	33.35	36.43	39.02	40.50	41.30
$=9$	33	37.76	40.35	41.23	41.27	41.36
$=10$	33	41.12	41.18	41.28	41.33	41.83

Valori per eccesso $\mu_k^{(\sigma)}$ *in* U^{0000}.

	$\sigma=0$	$\sigma=1$	$\sigma=2$	$\sigma=3$	$\sigma=4$	$\sigma=5$
$k=1$	6	8.822	10.727	11.861	12.511	12.936
$=2$	6	10.971	15.184	18.776	20.579	21.675
$=3$	14	15.38	17.01	18.89	21.73	24.13
$=4$	14	18.73	21.16	22.18	22.97	24.40
$=5$	14	19.86	24.44	26.59	28.08	30.54
$=6$	18	23.12	24.76	28.12	31.39	35.09
$=7$	18	27.72	30.66	32.74	34.64	35.95
$=8$	22	29.53	31.83	33.89	35.59	37.29
$=9$	22	30.85	34.97	37.47	39.20	40.96
$=10$	26	31.11	36.52	39.17	41.02	42.12

Valori per eccesso $\mu_k^{(\sigma)}$ *in* U^{0001}.

	$\sigma=0$	$\sigma=1$	$\sigma=2$	$\sigma=3$	$\sigma=4$	$\sigma=5$
$k=1$	6	8.822	10.716	11.852	12.510	12.933
$=2$	14	14.476	14.656	14.912	15.045	15.158
$=3$	14	15.38	16.93	18.89	20.57	21.59
$=4$	14	18.72	21.10	22.16	22.96	24.12
$=5$	18	23.12	24.66	26.55	28.07	29.33
$=6$	22	29.53	30.14	31.73	32.62	33.31
$=7$	26	29.66	30.67	33.67	35.52	36.84
$=8$	26	31.11	33.69	37.44	38.80	39.07
$=9$	26	33.29	37.32	38.46	38.82	40.23
$=10$	30	35.67	37.76	39.02	39.99	40.99

5. – Le approssimazioni per difetto degli autovalori del problema (4.1) si potrebbero ottenere applicando direttamente il metodo degli invarianti ortogonali di G. Fichera (4). Per questo occorre però la costruzione dell'operatore di Green Γ_σ associato ad L_σ (5). Agli effetti del calcolo è più conveniente procedere in altro modo; si costruisce in ciascun sottospazio $U^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K)$ un « operatore $\tilde{L}_\sigma$ intermedio fra L_0 e L_σ », secondo un procedimento indicato da Aronszajn, e si applica al problema corrispondente il metodo degli invarianti ortogonali.

Posto

$$L' \equiv -\operatorname{grad}\operatorname{div} \tag{5.1}$$

e fissato un intero positivo n, si scelgano in $U^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K)$ n vettori $v_1, \ldots, v_n$ del sistema completo (3.4) e (3.5) e si costruisca la matrice S di ordine n di elementi

$$(L'v_h, v_k)\,, \qquad (h, k = 1, \ldots, n) \tag{5.2}$$

e la sua inversa $S^* \equiv (s^*_{hk})$.

Sia P_n il proiettore di $U^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K)$ sullo spazio vettoriale determinato da $v_1, \ldots, v_n$, così definito

$$P_n u = \sum_{h,k}^{1,n} s^*_{hk}(u, L'v_k)\,v_h\,. \tag{5.3}$$

Seguendo allora il procedimento di Aronszajn (6), introdotto l'operatore

$$L_\sigma^{(n)} \equiv L_0 + \sigma L' P_n\,, \tag{5.4}$$

si consideri il problema di autovalori

$$L_\sigma^{(n)} w - \lambda w = 0 \quad \text{in } K\,, \qquad w = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}K\,, \qquad w \in U^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K)\,. \tag{5.5}$$

L'operatore $L_\sigma^{(n)}$, per ogni n, può riguardarsi come un *operatore intermedio* fra L_0 e L_σ. Invero se V indica il sottospazio vettoriale di $U^{\alpha\alpha\beta\gamma}(K)$, costituito dai vettori nulli su $\mathcal{F}K$ e con derivate seconde di quadrato sommabile in K, per ogni $v \in V$ risulta

$$(L_0 v, v) \leqslant \big(L_\sigma^{(n)} v, v\big) \leqslant \big(L_\sigma v, v\big)\,. \tag{5.6}$$

---

(4) Per il metodo degli invarianti ortogonali ved. [**3**]$_1$, Lect. 18 e 19. Per l'applicazione del metodo a problemi differenziali ved. [**3**]$_1$, Lect. 20.

(5) Questo procedimento è stato seguito da L. Bassotti nell'analogo problema bidimensionale. Si confronti [**2**]$_1$ e [**2**]$_2$.

(6) Si confronti [**1**].

