Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 339-347

TULLIA NORANDO (*)

Sulle perturbazioni singolari per disequazioni variazionali di tipo parabolico con convesso dipendente dal tempo (**)

1. - Enunciato dei risultati.

Sia V uno spazio di Banach riflessivo, separabile, strettamente convesso; sia $\| \ \|$ la norma di V e V' il duale di V, che supponiamo pure strettamente convesso. Sia H uno spazio di Hilbert, identificato col suo duale mediante il prodotto scalare $(\, , \,)$ e sia: $V \subset H \subset V'$ con iniezione compatta e V denso in H. Indicheremo pure con $(\, , \,)$ la dualità tra V e V'. Sia $K(t)$ un convesso chiuso mobile di V, di retrazione $r(t)$, con $r'(t) \in L^2(0, T)$. Indicheremo con $\overline{K(t)}$ l'aderenza di $K(t)$ in H. Siano $a(u, v)$ e $b(u, v)$ due forme bilineari continue definite su V e su H rispettivamente: denoteremo con A e B i rispettivi operatori lineari continui associati. Valgono inoltre le seguenti proprietà

$$a(v, v) \geqslant 0 \qquad \forall v \in V, \text{ q.o. in } [0, T],$$

$$a(v, v) \geqslant \alpha \|v\|^2 + \lambda |v|^2 \qquad \forall v \in V, \text{ q.o. in } [0, T], \ \alpha > 0 \, ,$$

$$b(v, v) \geqslant \beta |v|^2 \qquad \forall v \in H, \text{ q.o. in } [0, T], \ \beta > 0 \, ,$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Politecnico, Università, 20100 Milano, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 16-III-1978.

Av e Bu sono misurabili rispettivamente in V' e in H su $[0, T]$ per $\forall v \in V$ e $\forall u \in H$. Siano

$$F(K(t)) = \{v \in V : v \in L^2(0, T; V),\ v' \in L^2(0, T; H),\ v(t) \in K(t) \text{ q.o. in } [0, T]\},$$

$$\overline{F}(K(t)) = \{v \in H : v \in L^2(0, T; H),\ v' \in L(0, T; H),\ v(t) \in \overline{K(t)} \text{ q.o. in } [0, T]\}.$$

Sia $u_0 \in \overline{K(0)}$; consideriamo per ogni $\varepsilon > 0$ il problema

$$\int_0^t (v' + \varepsilon A u_\varepsilon + B u_\varepsilon - f, v - u_\varepsilon)\, ds \geqslant \tfrac{1}{2}|v(t) - u_\varepsilon(t)|^2 - \tfrac{1}{2}|v(0) - u_0|^2, \tag{1.1}$$
$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad \forall v \in F(K(t)).$$

Se $f(t) \in L^2(0, T; H)$, tale problema ammette un'unica soluzione $u_\varepsilon(t)$ con [v. [**1**], teor. 4, p. 38]

$$u_\varepsilon(t) \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \qquad u_\varepsilon(t) \in K(t) \text{ q.o. in } [0, T], \qquad u_\varepsilon(0) = u_0.$$

Per $\varepsilon = 0$, consideriamo il problema

$$\int_0^t (v' + Bu - f, v - u)\, ds \geqslant \tfrac{1}{2}|v(t) - u(t)|^2 - \tfrac{1}{2}|v(0) - u_0|^2, \tag{1.2}$$
$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad \forall v \in \overline{F}(K(t)),$$
$$u(t) \in L^2(0, T; H) \cap C(0, T; H), \qquad u(t) \in \overline{K(t)} \text{ q.o. in } [0, T], \qquad u(0) = u_0.$$

È possibile dimostrare che valgono i seguenti teoremi.

Teorema 3.1. *Per ogni* $\varepsilon > 0$, *sia* $u_\varepsilon(t)$ *la soluzione di* (1.1); *si ha* $u_\varepsilon \to u$ *in* $L^2(0, T; H)$, $\sqrt{\varepsilon}\|u\|_{L^2(0,T;V)} \leqslant C$ *dove* $u(t)$ *è la soluzione di* (1.2) *e* C *è indipendente da* ε.

Teorema 3.2. *Se inoltre* $u(t) \in L^2(0, T; V)$, $u(t) \in K(t)$ *q.o. in* $[0, T]$, *si ha* $u_\varepsilon \to u$ *in* $L^2(0, T; V)$, $\|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty(0,T;H)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ (C *indipendente da* ε).

