Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 295-304

GIORGIO FAINA (*)

Un procedimento per la costruzione di ovali infiniti (**)

Introduzione.

In [4] F. Buekenhout ha introdotto una nozione di *ovale* che generalizza quella classica (cfr. [8]), riguardando tale struttura come un insieme di punti $\mathcal{O}$, finito o infinito, dotato di una famiglia $\mathcal{I}$ di permutazioni involutorie, che chiama *involuzioni*, strettamente 2-transitiva su $\mathcal{O}$ stesso. In questa nota, l'autore fornisce, sulla falsariga di [1] e [2], un metodo per l'estensione di ovali nel senso sopraddetto, a partire da ovali infiniti, e studia quindi le proprietà più importanti dei nuovi ovali in connessione con le proprietà dell'ovale di partenza. Mette infine in evidenza come gli ovali qui ottenuti risultino assai diversi dagli ovali « estensioni libere » costruiti sempre in [4] da F. Buekenhout.

Per quanto riguarda la terminologia e le notazioni relative agli ultrafiltri ed alle ultrapotenze l'autore fa riferimento a quanto esposto in [1] e [3].

1. - Definizioni.

Sia $\mathcal{O}$ un insieme di punti dotato di una famiglia $\mathcal{I}$ di permutazioni di $\mathcal{O}$ stesso, chiamate involuzioni. Si dice che $\mathcal{O}$ è un *ovale* (secondo Buekenhout) se

(1.1) ogni involuzione è involutoria;

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, via Vanvitelli, 06100 Perugia, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei programmi di ricerca del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.).
Ricevuto: 2-II-1978.

(1.2) per ogni coppia di punti (a_1, a_2) e per ogni coppia di punti (b_1, b_2) di $\mathcal{O}$, con $a_i \neq b_j$ $(i, j = 1, 2)$, esiste una ed una sola involuzione che scambia a_1 con a_2 e b_1 con b_2;

(1.3) $\mathcal{O}$ contiene almeno tre punti.

Si osservi che questa definizione di ovale è assai diversa da quella classica anche perché un tale ovale non è immerso a priori in alcun piano proiettivo.

Diremo invece *ovale proiettivo* un sottoinsieme $\mathcal{O}$ di un piano proiettivo π che goda delle seguenti proprietà

(1.4) ogni retta di π interseca $\mathcal{O}$ in al più due punti;

(1.5) per ogni punto di $\mathcal{O}$ passa una ed una sola retta tangente ad $\mathcal{O}$.

Due ovali $\mathcal{O}_1$ ed $\mathcal{O}_2$ si dicono *isomorfe* se esiste una corrispondenza biunivoca tra i loro insiemi sostegno che mantenga le involuzioni.

Se $\mathcal{O}$ è un ovale, indicheremo con $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ la *struttura di incidenza* associata ad $\mathcal{O}$, i cui punti sono: α) gli elementi di $\mathcal{O}$; β) le involuzioni di $\mathcal{O}$. Le rette di $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ sono formate da una coppia di punti $a, b \in \mathcal{O}$ e da tutte le involuzioni di $\mathcal{O}$ che permutano a con b (se $a \neq b$ la retta si dice *secante* e verrà indicata con (a, b), mentre se $a = b$ la retta si dice *tangente* e verrà indicata con (a)).

Una involuzione di $\mathcal{O}$ si dice *regolare* se essa è un isomorfismo di $\mathcal{O}$ su sé stesso o, più rapidamente, un automorfismo di $\mathcal{O}$.

Una retta d di $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ è regolare se ogni sua involuzione è regolare ed un ovale $\mathcal{O}$ si dice *regolare* se $\mathcal{I}$ è costituito da tutte involuzioni regolari.

Una retta $d \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ si dice invece *pascaliana* se è tale che per ogni terna di involuzioni I, J, $K \in d$, la proiettività IJK risulta involutoria.

Detta allora $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ la figura costituita da tutte e sole le rette regolari di $\mathcal{P}(\mathcal{O})$, sussiste il seguente (cfr. [4], § **8**).