Ne segue che gli autovalori $\tilde{\lambda}_k^{(\sigma,n)}$ del problema (5.5), disposti in successione non descrescente [7], verificano le disuguaglianze

$$\lambda_k^{(0)} \leqslant \tilde{\lambda}_k^{(\sigma,n)} \leqslant \lambda_k^{(\sigma)} \qquad (k = 1, 2, \dots)\,. \tag{5.7}$$

Si può allora concludere che *ogni approssimazione per difetto di un autovalore* $\tilde{\lambda}_k^{(\sigma,n)}$ *è un'approssimazione per difetto di* $\lambda_k^{(\sigma)}$.

Si dimostra infine facilmente che, per ogni $v \in V$, risulta

$$\left(L_\sigma^{(n)} v, v\right) \leqslant (L_0 v, v) + \sigma l_n(v, v)\,, \tag{5.8}$$

ove l_n denota il massimo autovalore della matrice S di elementi (5.2). Ne segue

$$\tilde{\lambda}_k^{(\sigma,n)} \leqslant \lambda_k^{(0)} + \sigma l_n \qquad (k = 1, 2, \dots)\,. \tag{5.9}$$

Nel seguito si fissa $n = 20$ e si scelgono i vettori $v_1 \dots v_n$ nei sistemi (3.4) e (3.5) con criterio analogo a quello del n. **4** (minimizzazione della traccia della matrice di elementi $(L_\sigma v_h, v_k)$) [8].

L'operatore $L_\sigma^{(20)}$ corrispondente a questa scelta sarà denotato semplicemente con $\tilde{L}_\sigma$ e gli autovalori $\tilde{\lambda}_k^{(\sigma,20)}$ con $\tilde{\lambda}_k^{(\sigma)}$ [9].

6. – Fissato v nello spazio $W^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K)$, sia $\tilde{\Gamma}_\sigma$ l'operatore di Green del problema

$$\tilde{L}_\sigma u = v \quad \text{in } K\,, \qquad u = 0 \quad \text{su } \mathscr{F}K\,, \tag{6.1}$$

ove $\tilde{L}_\sigma$ è l'operatore introdotto al n. **5**. È noto che il problema

$$\lambda \tilde{\Gamma}_\sigma v - v = 0\,, \qquad v \in W^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K) \tag{6.2}$$

è equivalente al problema (5.5) per l'operatore $\tilde{L}_\sigma$, nel senso che i due problemi ammettono gli stessi autovettori e gli stessi autovalori $\tilde{\lambda}_k^{(\sigma)}$.

Seguendo allora una definizione di G. Fichera [10], si ponga, per ogni intero positivo q

$$\mathfrak{I}_1^q(\tilde{\Gamma}_\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\Gamma}_\sigma^q w_k, w_k)\,, \tag{6.3}$$

---

(7) Con la consueta convenzione per gli autovalori multipli.

(8) I vettori che rendono minima la traccia suddetta dipendono in realtà da σ: la maggior parte di essi resta fissa per i valori di σ che vengono qui considerati ($\sigma = 1, 2, 3, 4, 5$). Di conseguenza si è eseguita la scelta nel caso $\sigma = 1$.

(9) Si noti che risulta $(\tilde{L}_\sigma v_h, v_k) = (L_\sigma v_h, v_k)$ per $h, k = 1, \dots, 20$.

(10) Si confronti [**3**]$_1$, Lect. 18. L'operatore $\tilde{\Gamma}_\sigma$ è strettamente positivo e compatto.

ove $\{w_k\}$ denota un qualsiasi sistema ortonormale e completo in $W^{\alpha\alpha\gamma\beta}(k)$ (ad es. il sistema dei vettori (3.4) e (3.5)).

$\mathfrak{J}_1^q(\tilde{\Gamma}_\sigma)$ *è l'invariante ortogonale di* $\tilde{\Gamma}_\sigma$ *del primo ordine e di grado* q. Si dimostra la relazione

$$\mathfrak{J}_1^q(\tilde{\Gamma}_\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_k^{(\sigma)}}\right)^q . \tag{6.4}$$

Il metodo degli invarianti ortogonali, per l'approssimazione per difetto degli autovalori $\tilde{\lambda}_k^{(\sigma)}$ del problema (6.2), richiede il calcolo di un invariante ortogonale $\mathfrak{J}_1^q(\tilde{\Gamma}_\sigma)$ e quindi una rappresentazione dell'operatore $\tilde{\Gamma}_\sigma$. Per $\sigma = 0$, riuscendo $\tilde{L}_0 = L_0$, l'operatore $\tilde{\Gamma}_0$ coincide con l'operatore di Green Γ_0 corrispondente ad L_0, del quale sono noti tutti gli autovalori $\lambda_k^{(0)}$: è possibile quindi il calcolo di un qual iasi invariante $\mathfrak{J}_1^q(\Gamma_0)$, in base alla (6.4).