2. - Risultati preliminari.

Se $u(t)$ è l'unica soluzione del problema (1.2), allora $u(t)$ è anche l'unica soluzione del problema più debole

$$\int_0^t (v' + Bw - f, v - w)\, ds \geqslant -\tfrac{1}{2}|v(0) - u_0|^2, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \forall v \in \overline{F}(K(t)), \tag{2.1}$$

$$w(t) \in L^2(0, T; H) \cap C(0, T; H), \qquad w(t) \in \overline{K(t)} \text{ q.o. in } [0, T], \qquad w(0) = u_0.$$

Teorema 2.1. *Sia $w(t) \in L^2(0, T; H)$, $w(t) \in \overline{K(t)}$ q.o. in $[0, T]$ una soluzione del problema*

$$\int_0^t (v' + Bw - f, v - w)\, ds \geqslant -\tfrac{1}{2}|v(0) - u_0|^2, \tag{2.2}$$

$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad \forall v \in F(K(t)), \quad w(0) = u_0.$$

Allora $w(t)$ è soluzione del problema (2.1).

Alla dimostrazione premettiamo i seguenti lemmi.

Lemma 2.1. *L'insieme $\tilde{\chi} = \{v : v \in L^2(0, T; H),\ v(t) \in \overline{K(t)}$ q.o. in $[0, T]\}$ è denso nell'insieme $\chi = \{v : v \in L^2(0, T; V),\ v(t) \in K(t)$ q.o. in $[0, T]\}$.*

Dimostrazione. Sia $v \in \tilde{\chi}$, consideriamo per ogni $n > 0$ la soluzione $v_n \in \chi$ della seguente disequazione

$$(nAv_n + v_n, z - v_n) \geqslant (v, z - v_n). \tag{2.3}$$

Assunto $z = 0$, si ottiene $n(Av_n, v_n) + (v_n, v_n) \leqslant (v, v_n)$, da cui $\|v_n\|^2 \leqslant (v, v_n)$, e per il lemma di Gronwall $\|v_n\| \leqslant C_1$ (C_1 indipendente da n). Poichè inoltre $v(t) \in \overline{K(t)}$ q.o. in $[0, T]$, è possibile determinare una successione $v_\varepsilon(t) \in K(t)$ q.o. in $[0, T]$ tale che $v_\varepsilon \to v$ in H q.o. in $[0, T]$. Assunto $z = v_\varepsilon$ si ha

$$n(Av_n, v_\varepsilon - v_n) + (v_n - v, v_\varepsilon - v_n) \geqslant 0, \quad (v_n - v, v_n - v_\varepsilon) \leqslant n(Av_n, v_\varepsilon).$$

Per ogni $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n \to 0} (v_n - v, v_n - v_\varepsilon) \leqslant 0,$$

da cui segue

$$\limsup_{n \to 0} (v_n - v, v_n - v) \leqslant \limsup_{n \to 0} (v_n - v, v - v_\varepsilon),$$

e per $\varepsilon \to 0$, risulta $|v_n - v| \to 0$ q.o. in $[0, T]$, da cui $v_n \to v$ in $L^2(0, T; H)$.

Lemma 2.2. *Sia $v \in \tilde{\chi}$, $v' \in L^2(0, T; H)$, è possibile determinare una successione $\{v_\varepsilon\}$ con $v_\varepsilon \in \chi$, $v'_\varepsilon \in L^2(0, T; H)$ tale che*

$$v_\varepsilon \to v \text{ in } L^2(0, T; H), \quad v'_\varepsilon \to v' \text{ in } L^2(0, T; H).$$

Dimostrazione. Poichè $v \in \bar{\chi}$, è possibile determinare una successione $\{v_n\}$, $v_n \in \chi$ tale che $v_n \to v$ in $L^2(0, T; H)$. Per ogni $\varepsilon > 0$, consideriamo la soluzione v_ε della disequazione

$$(\varepsilon L v_\varepsilon + v_\varepsilon + v'_\varepsilon, z - v_\varepsilon) \geqslant (v + v', z - v_\varepsilon)\,, \tag{2.4}$$

dove L è un operatore da V in V' autoaggiunto, monotono e coercivo. Assunto $z = 0$ si ottiene $\frac{1}{2}(d/dt)|v_\varepsilon|^2 + \|v_\varepsilon\|^2 \leqslant (v + v', v_\varepsilon)$, da cui si ricava $\|v_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V)} \leqslant C_2$ (C_2 indipendente da ε).