Lemma 1.6. *La figura $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ delle rette regolari di $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ coincide sempre con uno ed uno solo dei seguenti insiemi*

I) *insieme vuoto*; II) *una sola secante*; III) *una sola tangente*; IV) *tutte le tangenti*; V) *tutte le tangenti e tutte le secanti.*

A sua volta la classe V) *si può suddividere in quattro sottoclassi disgiunte*: V.1) *non esistono in $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ rette pascaliane*; V.2) *tutte le tangenti ad $\mathcal{O}$ sono pascaliane*; V.3) *tutte le secanti ad $\mathcal{O}$ sono pascaliane*; V.4) *tutte le rette di $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ sono pascaliane.*

Diremo ognuna delle classi I)-V.4) il *tipo di Buekenhout* dell'ovale.

Concludiamo la serie dei richiami ricordando che un sottoinsieme S di un ovale $\mathcal{O}$ si dice un *sotto-ovale* di $\mathcal{O}$ se ogni involuzione di $\mathcal{O}$ che permuta (a_1, a_2) e (b_1, b_2), $a_i \neq b_j$ e $a_i, b_j \in S$, $(i, j = 1, 2)$, muta in sé S stesso.

2. - Ultrapotenza di un ovale infinito.

Sia $\mathcal{O}$ un ovale infinito qualunque, A un insieme infinito tale che $|A| \leqslant |\mathcal{O}|$ e $\mathcal{F}$ un ultrafiltro non principale su A. Si indichi con $\overline{\mathcal{O}}$ l'ultraprodotto proprio $\mathcal{O}^A/\mathcal{F}$ di $\mathcal{O}$ secondo $\mathcal{F}$ e con $i: \mathcal{O} \to \overline{\mathcal{O}}$ l'iniezione canonica ottenuta componendo l'immersione diagonale $\delta: \mathcal{O} \to \mathcal{O}^A$ $(x \in \mathcal{O},\ \delta(x) \in \mathcal{O}^A\colon \delta(x)(\alpha) = x,\ \forall \alpha \in A)$ e la proiezione canonica $p: \mathcal{O}^A \to \mathcal{O}^A/\mathcal{F}$.

Vale allora la seguente relazione: $i(\mathcal{O}) \subsetneqq \overline{\mathcal{O}}$. Infatti, essendo $|A| \leqslant |\mathcal{O}|$, $\exists f: A \to \mathcal{O}$ iniettiva e quindi, indicato con $\bar{f}$ l'elemento $p(f) \in \mathcal{O}^A/\mathcal{F}$, $\bar{f}$ appartiene ad $\overline{\mathcal{O}}$ ma non ad $i(\mathcal{O})$, essendo $\mathcal{F}$ un ultrafiltro non-principale.

Si osserva poi subito che, se si indica con $\overline{\mathcal{I}} = \mathcal{I}^A/\mathcal{F}$ l'ultraprodotto proprio della famiglia delle involuzioni dell'ovale $\mathcal{O}$ e con $\bar{I} = \overline{\{I(\alpha)\}}_{\alpha \in A}$ $(I(\alpha) \in \mathcal{I},\ \forall \alpha \in A)$ un qualunque elemento di $\overline{\mathcal{I}}$, allora l'applicazione

$$\bar{I}: \overline{\mathcal{O}} \to \overline{\mathcal{O}} \qquad \text{definita da:} \qquad \forall \bar{x} \in \overline{\mathcal{O}},\ \bar{I}(\bar{x}) = \overline{\{I(\alpha)\big(x(\alpha)\big)\}}_{\alpha \in A}$$

è una permutazione involutoria di $\overline{\mathcal{O}}$.