Per $\sigma > 0$, si può ottenere la seguente rappresentazione di $\tilde{\Gamma}_\sigma$

$$\tilde{\Gamma}_\sigma v = \Gamma_0 v - \sigma \sum_{h,k}^{1,20} m_{hk}^{(\sigma)}(v, \Gamma_0 L' v_k) \Gamma_0 L' v_h \text{ (11)} , \tag{6.5}$$

ove $v_1, \ldots, v_{20}$ sono i vettori che definiscono $\tilde{L}_\sigma$ e $M^{(\sigma)} \equiv (m_{hk}^{(\sigma)})$ è la matrice di ordine 20 inversa della matrice dello stesso ordine di elementi $\sigma(\Gamma_0 L' v_h, L' v_k) + (L' v_h, v_k)$.

Dalla (6.5) segue la possibilità, in base a (6.3), di ottenere gli invarianti $\mathfrak{J}_1^q(\tilde{\Gamma}_\sigma)$, qualunque sia q, con calcolo però di complessità crescente al crescere di q. In questo lavoro si è calcolato $\mathfrak{J}_1^3(\tilde{\Gamma}_\sigma)$ per $\sigma = 1, 2, 3, 4, 5$. Per scrivere più semplicemente l'espressione di $\mathfrak{J}_1^3(\tilde{\Gamma}_\sigma)$, conviene introdurre le matrici G_p di ordine 20 e di elementi

$$(\Gamma_0^p L' v_h, L' v_k) , \tag{6.6}$$

dove p è un intero positivo ed i vettori v_i $(i = 1, \ldots, 20)$ sono quelli che determinano $\tilde{L}_\sigma$. Per ogni $\sigma > 0$ si ottiene allora

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1^3(\tilde{\Gamma}_\sigma) = {} & \mathfrak{J}_1^3(\Gamma_0) - 3\sigma \operatorname{tr}(M^{(\sigma)} G_4) + \\ & + 3\sigma^2 \operatorname{tr}(M^{(\sigma)} G_2 M^{(\sigma)} G_3) - \sigma^3 \operatorname{tr}(M^{(\sigma)} G_2 M^{(\sigma)} G_2 M^{(\sigma)} G_2) , \end{aligned} \tag{6.7}$$

---

(11) Il procedimento per giungere alla (6.5) è quello indicato per problemi molto più generali di G. Fichera in [**3**]$_3$. Sono state fatte però alcune modifiche per mettere in evidenza gli elementi che non dipendono da σ.

ove tr indica la traccia. Gli elementi (6.6) di G_p si possono ottenere dalle formule

$$(\Gamma_0^p L' v_h, L' v_k) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(L' v_h, w_s)(w_s, L' v_k)}{(\lambda_s^0)^p}, \tag{6.8}$$

ove $\{w_s\}$ denota il sistema ortonormale e completo in $W^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K)$ dato dalle (3.4) e (3.5), ordinato in modo che risulti $L_0 w_s = \lambda_s^{(0)} w_s$.

Il calcolo degli elementi di G_p ($p = 1, 2, 3, 4$) costituisce la parte più delicata del lavoro. Le serie (6.8) hanno termini di segno variabile e la rapidità della loro convergenza dipende da p. Il caso più sfavorevole è, ovviamente, $p = 1$, e la matrice G_1, pur non apparendo esplicitamente nella (6.7), interviene nella costruzione di $M^{(\sigma)}$ (12). Attraverso un insieme di prove e soprattutto sfruttando una stima a priori del resto delle serie a secondo membro di (6.8), è stato possibile ottenere approssimazioni di $(\Gamma_0^p L' v_h, L' v_k)$ per $h, k = 1, \dots, 20$, con un errore inferiore a 10^{-5}.

Nella tabella che segue, vengono riportati i valori ottenuti per $\mathfrak{J}_1^3(\tilde{\Gamma}_\sigma)$ nei singoli sottospazi $W^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K)$, in corrispondenza a $\sigma = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Invariante $\mathfrak{J}_1^3(\tilde{\Gamma}_\sigma)$ *in* $W^{\alpha\alpha\gamma\beta}$.

	$\sigma = 0$	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 3$	$\sigma = 4$	$\sigma = 5$
W^{1100}	0.006 99	0.003 85	0.002 80	0.002 29	0.002 01	0.001 83
W^{1101}	0.006 28	0.005 54	0.005 34	0.005 26	0.005 21	0.005 18
W^{0010}	0.041 35	0.019 52	0.012 18	0.008 71	0.006 79	0.005 60
W^{0011}	0.003 27	0.002 13	0.001 84	0.001 72	0.001 66	0.001 62
W^{0000}	0.011 66	0.003 50	0.002 13	0.001 66	0.001 45	0.001 34
W^{0001}	0.006 69	0.002 82	0.001 99	0.001 69	0.001 54	0.001 46
W^{1110}	0.004 06	0.002 93	0.002 58	0.002 42	0.002 32	0.002 26
W^{1111}	0.002 39	0.002 10	0.002 03	0.001 99	0.001 98	0.001 97