Passando all'equazione penalizzata $\varepsilon L v_{\varepsilon n} + v_{\varepsilon n} + v'_{\varepsilon n} + (1/n)\beta(t) v_{\varepsilon n} = v + v'$, moltiplicando scalarmente per $v'_{\varepsilon n}$ e ricordando il lemma 6 di [1], (v. pp. 42-43), si ha

$$-\frac{1}{n}\int_0^T (\beta(t) v_{\varepsilon n}, v'_{\varepsilon n})\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\int_0^T \|v_{\varepsilon n} - P_{K(t)} v_{\varepsilon n}\|\, r'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \int_0^T (\|v'_{\varepsilon n}\|^* + \varepsilon\|L v_{\varepsilon n}\|^* + \|v + v'\|^*)\, r'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

da cui, passando al limite per $n \to 0$, si ottiene

$$\int_0^T |v'_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \tfrac{1}{2}|u_0|^2 + \int_0^T (v + v', v'_\varepsilon)\,\mathrm{d}t + \int_0^T |v'_\varepsilon|\, r'(t)\,\mathrm{d}t + C_3\,,$$

da cui segue $\|v'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H)} \leqslant C_4$ (C_4 indipendente da ε). Assumendo allora $z = v_n$ e $0 < t \leqslant T$ nella (2.4) si ha

$$\int_0^t (\varepsilon L v_\varepsilon, v_n - v_\varepsilon)\,\mathrm{d}s \geqslant \int_0^t (v - v_\varepsilon, v_n - v_\varepsilon)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(v - v_\varepsilon), v_n - v_\varepsilon\right)\mathrm{d}s.$$

Per $n \to 0$ si perviene alla relazione

$$\int_0^t (\varepsilon L v_\varepsilon, v - v_\varepsilon)\,\mathrm{d}s \geqslant \int_0^t |v - v_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}s + \tfrac{1}{2}|v(t) - v_\varepsilon(t)|^2\,.$$

Per $\varepsilon \to 0$ si ha pertanto $v_\varepsilon \to v$ in $L^2(0, T; H)$, $v_\varepsilon \to v$ in $L^\infty(0, T; H)$, $v'_\varepsilon \rightharpoonup v'$ in $L^2(0, T; H)$.

Passiamo ora a dimostrare il Teorema 2.1. Per ogni $v \in \overline{F}(K(t))$ possiamo considerare la successione $\{v_\varepsilon\}$, $v_\varepsilon \in F(K(t))$ di cui al Lemma 2.2; si avrà allora assumendo $v = v_\varepsilon$ nella (2.2)

$$\int_0^t (v'_\varepsilon + Bw - f, v_\varepsilon - w)\,\mathrm{d}s \geqslant -\tfrac{1}{2}|v_\varepsilon(0) - u_0|^2\,,$$

da cui passando al limite per $\varepsilon \to 0$

$$\int_0^t (v' + Bw - f, v - w)\, ds \geq -\tfrac{1}{2}|v(0) - u_0|^2 .$$

Lemma 2.3. *Supponiamo che $K(t)$ sia uniformemente limitato in V sull'intervallo $[0, T]$ (T positivo qualunque); allora il problema*

$$\begin{aligned} &\big(nu'(t) + u(t) - f(t),\ v(t) - u(t)\big) \geq 0 && q.o.\ su\ R^+ \\ &\forall v(t) \in L^2_{\mathrm{loc}}(R^+, V)\,, \quad v(t) \in K(t) && q.o.\ su\ R^+ \\ &f(t) \in L^2(0, T; V)\,, \quad u(t) \in K(t)\ q.o.\ su\ R^+\,, \quad u(0) = u_0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

ammette un'unica soluzione $u_n(t)$ ed inoltre

$$\lim_{n\to 0} u_n(t) = f(t)\ \ in\ \ L^2(0, T; H)\,,$$

$$\lim_{n\to 0}{}^{**} u_n(t) = f(t)\ \ in\ \ L^\infty(0, T; V)\,,$$

$$\big(u_n'(t), u_n(t) - f(t)\big) \leq 0\,.$$

La dimostrazione si ottiene con i metodi usati in [1] (v. lemma 10, pp. 53-55).

3. - Dimostrazione dei risultati.