Ferme restando le notazioni, vale allora il seguente

Teorema 2.1. *L'insieme $\overline{\mathcal{O}}$ dotato della famiglia di permutazioni $\overline{\mathcal{I}}$ è anch'esso un ovale (che denomineremo ovale ultrapotenza di $\mathcal{O}$ secondo $\mathcal{F}$) ed $i(\mathcal{O})$ è un sotto-ovale di $\overline{\mathcal{O}}$.*

Dim. In virtù delle definizioni date, basta provare che vale la (1.2). Siano allora $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2 \in \overline{\mathcal{O}}$ tali che $\bar{a}_i \neq \bar{b}_j$ $(i, j = 1, 2)$ e si indichi con $I(\alpha)$ l'unica involuzione di $\mathcal{O}$ che permuta $a_1(\alpha)$ con $a_2(\alpha)$ e $b_1(\alpha)$ con $b_2(\alpha)$ rispettivamente, $\forall \alpha \in A$. Proviamo allora che $\bar{I} = \overline{\{I(\alpha)\}}_{\alpha \in A}$ è l'unico elemento di $\overline{\mathcal{I}}$ tale che: $\bar{I}(\bar{a}_1) = \bar{a}_2$, $\bar{I}(\bar{b}_1) = \bar{b}_2$. Infatti, supponiamo che $\bar{J} = \overline{\{J(\alpha)\}}_{\alpha \in A} \in \overline{\mathcal{I}}$ sia un'altra permutazione di $\mathcal{O}$ tale che scambi anch'essa $\bar{a}_1$ con $\bar{a}_2$ e $\bar{b}_1$ con $\bar{b}_2$, allora

$$\exists A_1 \in \mathcal{F}\colon \quad \forall \alpha \in A_1, \qquad I(\alpha)\big(a_1(\alpha)\big) = J(\alpha)\big(a_1(\alpha)\big) = a_2(\alpha)$$

e

$$I(\alpha)\big(b_1(\alpha)\big) = J(\alpha)\big(b_1(\alpha)\big) = b_2(\alpha)\,,$$

perciò, poiché $\mathcal{O}$ è un ovale, si può concludere che $I(\alpha) = J(\alpha)$, $\forall \alpha \in A_1 \Rightarrow \bar{I} = \bar{J}$.

Nota. Come già osservato in [1], si possono ottenere nel modo indicato, a partire da un qualunque ovale infinito $\mathcal{O}$, ovali $\overline{\mathcal{O}}$ di potenza sempre più grande usando convenienti «esponenti» A di potenza anche maggiore di quella di $\mathcal{O}$ (e convenienti ultrafiltri su A).

Se con π indichiamo un piano grafico infinito, è ben noto (cfr. [1]) che l'ultraprodotto proprio $\pi^* = \pi^A/\mathcal{F}$ è ancora un piano grafico, inoltre, se l è una retta di π, i punti di $i(l)$ (con $i: \pi \to \pi^*$ iniezione canonica) sono ancora allineati su di una retta di π^* che indicheremo con $\widetilde{i(l)}$. Vale allora la seguente

Proposizione 2.2. *Se $\mathcal{O}$ è un ovale proiettivo del piano π, allora $\overline{\mathcal{O}}$ è un ovale proiettivo nella corrispondente ultrapotenza π^* di π.*

Dim. Sia $\Delta \subset \pi \times \pi \times \pi$ una relazione ternaria così definita

$$(P, Q, R) \in \Delta \Leftrightarrow P \neq Q \quad \text{e} \quad R \in PQ, \ \forall P, Q, R \in \pi;$$

sia inoltre $\Delta^* \subset \pi^* \times \pi^* \times \pi^*$ la corrispondente relazione ternaria (cfr. [1]) definita in π^* da

$$\forall \bar{f}, \bar{g}, \bar{h} \in \pi^*, \quad (\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}) \in \Delta^* \Leftrightarrow \mathcal{A}_{\bar{f},\bar{g},\bar{h}} = \{\alpha \in A \mid (f(\alpha), g(\alpha), h(\alpha)) \in \Delta\} \in \mathcal{F}.$$