7. – Siano ora $\tilde{\lambda}_k^{(\sigma)}$ gli autovalori del problema (5.5) corrispondente ad $\tilde{L}_\sigma$ e ad un fissato sottospazio $U^{\alpha\alpha\gamma\beta}(K)$. In base al metodo degli invarianti ortogonali, note r approssimazioni per eccesso $\tilde{\varepsilon}_1^{(\sigma)}, \dots, \tilde{\varepsilon}_r^{(\sigma)}$ degli autovalori $\tilde{\lambda}_1^{(\sigma)}, \dots, \tilde{\lambda}_r^{(\sigma)}$, *i numeri*

$$\nu_k^{(\sigma)} = \left[\mathfrak{J}_1^3(\tilde{\Gamma}_\sigma) - \sum_{i=1}^{r} (\tilde{\varepsilon}_i^{(\sigma)})^{-3} + (\tilde{\varepsilon}_k^{(\sigma)})^{-3}\right]^{-1/3} \qquad (k = 1, \dots, r) \tag{7.1}$$

rappresentano, ordinatamente, approssimazioni per difetto di $\tilde{\lambda}_1^{(\sigma)}, \dots, \tilde{\lambda}_r^{(\sigma)}$ *e quindi, in virtù della* (5.7), *dei primi* r *autovalori* $\lambda_1^{(\sigma)}, \dots, \lambda_r^{(\sigma)}$ *del problema* (4.1), *relativo allo spazio considerato.*

(12) Invero $M^{(\sigma)} = (S + \sigma G_1)^{-1}$, ove S è definita da (5.2).

Se si considerano come $\tilde{\varepsilon}_1^{(\sigma)}, \ldots, \tilde{\varepsilon}_r^{(\sigma)}$ le approssimazioni per eccesso $\mu_k^{(\sigma)}$ costruite nel n. 4, si ottengono limitazioni poco significative. Conviene allora applicare il metodo di Ritz al problema (5.5) relativo ad $\tilde{L}_\sigma$, costruendo la matrice $D^{(\sigma)}$ di elementi

$$(\tilde{L}_\sigma v_i, v_j) \qquad (i, j = 1, \ldots, s), \tag{7.2}$$

fissando gli stessi vettori $v_1, \ldots, v_s$ considerati nel n. 4 per la costruzione di $C^{(\sigma)}$ ([13]). Gli autovalori $\tilde{\mu}_1^{(\sigma)}, \tilde{\mu}_2^{(\sigma)}, \ldots, \tilde{\mu}_s^{(\sigma)}$ di $D^{(\sigma)}$, disposti in ordine non decrescente, verificano le diseguaglianze

$$\tilde{\lambda}_k^{(\sigma)} \leqslant \tilde{\mu}_k^{(\sigma)} \leqslant \mu_k^{(\sigma)} \qquad (k = 1, \ldots, s), \tag{7.3}$$

che seguono facilmente dalle (5.6). Se allora si pone nelle (7.1) $r = s$ e $\tilde{\varepsilon}_i^{(\sigma)} = \tilde{\mu}_i^{(\sigma)}$, si ottengono limitazioni già accettabili. Si potrebbe pensare di migliorare i risultati aumentando s. Purtroppo però s non può superare dei limiti che dipendono dalla potenza del calcolatore che si usa. Nel nostro caso si è scelto $s \leqslant 75$. Conviene allora utilizzare le formule (5.9) per ottenere altri valori per eccesso, oltre $\tilde{\mu}_i^{(\sigma)}, \ldots, \tilde{\mu}_s^{(\sigma)}$. È quanto è stato fatto in questo lavoro. Precisamente fissato r in modo che $\sum\limits_{k>r} (\lambda_k^{(0)} + \sigma l_{20})^{-3} < 10^{-6}$ ([14]) si è posto

$$\tilde{\varepsilon}_k^{(\sigma)} = \tilde{\mu}_k^{(\sigma)} \quad \text{per } k = 1, \ldots, s, \qquad \tilde{\varepsilon}_k^{(\sigma)} = \lambda_k^{(0)} + \sigma l_{20} \quad \text{per } k = s+1, \ldots, r. \tag{7.4}$$

Riportiamo le tabelle dei primi valori per difetto nei vari sottospazi, per $\sigma = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Ogni valore riportato in dette tabelle è stato ricavato dalle (7.1) e (7.4), oppure sfruttando opportunamente il fatto che il k-esimo autovalore $\lambda_k^{(\sigma)}$ è funzione non decrescente di σ (si confrontino le (4.5)).