Passiamo ora alla dimostrazione del Teorema 3.1. Per un risultato dovuto a J. J. Moreau [4], possiamo ritenere $0 \in K(t)$. Assumendo allora $v = 0$ e $t = T$ nella (1.1), otteniamo

$$\int_0^T (\varepsilon A u_\varepsilon + B u_\varepsilon - f, -u_\varepsilon)\, dt \geq \tfrac{1}{2}|u_\varepsilon(T)|^2 - \tfrac{1}{2}|u_0|^2$$

$$\begin{aligned}\int_0^T (f, u_\varepsilon)\, dt + \tfrac{1}{2}|u_0|^2 &\geq \varepsilon \int_0^T (A u_\varepsilon, u_\varepsilon)\, dt + \int_0^T (B u_\varepsilon, u_\varepsilon)\, dt \\ &\geq \varepsilon\alpha \int_0^T \|u_\varepsilon\|^2\, dt + \varepsilon\lambda \int_0^T |u_\varepsilon|^2\, dt + \beta \int_0^T |u_\varepsilon|^2\, dt\,.\end{aligned}$$

Da cui segue $\sqrt{\varepsilon}\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V)} \leq C$ (C indipendente da ε), ed inoltre $\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H)} \leq C_5$ (C_5 indipendente da ε). Si può allora affermare che $u_\varepsilon \rightharpoonup w$ in $L^2(0, T; H)$. Inoltre poichè $u_\varepsilon \in \chi$ e $\bar{\chi}$ è un convesso debolmente chiuso in $L^2(0, T; H)$, è

$w \in \bar{\chi}$. Dalla (1.1) si ha poi

$$\int_0^t (v'-f, v-u_\varepsilon)\, ds + \varepsilon \int_0^t (Au_\varepsilon, v)\, ds + \int_0^t (Bu_\varepsilon, v)\, ds +$$
$$-\int_0^t (Bu_\varepsilon, w)\, ds - \int_0^t (Bw, u_\varepsilon - w)\, ds + \tfrac{1}{2}|v(0)-u_0|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon \int_0^t (Au_\varepsilon, u_\varepsilon)\, ds + \int_0^t (B(u_\varepsilon - w), u_\varepsilon - w)\, ds,$$

da cui segue

$$0 \leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0}\Big[\varepsilon \int_0^t (Au_\varepsilon, u_\varepsilon)\, ds + \int_0^t (B(u_\varepsilon - w), u_\varepsilon - w)\, ds\Big]$$
$$\leqslant \int_0^t (v' + Bw - f, v-w)\, ds + \tfrac{1}{2}|v(0)-u_0|^2 .$$

Allora $w(t)$ è soluzione di (2.2), da cui per il Teorema 2.1, risulta che $w(t)$ è soluzione di (2.1) e quindi $w = u$, dove u è soluzione di (1.2), essendo la soluzione di tale problema unica, come si vede utilizzando le regolarizzate mediante il lemma 2.3 ed i metodi usati in [**1**] (v. § 5 pp. 58-59). Si ha allora (cfr. [**2**], lemma II.2, pag. 67) che

$$\inf_{v\in \bar{F}(K(t))} \Big[\int_0^T (v' + Bw - f, v-w)\, dt + \tfrac{1}{2}|v(0)-u_0|^2\Big] = 0 .$$

Pertanto si deduce

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\Big[\varepsilon \int_0^T (Au_\varepsilon, u_\varepsilon)\, dt + \int_0^T (B(u_\varepsilon - u), u_\varepsilon - u)\, dt\Big] \leqslant 0 . \tag{3.1}$$

Quindi $\|u_\varepsilon - u\|_{L^2(0,T;H)} \to 0$ per $\varepsilon \to 0$.

Osservazione 3.1. Se $u(t) \in L^2(0, T; V)$, $u(t) \in K(t)$ q.o. in $[0, T]$, dalla (3.1) si ha $\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V)} \leqslant C_6$ (C_6 indipendente da ε) e quindi $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ in $L^2(0, T; V)$.