Proviamo innanzitutto che, se l è una qualunque retta di π^*, $l \cap \overline{\mathcal{O}}$ è costituito al più di due punti distinti. Infatti, ragionando per assurdo, se $l \cap \overline{\mathcal{O}} = \{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3\}$, $\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2 \neq \bar{y}_3 \neq \bar{y}_1$, allora

$$(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) \in \Delta^* \Rightarrow \mathcal{A}_{\bar{y}_1\bar{y}_2\bar{y}_3} = \{\alpha \in A \mid (y_1(\alpha), y_2(\alpha), y_3(\alpha) \in \Delta\} \in \mathcal{F},$$

inoltre

$$\exists A_1 \in \mathcal{F}: \forall \alpha \in A_1, \quad y_1(\alpha) \neq y_2(\alpha) \neq y_3(\alpha) \neq y_1(\alpha) \Rightarrow \forall \alpha \in \mathcal{A}_{\bar{y}_1\bar{y}_2\bar{y}_3} \cap A_1,$$

$$(y_1(\alpha), y_2(\alpha), y_3(\alpha)) \in \Delta$$

e poiché $\forall \alpha \in A$, $y_i(\alpha) \in \mathcal{O}$ $(i = 1, 2, 3)$ si giunge ad un assurdo essendo $\mathcal{O}$ un ovale proiettivo.

Proviamo infine che per ogni punto di $\overline{\mathcal{O}}$ passa una ed una sola tangente ad $\overline{\mathcal{O}}$ stesso in quel punto. Allora, $\forall \overline{X} \in \overline{\mathcal{O}}$, si consideri la retta di π^* $l = \overline{P}\overline{X}$, dove $\overline{P} \in \pi^*$ è tale che $\forall \alpha \in A$, $P(\alpha) \in t_\alpha$, con t_α unica tangente ad $\mathcal{O}$ in $X(\alpha)$ ed inoltre $P(\alpha) \neq X(\alpha)$. Proviamo che l è tangente ad $\overline{\mathcal{O}}$ in $\overline{X}$. Infatti, se esistesse uno $\overline{Z} \in l \cap \overline{\mathcal{O}}$, $\overline{Z} \neq \overline{X}$, allora $\mathcal{A} = \{\alpha \in A \mid (P(\alpha), X(\alpha), Z(\alpha)) \in \Delta\} \in \mathcal{F}$

ed inoltre

$$\forall \alpha \in A\,, \; Z(\alpha) \in \mathcal{O} \Rightarrow \exists A_1 \in \mathcal{F}: \forall \alpha \in A_1\,, \qquad Z(\alpha) \neq P(\alpha) \neq X(\alpha) \neq Z(\alpha)\,.$$

Si può allora affermare che $\forall \alpha \in \mathcal{A} \cap A_1 \in \mathcal{F}$, $Z(\alpha) \in P(\alpha)X(\alpha)$ e $Z(\alpha) \in \mathcal{O}$ il che è assurdo e quindi la retta l è tangente ad $\overline{\mathcal{O}}$ in $\overline{X}$.

È chiaro inoltre che la retta $l = \overline{P}\overline{X}$ è indipendente dalla scelta di $\overline{P}$ e cioè dei $P(\alpha)$ su t_α, $\forall \alpha \in A$, purché $P(\alpha) \neq X(\alpha)$.

Resta allora da provare che l è l'unica tangente ad $\overline{\mathcal{O}}$ in $\overline{X}$. Supponiamo allora che $t = \overline{Y}_1\overline{Y}_2$ sia un'altra tangente ad $\overline{\mathcal{O}}$ in $\overline{X}$, con $\overline{Y}_1 \neq \overline{Y}_2 \neq \overline{X} \neq \overline{Y}_1$ e si ponga inoltre $l = \overline{Z}_1\overline{Z}_2$ con $\overline{Z}_1 \neq \overline{Z}_2 \neq \overline{X} \neq \overline{Z}_1$. Esiste allora un $A_1 \in \mathcal{F}$: $\forall \alpha \in A_1$ valgono le seguenti proprietà

$$(1) \;\; X(\alpha) \in Y_1(\alpha)\,Y_2(\alpha) = t_\alpha; \;\; (2) \;\; X(\alpha) \in Z_1(\alpha)Z_2(\alpha) = l_\alpha; \;\; (3) \;\; Y_i(\alpha) \neq Z_j(\alpha)$$

$(i, j{=}1, (2)$; (4) $X(\alpha) \neq Y_i(\alpha)$ $(i{=}1, 2)$; (5) $X(\alpha) \neq Z_j(\alpha)$ $(j{=}1, 2)$; (6) $X(\alpha) \in \mathcal{O}$.