Si osservi infine che, per $k \leqslant 10$, le differenze $\mu_k^{(\sigma)} - \tilde{\mu}_k^{(\sigma)}$ sono trascurabili rispetto a $\tilde{\mu}_k^{(\sigma)} - \nu_k^{(\sigma)}$: una diversa scelta dell'operatore $\tilde{L}_\sigma$ non lascia quindi prevedere miglioramenti sensibili nei risultati finali.

Le tabelle che seguono sono state compilate in modo che, per ognuno dei σ fissati, sia possibile ricavare da esse una limitazione rigorosa per ogni autovalore non superiore a 20.

([13]) Si osservi che $s > 20$ e fra i vettori $v_1, \ldots, v_s$ compaiono i vettori $v_1, \ldots, v_{20}$ che definiscono $\tilde{L}_\sigma$.

([14]) Qui l_{20} è il massimo autovalore della matrice S di elementi $(L' v_h, v_k)$ formata con i vettori $v_1, \ldots, v_{20}$ che definiscono $\tilde{L}_\sigma$.

Valori per difetto $v_k^{(\sigma)}$ *in* U^{0010}.

	$\sigma=0$	$\sigma=1$	$\sigma=2$	$\sigma=3$	$\sigma=4$	$\sigma=5$
$k=1$	3	3.868	4.586	5.213	5.729	6.233
$=2$	9	10.774	10.942	11.064	11.230	11.418
$=3$	11	12.91	14.56	15.16	15.38	15.49
$=4$	11	17.22	17.22	17.22	17.22	17.22
$=5$	17	17.56	18.31	18.31	18.31	18.31
$=6$	19	19.28	19.43	19.43	19.43	19.43
$=7$	19	20.01	20.01	20.01	20.01	20.01

Valori per difetto $v_k^{(\sigma)}$ *in* U^{0011}.

	$\sigma=0$	$\sigma=1$	$\sigma=2$	$\sigma=3$	$\sigma=4$	$\sigma=5$
$k=1$	9	10.430	10.549	10.578	10.578	10.580
$=2$	11	15.532	13.897	14.541	14.768	14.90
$=3$	17	17.04	17.05	17.16	17.16	17.16
$=4$	19	19.75	19.75	19.75	19.75	19.75
$=5$	21	22.78	22.78	22.78	22.78	22.78

Valori per difetto $v_k^{(\sigma)}$ *in* U^{1100}.

	$\sigma=0$	$\sigma=1$	$\sigma=2$	$\sigma=3$	$\sigma=4$	$\sigma=5$
$k=1$	6	7.421	8.516	9.392	10.056	10.534
$=2$	12	13.175	13.233	13.323	13.377	13.570
$=3$	14	15.61	16.34	16.48	16.59	16.69
$=4$	14	17.12	17.12	17.27	17.46	17.51
$=5$	18	20.90	20.90	20.90	20.90	20.90

Valori per difetto $v_k^{(\sigma)}$ *in* U^{1101}.

	$\sigma=0$	$\sigma=1$	$\sigma=2$	$\sigma=3$	$\sigma=4$	$\sigma=5$
$k=1$	6	6.132	6.175	6.200	6.214	6.219
$=2$	14	14	14	14	14	14
$=3$	14	16.60	16.60	16.60	16.60	16.60
$=4$	18	18.83	19.34	19.34	19.34	19.34
$=5$	22	22	22	22	22	22

Valori per difetto $\nu_k^{(\sigma)}$ *in* U^{1110}.

	$\sigma=0$	$\sigma=1$	$\sigma=2$	$\sigma=3$	$\sigma=4$	$\sigma=5$
$k=1$	9	9.062	9.072	9.072	9.072	9.072
$=2$	9	10.800	12.024	12.870	13.456	13.822
$=3$	17	18.46	18.46	18.46	18.46	18.46
$=4$	17	19.23	19.23	19.23	19.23	19.23
$=5$	21	21	21	21	21	21

Valori per difetto $\nu_k^{(\sigma)}$ *in* U^{1111}.

	$\sigma=0$	$\sigma=1$	$\sigma=2$	$\sigma=3$	$\sigma=4$	$\sigma=5$
$k=1$	9	9.085	9.085	9.103	9.110	9.112
$=2$	17	18.87	18.87	18.87	18.87	18.87
$=3$	21	21	21	21	21	21
$=4$	21	21	21	21	21	21

Valori per difetto $\nu_k^{(\sigma)}$ *in* U^{0000}.

	$\sigma=0$	$\sigma=1$	$\sigma=2$	$\sigma=3$	$\sigma=4$	$\sigma=5$
$k=1$	6	8.720	10.370	11.215	11.612	11.796
$=2$	6	10.720	13.841	15.605	16.57	16.70
$=3$	14	14.54	15.19	15.94	16.63	17.01
$=4$	14	17.01	17.59	17.59	17.66	17.66
$=5$	14	17.75	18.94	18.94	18.94	18.94
$=6$	18	19.67	19.67	19.67	19.67	19.67
$=7$	18	21.69	21.69	21.69	21.69	21.69

Valori per difetto $\nu_k^{(\sigma)}$ *in* U^{0001}.