Dimostriamo ora il Teorema 3.2. Prolunghiamo $K(t)$ su R^+ con V, εA e B con J_1 e J_2, dove J_1 è la dualità tra V e V' tale che $\|J_1 v\|^* = \|v\|$ per $\forall v \in V$, e J_2 è l'identità di H, e $f(t)$ con 0. Indicheremo ancora con $K(t)$, εA, B, $f(t)$ i prolungamenti. Allora le soluzioni $u_\varepsilon(t)$ e $u(t)$, relative ai problemi (1.1) e (1.2), possono essere prolungate alle soluzioni, che indicheremo ancora con u_ε

ed u, dei problemi

$$(3.2)\quad \int_0^t (v' + \varepsilon A u_\varepsilon + B u_\varepsilon - f,\, v - u_\varepsilon)\, ds \geqslant \tfrac{1}{2}\,|v(t) - u_\varepsilon(t)|^2 + -\tfrac{1}{2}\,|v(0) - u_0|^2\,,$$

$$(3.3)\quad \int_0^t (v' + Bu - f,\, v - u)\, ds \geqslant \tfrac{1}{2}\,|v(t) - u(t)|^2 - \tfrac{1}{2}\,|v(0) - u_0|^2\,,$$

$$t \geqslant 0\,,\quad v \in L^2_{\text{loc}}(R^+, V)\,,\quad v' \in L^2_{\text{loc}}(R^+, H)\,,\quad v(t) \in K(t)\ \text{q.o. in } R^+\,,$$

$$u_\varepsilon(t),\, u(t) \in L^2_{\text{loc}}(R^+, V) \cap C(R^+, H),\ u_\varepsilon(t),\, u(t) \in K(t)\ \text{q.o. in } R^+,\ u_\varepsilon(0) = u(0) = u_0\,.$$

Passando alle regolarizzate mediante il Lemma 2.3 e i metodi usati in [**1**], (§ 5, pp. 58-59), si perviene per $0 \leqslant t \leqslant T$, alla seguente relazione

$$\tfrac{1}{2}\,|u_\varepsilon(t) - u(t)|^2 \leqslant \varepsilon \int_0^t (A u_\varepsilon,\, u - u_\varepsilon)\, ds + \int_0^t (B u_\varepsilon,\, u - u_\varepsilon)\, ds + \int_0^t (Bu,\, u_\varepsilon - u)\, ds\,,$$

$$\tfrac{1}{2}\,|u_\varepsilon(t) - u(t)|^2 + \int_0^t (B(u_\varepsilon - u),\, u_\varepsilon - u)\, ds + \varepsilon \int_0^t (A(u_\varepsilon - u),\, u_\varepsilon - u)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_0^t (Au,\, u - u_\varepsilon)\, ds \leqslant C\varepsilon \int_0^t \|u_\varepsilon - u\|\, ds\,,$$

da cui segue $\|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty(0,T;H)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ ed inoltre, ricordando l'Osservazione 3.1, $u_\varepsilon \to u$ in $L^2(0, T; V)$. Di più si ha $u_\varepsilon \to u$ in $L^\infty(0, T; H)$.

4. - Ulteriori osservazioni.

Nel caso in cui $u(t) \notin K(t)$, supponendo che l'operatore A sia autoaggiunto e che si verifichino le seguenti condizioni

$$(4.1)\qquad (Bu, Au) \geqslant 0 \ \text{ per ogni } u \in H\,,$$

(4.2) esista un operatore di penalizzazione β associato al convesso $K(t)$ tale che

$$(Au, \beta(t)u) \geqslant -\, C_7(t)\,|\beta u|^2 + C_8(t) \qquad C_7(t),\ C_8(t) \in L^2(0, T)\,,$$

$$(4.3)\qquad \overline{K(t)} \cap V = K(t)\,,$$

si ottiene la maggiorazione

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty(0,T;H)} \leqslant C\varepsilon^{\vartheta/2} \qquad (0 < \vartheta < 1)\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione $G_\varepsilon\colon f \to u_\varepsilon - u$. Sia $G_\varepsilon(g) = w_\varepsilon - w$, si considerino le approssimanti u_n e w_n, rispettivamente di u_ε e w_ε, soluzioni delle equazioni penalizzate

$$u_n'(t) + \varepsilon A u_n(t) + B u_n(t) + \frac{1}{n}\beta(u_n(t)) = f\,, \qquad u_n(0) = u_0 \in \overline{K(0)}\,, \tag{4.4}$$

$$w_n'(t) + \varepsilon A w_n(t) + B w_n(t) + \frac{1}{n}\beta(w_n(t)) = g\,, \qquad w_n(0) = w_0 \in \overline{K(0)}\,. \tag{4.5}$$

Sottraendo la (4.5) dalla (4.4) e moltiplicando scalarmente per $u_n(t) - w_n(t)$ si ottiene

$$\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_n - w_n|^2 + \varepsilon[\alpha\|u_n - w_n\|^2 + \lambda|u_n - w_n|^2] + \beta|u_n - w_n|^2 \leqslant (f - g,\, u_n - w_n)\,,$$

da cui si ha

$$\|u_n - w_n\|_{L^\infty(0,T;H)} \leqslant C_9\|f - g\|_{L^2(0,T;H)}\,. \tag{4.6}$$