Inoltre, $\forall \alpha \in A_1$, la retta indicata con t_α è la tangente ad $\mathcal{O}$ in $X(\alpha)$, come segue dalle 1) - 6) e dal fatto che se, $\forall \alpha \in A_1$, $t_\alpha \cap \mathcal{O} = \{K(\alpha), X(\alpha)\}$ con $K(\alpha) \neq \neq X(\alpha)$, allora $A_2 = \{\alpha \in A \mid (Y_1(\alpha), K(\alpha), X(\alpha)) \in \Delta\} \in \mathcal{F}$ e questo implica $(\overline{Y}_1, \overline{K}, \overline{X}) \in \Delta^*$, e poiché $\overline{K} \in \overline{\mathcal{O}}$, il che è assurdo. Analogamente si prova che $\forall \alpha \in A_1$, $l_\alpha \cap \mathcal{O} = \{X(\alpha)\}$. Ma, poiché $\mathcal{O}$ è un ovale proiettivo,

$$\forall \alpha \in A_1 \;\; l_\alpha = t_\alpha \;\; \text{e} \;\; \overline{H} \in t \Leftrightarrow (\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \overline{H}) \in \Delta^* \Leftrightarrow \{\alpha \in A \mid (Y_1(\alpha), Y_2(\alpha), H(\alpha)) \in \Delta\} \in \mathcal{F}$$

e dal fatto che

$$\forall \alpha \in A_1\,, \qquad (Y_1(\alpha), Y_2(\alpha), H(\alpha)) \in \Delta \Leftrightarrow (Z_1(\alpha), Z_2(\alpha), H(\alpha)) \in \Delta$$

si può concludere che $\overline{H} \in t \Leftrightarrow \overline{H} \in l$ e si ha perciò l'assurdo $t = l$.

Diamo qui di seguito una lista di proprietà la cui dimostrazione si può fare sulla falsariga delle precedenti.

Proposizione 2.3. *Se $\mathcal{O}$ ed $\mathcal{O}'$ sono due ovali infiniti isomorfi, allora anche $\overline{\mathcal{O}} = \mathcal{O}^A/\mathcal{F}$ ed $\overline{\mathcal{O}}' = \mathcal{O}'^A/\mathcal{F}$ sono isomorfi.*

Proposizione 2.4. *Se $\mathcal{O}$ è un ovale isomorfo ad un ovale proiettivo, allora anche $\overline{\mathcal{O}}$ è isomorfo ad un ovale proiettivo.*

Proposizione 2.5. *Detta* $\overline{\mathscr{P}(\mathcal{O})}$ *l'ultrapotenza di* $\mathscr{P}(\mathcal{O})$ *relativa ad* A *ed* $\mathscr{F}$, $\overline{\mathscr{P}(\mathcal{O})}$ *si può identificare in modo naturale con la struttura di incidenza* $\mathscr{P}(\overline{\mathcal{O}})$ *associata ad* $\overline{\mathcal{O}}$.

3. - Rette regolari e rette pascaliane.

Studieremo, in questo paragrafo, alcune proprietà concernenti la regolarità e la pascalianità di certe rette di $\mathscr{P}(\overline{\mathcal{O}})$ e di $\mathscr{P}(\mathcal{O})$, al fine di classificare gli ovali ultrapotenza, in relazione all'ovale di partenza, secondo la classificazione in tipi di regolarità ricordata nel Lemma 1.6.

Proposizione 3.1. *Una retta secante (tangente)* $d = (\bar{a}, \bar{b}) \in \mathscr{P}(\overline{\mathcal{O}})$ $(d = (\bar{a}) \in \mathscr{P}(\overline{\mathcal{O}}))$ *è regolare se, e soltanto se, esiste un* $B \in \mathscr{F}$: $\forall \beta \in B$, $(a(\beta), b(\beta)) \in \mathscr{P}(\mathcal{O})$ $((a(\beta)) \in \mathscr{P}(\mathcal{O}))$ *è regolare.*