	$\sigma=0$	$\sigma=1$	$\sigma=2$	$\sigma=3$	$\sigma=4$	$\sigma=5$
$k=1$	6	8.790	9.873	11.360	11.768	12.020
$=2$	14	14.26	14.26	14.26	14.26	14.26
$=3$	14	15.10	15.10	16.49	16.95	17.21
$=4$	14	18.12	18.13	18.24	18.24	18.26
$=5$	18	21.82	21.82	21.82	21.82	21.82

8. – Gli autovalori del problema (1.2) si ottengono riunendo in una unica successione gli autovalori relativi ai singoli sottospazi. Un criterio di G. Fichera ([15]) assicura che, disponendo in ordine non decrescente i valori per difetto e, separatemente, quelli per eccesso ad essi corrispondenti, desunti dalle tabelle relative a tutti i sedici sottospazi ([16]), associando fra loro i numeri che

([15]) Si confronti [**3**]$_2$.

([16]) Valori uguali provenienti da una stessa tabella o da tabelle diverse vanno ripetuti. Il criterio di Fichera precisa il numero n_0 di autovalori che si possono approssimare. Nel nostro caso risulta $n_0 = 73$.

nelle due successioni occupano lo stesso posto, si ottengono valori per difetto e per eccesso dei primi n_0 autovalori $\lambda_k^{(\sigma)}$ del problema (1.2), considerati in ordine non decrescente ([17]).

Riportiamo infine le tabelle conclusive delle limitazioni rigorose, per difetto e per eccesso, dei primi autovalori del problema (1.2) per $\sigma = 1, 2, 3, 4, 5$.

Esaminando le tabelle che seguono, si constata che l'errore relativo di $\lambda_k^{(\sigma)}$ è minore di 0,1 per i primi 25 autovalori (per i primi 65 se $\sigma = 1$).

Autovalori $\lambda_k^{(\sigma)}$, $\sigma = 1$

	difetto	eccesso		difetto	eccesso
$k = 1$	3.868	3.872	$k = 36$	15.10	15.38
$= 2$	3.868	3.872	$= 37$	15.61	16.46
$= 3$	3.868	3.872	$= 38$	15.61	16.46
$= 4$	5.132	6.146	$= 39$	15.61	16.46
$= 5$	6.132	6.146	$= 40$	16.60	17.44
$= 6$	6.132	6.146	$= 41$	16.60	17.44
$= 7$	7.421	7.465	$= 42$	16.60	17.44
$= 8$	7.421	7.468	$= 43$	17.01	17.99
$= 9$	7.421	7.468	$= 44$	17.04	17.99
$= 10$	8.720	8.822	$= 45$	17.04	17.99
$= 11$	8.790	8.822	$= 46$	17.04	18.35
$= 12$	9.062	9.143	$= 47$	17.12	18.35
$= 13$	9.085	9.143	$= 48$	17.12	18.35
$= 14$	10.430	10.553	$= 49$	17.12	18.72
$= 15$	10.430	10.553	$= 50$	17.22	18.73
$= 16$	10.430	10.553	$= 51$	17.22	18.80
$= 17$	10.720	10.960	$= 52$	17.22	18.80
$= 18$	10.774	10.971	$= 53$	17.56	18.80
$= 19$	10.774	10.985	$= 54$	17.56	19.32
$= 20$	10.774	10.985	$= 55$	17.56	19.32
$= 21$	10.800	10.985	$= 56$	17.75	19.32
$= 22$	12.532	12.794	$= 57$	18.12	19.86
$= 23$	12.532	12.794	$= 58$	18.46	20.06
$= 24$	12.532	12.794	$= 59$	18.83	20.06
$= 25$	12.910	13.367	$= 60$	18.83	20.30
$= 26$	12.910	13.367	$= 61$	18.83	20.30
$= 27$	12.910	13.367	$= 62$	18.87	20.30
$= 28$	13.175	13.583	$= 63$	19.23	21.09
$= 29$	13.175	13.583	$= 64$	19.28	21.15
$= 30$	13.175	13.583	$= 65$	19.28	21.15
$= 31$	14	14.14	$= 66$	19.28	21.59
$= 32$	14	14.14	$= 67$	19.67	21.59
$= 33$	14	14.14	$= 68$	19.75	21.59
$= 34$	14.26	14.48	$= 69$	19.75	21.62
$= 35$	14.54	15.38	$= 70$	19.75	22.03

([17]) Con la consueta convenzione per gli autovalori multipli.