Con lo stesso procedimento, considerando le approssimanti $\overline{u}_n$ e $\overline{w}_n$ rispettivamente di u e w, soluzioni delle equazioni penalizzate

$$\overline{u}_n' + B\overline{u}_n + \frac{1}{n}\beta(\overline{u}_n) = f\,, \qquad \overline{u}_n(0) = u_0\,, \tag{4.7}$$

$$\overline{w}_n' + B\overline{w}_n + \frac{1}{n}\beta(\overline{w}_n) = g\,, \qquad \overline{w}_n(0) = w_0\,, \tag{4.8}$$

si ottiene, moltiplicando scalarmente per Au_n (rispettivamente per Aw_n) e poi per $\beta(u_n)$ (rispettivamente per $\beta(w_n)$)

$$\|u_n - w_n\|_{L^\infty(0,T;H)} \leqslant C_{10}\|f - g\|_{L^2(0,T;H)}\,. \tag{4.9}$$

Poichè $\lim\limits_{n\to 0}[u_n(t) - w_n(t)] = (u_\varepsilon - w_\varepsilon)(t)$ in $L^2(0, T; H)$ e $\lim\limits_{n\to 0}[\overline{u}_n(t) - \overline{w}_n(t)] = (u - w)(t)$ in $L^2(0, T; H)$, si deduce che $G_\varepsilon\colon L^2(0, T; H) \to L^\infty(0, T; H)$ è lipschitziana e la sua norma è maggiorata da una costante C_{11} (C_{11} indipendente da ε). Se $u(t) \in V$, poichè $u(t) \in \overline{K(t)}$, dalla (4.3) segue che $u(t) \in K(t)$. Allora, essendo $u(t) \in L^2(0, T; H)$, è $u(t) \in L^2(0, T; \overline{K(t)})$ e quindi $u(t) \in L^2(0, T; K(t))$, da cui segue che $u(t) \in L^2(0, T; V)$. Si ha pertanto, per il Teorema 3.2, che: $G_\varepsilon\colon L^2(0, T; V) \to L^\infty(0, T; H)$ è limitata e la sua norma è maggiorata da $C_{12}\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ (C_{12} indipendente da ε).

Per un teorema di interpolazione non lineare di Tartar [**5**]: $G_\varepsilon: L^2(0, T; [V, H]_\vartheta) \to L^\infty(0, T; H)$ è limitata e la sua norma è maggiorata da $C_{11}^{1-\vartheta}(C_{12}\varepsilon^{\frac{1}{2}})^\vartheta$.

Esempio. Sia Ω un aperto limitato di R^n di frontiera Γ di classe C^∞, sia $V = H_0^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$, e sia $A = -\Delta$ e $B = I$. Sia $\psi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ e $A\psi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $\psi' \in L^2([0, T] \times \Omega)$, assumiamo $K(t) = \{v \in V: v \leqslant \psi(t)$ q.o. in $[0, T]\}$. Per una tale scelta sono verificate tutte le ipotesi precedenti, per cui assunto $\vartheta = \frac{1}{2}$, essendo $[H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}} = H_\infty^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, assumendo $f \in L^2(0, T; H_\infty^{\frac{1}{2}}(\Omega))$ e $u_0 \in \overline{K(0)}$, si ha $\|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C\varepsilon^{1/4}$.

Bibliografia

[1] M. Biroli, *Sur les inèquations paraboliques avec convexe dépendant du temps*, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **3** (1974), 33-72.

[2] H. Brezis, *Problèmes unilatéraux*, J. Math. Pure Appl. (1972), 66-69.

[3] J. L. Lions, *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites ...*, Lecture Notes in Math. 323 (1973).

[4] J. J. Moreau, *Rétraction d'une multiapplication*, Sem. d'An. Convexe, Montpellier ExI (1972), 26.

[5] L. Tartar, *Interpolation non linéaire et régularité*, J. Functional Analysis **9** (1972), 468-489.

Summary

In this paper we extend some results obtained by J. L. Lions for variational inequalities with the convex dependent on the time in the case in which it does.

The results we obtained provide a positive answer to some problems which were settled by J. L. Lions in the paper « Perturbations singulières ... » appeared in the Lecture Notes in Math. 323 (1973).

* * *