Dim. Sia $d = (\bar{a}, \bar{b})$ regolare, e si supponga che non esista alcun $B \in \mathscr{F}$ tale che, $\forall \beta \in B$, $(a(\beta), b(\beta))$ sia regolare. Sia allora $B' = \{\beta \in A\colon (a(\beta), b(\beta))$ non regolare in $\mathscr{P}(\mathcal{O})\}$, e $A' = A - B'$. Poichè $\mathscr{F}$ è un ultrafiltro non principale, segue che $B' \in \mathscr{F}$, ma

$$\forall \beta \in B', \quad \exists K(\beta) \in \mathscr{I} \quad \text{e} \quad \exists J(\beta) \in (a(\beta), b(\beta))\colon J(\beta)K(\beta)J(\beta) \notin \mathscr{I}\,.$$

Si consideri allora l'involuzione $\bar{H} = \overline{\{H(\alpha)\}_{\alpha \in A}} \in \bar{\mathscr{I}}$: $\forall \beta \in B'$, $H(\beta) = J(\beta)$ e si ponga $\bar{I} = \overline{\{L(\alpha)\}_{\alpha \in A}}$: $\forall \beta \in B'$, $L(\beta) = K(\beta)$, risulta $\bar{H}\bar{L}\bar{H} \notin \bar{\mathscr{I}}$, contro l'ipotesi di regolarità della secante $(\bar{a}, \bar{b})$.

Inversamente, se $B \in \mathscr{F}$ è tale che, $\forall \beta \in B$, $(a(\beta), b(\beta))$ è regolare, allora $\forall \bar{J} \in (\bar{a}, \bar{b})$ e $\forall \bar{K} \in \bar{\mathscr{I}}$, si ha che $\exists B' \in \mathscr{F}$: $J(\beta)K(\beta)J(\beta) \in \mathscr{I}$, $\forall \beta \in B \cap B' \in \mathscr{F}$ e quindi $\bar{J}\bar{K}\bar{J} \in \bar{\mathscr{I}}$. Analoga dimostrazione si può fare nel caso in cui d è tangente ad $\overline{\mathcal{O}}$.

Corollario 3.2. *Se* $d = (a, b)$, $a, b \in \mathcal{O}$, *è una retta regolare secante (tangente) di* $\mathscr{P}(\mathcal{O})$, *allora* $(i(a), i(b))$ *è una retta regolare di* $\mathscr{P}(\overline{\mathcal{O}})$.

Osservazione. Dal precedente corollario consegue subito allora che gli ovali ultrapotenza di un ovale infinito sono assai diversi dagli ovali « estensioni libere » ottenute da F. Buekenhout in [4] (§ 9), poiché questi ultimi non hanno mai rette regolari nella loro struttura di incidenza.

Ricordiamo adesso che (cfr. [4]), fissata su un ovale $\mathcal{O}$ una coordinatizzazione $(0, 1, \infty)$, si definisce sull'insieme $Q = \mathcal{O} - \{\infty\}$ una coppia di operazioni « + » e « · », rispetto alle quali Q stesso risulta essere un doppio-cappio (1) ed inoltre è stato provato in [7] che valgono le seguenti proprietà:

(3.3) $(Q, +)$ è un gruppo abeliano se, e soltanto se, la tangente (∞) è pascaliana.

(3.4) $(Q^*, \cdot)$ è un gruppo abeliano se, e soltanto se, la secante $(0, \infty)$ è pascaliana, $(Q^* = Q - \{0\})$ (2).

(3.5) Se $(0, \infty)$ è regolare e pascaliana e (∞) è pascaliana, allora Q è un campo.

Allora, se indichiamo con $\bar{Q}(\bar{o}, \bar{u}, \bar{\xi})$ il doppio-cappio relativo alla coordinatizzazione $(\bar{o}, \bar{u}, \bar{\xi})$ di $\bar{\mathcal{O}}$, e con Q_α il doppio-cappio relativo alla coordinatizzazione $\big(o(\alpha), u(\alpha), \xi(\alpha)\big)$ di $\mathcal{O}$, al variare di α in un opportuno $B \in \mathscr{F}$, vale la seguente

Proposizione 3.6. *L'ultraprodotto* $\prod_{\alpha\in B} Q_\alpha/\mathscr{F}$ (3) *possiede una struttura naturale di doppio-cappio e come tale è canonicamente isomorfo a* $\bar{Q}(\bar{o}, \bar{u}, \bar{\xi})$.