Autovalori $\lambda_k^{(\sigma)}$, $\sigma = 2$

	difetto	eccesso		difetto	eccesso
$k = 1$	4.586	4.607	$k = 36$	15.19	17.01
$= 2$	4.586	4.607	$= 37$	16.34	17.76
$= 3$	4.586	4.607	$= 38$	16.34	17.76
$= 4$	6.175	6.207	$= 39$	16.34	17.76
$= 5$	6.175	6.207	$= 40$	16.60	18.24
$= 6$	6.175	6.207	$= 41$	16.60	18.24
$= 7$	8.516	8.660	$= 42$	16.60	18.24
$= 8$	8.516	8.660	$= 43$	17.05	18.89
$= 9$	8.516	8.660	$= 44$	17.05	18.89
$= 10$	9.072	9.201	$= 45$	17.05	18.89
$= 11$	9.085	9.201	$= 46$	17.12	19.04
$= 12$	9.873	10.716	$= 47$	17.12	19.04
$= 13$	10.370	10.727	$= 48$	17.12	19.04
$= 14$	10.549	10.794	$= 49$	17.22	19.25
$= 15$	10.549	10.794	$= 50$	17.22	19.25
$= 16$	10.549	10.794	$= 51$	17.22	19.25
$= 17$	10.942	11.356	$= 52$	17.59	20.48
$= 18$	10.942	11.356	$= 53$	18.13	20.48
$= 19$	10.942	11.356	$= 54$	18.31	21.10
$= 20$	12.024	12.467	$= 55$	18.31	21.14
$= 21$	13.233	13.990	$= 56$	18.31	21.16
$= 22$	13.233	13.990	$= 57$	18.46	21.20
$= 23$	13.233	13.990	$= 58$	18.87	21.20
$= 24$	13.841	14.193	$= 59$	18.94	22.53
$= 25$	13.897	14.193	$= 60$	19.23	22.53
$= 26$	13.897	14.193	$= 61$	19.34	22.53
$= 27$	13.897	14.64	$= 62$	19.34	22.55
$= 28$	14	14.64	$= 63$	19.34	22.65
$= 29$	14	14.64	$= 64$	19.43	22.65
$= 30$	14	14.66	$= 65$	19.43	22.65
$= 31$	14.26	15.18	$= 66$	19.43	22.82
$= 32$	14.56	15.93	$= 67$	19.67	22.82
$= 33$	14.56	15.93	$= 68$	19.75	22.82
$= 34$	14.56	15.93	$= 69$	19.75	24.44
$= 35$	15.10	16.93	$= 70$	19.75	24.66

Autovalori $\lambda_k^{(\sigma)}$, $\sigma = 3$

	difetto	eccesso		difetto	eccesso
$k = 1$	5.213	5.257	$k = 26$	14	14.30
$= 2$	5.213	5.257	$= 27$	14.26	14.91
$= 3$	5.213	5.257	$= 28$	14.54	15.69
$= 4$	6.200	6.241	$= 29$	14.54	15.69
$= 5$	6.200	6.241	$= 30$	14.54	15.69
$= 6$	6.200	6.241	$= 31$	15.16	17.45
$= 7$	9.072	9.235	$= 32$	15.16	17.45
$= 8$	9.103	9.235	$= 33$	15.16	17.45
$= 9$	9.392	9.665	$= 34$	15.61	17.88
$= 10$	9.392	9.665	$= 35$	15.94	17.88
$= 11$	9.392	9.665	$= 36$	16.48	17.88
$= 12$	10.578	10.892	$= 37$	16.48	18.78
$= 13$	10.578	10.892	$= 38$	16.48	18.89
$= 14$	10.578	10.892	$= 39$	16.49	18.89
$= 15$	11.064	11.652	$= 40$	16.60	18.92
$= 16$	11.064	11.652	$= 41$	16.60	18.92
$= 17$	11.064	11.652	$= 42$	16.60	18.92
$= 18$	11.215	11.852	$= 43$	17.16	19.24
$= 19$	11.360	11.861	$= 44$	17.16	19.24
$= 20$	12.870	13.692	$= 45$	17.16	19.24
$= 21$	13.323	14.225	$= 46$	17.22	19.61
$= 22$	13.323	14.225	$= 47$	17.22	19.61
$= 23$	13.323	14.225	$= 48$	17.22	19.61
$= 24$	14	14.30	$= 49$	17.27	20.41
$= 25$	14	14.30	$= 50$	17.27	20.41

Autovalori $\lambda_k^{(\sigma)}$, $\sigma = 4$

	difetto	eccesso		difetto	eccesso
$k = 1$	5.729	5.843	$k = 26$	14	14.69
$= 2$	5.729	5.843	$= 27$	14.26	15.05
$= 3$	5.729	5.843	$= 28$	14.77	16.25
$= 4$	6.214	6.265	$= 29$	14.77	16.29
$= 5$	6.214	6.265	$= 30$	14.77	16.29
$= 6$	6.214	6.265	$= 31$	15.38	17.95
$= 7$	9.072	9.259	$= 32$	15.38	17.95
$= 8$	9.110	9.259	$= 33$	15.38	17.95
$= 9$	10.056	10.476	$= 34$	16.57	18.30
$= 10$	10.056	10.476	$= 35$	16.59	18.30
$= 11$	10.056	10.476	$= 36$	16.59	18.30
$= 12$	10.578	10.957	$= 37$	16.59	19.46
$= 13$	10.578	10.957	$= 38$	16.60	19.46
$= 14$	10.578	10.957	$= 39$	16.60	19.46
$= 15$	11.23	11.97	$= 40$	16.60	19.47
$= 16$	11.23	11.97	$= 41$	16.63	19.47
$= 17$	11.23	11.97	$= 42$	16.95	19.47
$= 18$	11.61	12.51	$= 43$	17.16	20.16
$= 19$	11.77	12.51	$= 44$	17.16	20.16
$= 20$	13.38	14.25	$= 45$	17.16	20.16
$= 21$	13.38	14.25	$= 46$	17.22	20.57
$= 22$	13.38	14.25	$= 47$	17.22	20.58
$= 23$	13.46	14.60	$= 48$	17.22	20.74
$= 24$	14	14.60	$= 49$	17.46	20.80
$= 25$	14	14.60	$= 50$	17.46	21.20

Autovalori $\lambda_k^{(\sigma)}$, $\sigma = 5$

	difetto	eccesso		difetto	eccesso
$k = 1$	6.219	6.352	$k = 26$	14	15.16
$= 2$	6.219	6.352	$= 27$	14.26	15.58
$= 3$	6.219	6.352	$= 28$	14.90	16.65
$= 4$	6.233	6.363	$= 29$	14.90	16.65
$= 5$	6.233	6.363	$= 30$	14.90	16.65
$= 6$	6.233	6.363	$= 31$	15.49	18.73
$= 7$	9.072	9.346	$= 32$	15.49	18.73
$= 8$	9.112	9.347	$= 33$	15.49	18.73
$= 9$	10.534	11.007	$= 34$	16.60	18.76
$= 10$	10.534	11.007	$= 35$	16.60	18.76
$= 11$	10.534	11.007	$= 36$	16.60	18.76
$= 12$	10.580	11.124	$= 37$	16.69	19.69
$= 13$	10.580	11.124	$= 38$	16.69	19.69
$= 14$	10.580	11.124	$= 39$	16.69	19.69
$= 15$	11.42	12.31	$= 40$	16.70	20.06
$= 16$	11.42	12.31	$= 41$	17.01	20.06
$= 17$	11.42	12.31	$= 42$	17.16	20.06
$= 18$	11.80	12.93	$= 43$	17.16	20.54
$= 19$	12.02	12.94	$= 14$	17.16	20.54
$= 20$	13.57	14.34	$= 45$	17.21	20.54
$= 21$	13.57	14.34	$= 46$	17.22	21.27
$= 22$	13.57	14.34	$= 47$	17.22	21.34
$= 23$	13.82	14.92	$= 48$	17.22	21.34
$= 24$	14	14.92	$= 49$	17.51	21.59
$= 25$	14	14.92	$= 50$	17.51	21.67

Bibliografia

[1] N. Aronszajn, *Approximation methods for eigenvalues of completely continuous symmetric operators*, Proc. Symp. Spectral Theory and Diff. Problems, Stilwater, Oklahoma 1951.

[2] L. Bassotti: $[\bullet]_1$ *Su un problema di autovalori per l'elasticità piana*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **8** (1967), 259-289; $[\bullet]_2$ *Calcolo numerico degli autovalori relativi al primo problema dell'elastostatica piana in un quadrato*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **9** (1968), 221-245; $[\bullet]_3$ *Sottospazi invarianti per l'operatore dell'elasticità in un cubo*, Rend. Acc. Naz. Lincei (8) **45** (1968), 485-493; $[\bullet]_4$ *Sottospazi invarianti per operatori differenziali lineari a coefficienti costanti*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **22** (1973), 157-184.

[3] G. Fichera: $[\bullet]_1$ *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*, Lecture Notes in Math., **8**, Springer-Verlag 1965; $[\bullet]_2$ *Approximation and estimates for eigenvalues*, Proc. Symp. « Numerical solution of partial diff. equations », Univ. Maryland 1965, Acad. Press, New York 1966; $[\bullet]_3$ *Upper bounds for orthogonal invariants of some positive linear operators*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **1** (1969).

[4] S. G. Mikhlin, *Variational methods in mathematical physics*, Pergamon Press, New York 1964.

Summary

The eigenvalue problem of the linear elasticity three-dimensional operator, for a cube and under the Dirichlet condition, is here considered. By using the Rayleigh-Ritz method and the method of orthogonal invariants we give upper and lower bounds for the first fifty eigenvalues. Numerical tables are exibited for five different values of the parameter.

* * *