Dim. Si consideri l'applicazione

$$\varphi\colon \prod_{\alpha\in B} Q_\alpha/\mathscr{F} \to \bar{\mathcal{O}} - \{\bar{\xi}\}$$

così definita: $\forall \bar{x} \in \prod_{\alpha\in B} Q_\alpha/\mathscr{F}$, $\varphi(\bar{x}) = \overline{\{y(\alpha)\}_{\alpha\in A}}$, dove, $\forall \alpha \in B$, $y(\alpha) = x(\alpha)$. È allora facile controllare che essa è ben definita e che risulta un isomorfismo se si introducono in $\prod_{\alpha\in B} Q_\alpha/\mathscr{F}$ le seguenti operazioni

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{\{x(\alpha) + y(\alpha)\}_{\alpha\in B}}\,, \qquad \bar{x}\cdot\bar{y} = \overline{\{x(\alpha)\cdot y(\alpha)\}_{\alpha\in B}}\,.$$

Come caso particolare del teorema riguardante la permanenza di proprietà elementari negli ultraprodotti di strutture (cfr. [5]), vale il seguente

---

(1) Per quanto riguarda questa nozione ci riferiremo a [8].

(2) Il prodotto in Q^* si estende a tutto Q con la convenzione che $0\cdot x = x\cdot 0 = 0$. Prenderemo nel seguito in considerazione soltanto doppi-cappi Q i quali godano di questa proprietà.

(3) Si intende qui naturalmente $\mathscr{F}$ « ristretto » a B.

Teorema 3.7. *L'ultraprodotto* $\prod_{\alpha\in A} Q_\alpha/\mathscr{F}$ *di una famiglia di doppi-cappi* $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *è*

(a) *un gruppo abeliano additivo,*
(b) *un gruppo abeliano moltiplicativo,*
(c) *un campo,*

se, e soltanto se, esiste un $B\in\mathscr{F}$ *tale che* Q_α *è un gruppo abeliano additivo, un gruppo abeliano moltiplicativo, un campo rispettivamente, per ogni* $\alpha\in B$.

Sussiste allora la

Proposizione 3.8. *Una retta secante (tangente)* $(\bar{o},\bar{\xi})\in\mathscr{P}(\overline{\mathscr{O}})$ $\big((\bar{\xi})\in\mathscr{P}(\overline{\mathscr{O}})\big)$ *è pascaliana se, e soltanto se,*

$$\exists B\in\mathscr{F}:\ \forall\beta\in B\,,\qquad \big(o(\beta),\,\xi(\beta)\big)\big((\xi(\beta))\big)$$

è pascaliana in $\mathscr{P}(\mathscr{O})$.

Dim. Ci limitiamo a provare la proposizione nel caso della secante. Si fissi su $\overline{\mathscr{O}}$ un punto $\bar{u}$: $\bar{o}\neq\bar{\xi}\neq\bar{u}\neq\bar{o}$, ne segue che $\big(\overline{Q}(\bar{o},\bar{u},\bar{\xi})-\{\bar{o}\},.\big)$ è un gruppo abeliano moltiplicativo e quindi, in virtù delle Proposizioni 3.6 e 3.7 nonché della (3.4), le secanti $\big(o(\beta),\xi(\beta)\big)$ sono pascaliane al variare di β in un opportuno $B\in\mathscr{F}$. Analogamente si prova il viceversa.

Corollario 3.9. *Se* $d=(a\,,b)$, $a,b\in\mathscr{O}$, *è una retta secante (tangente) pascaliana in* $\mathscr{P}(\mathscr{O})$, *allora* $\big(i(a),i(b)\big)$ *è pascaliana in* $\mathscr{P}(\overline{\mathscr{O}})$.

4. - Sul tipo di Buekenhout degli ovali ultrapotenza.

Veniamo ora allo studio della configurazione $\mathscr{D}(\overline{\mathscr{O}})$ delle rette regolari degli ovali ultrapotenza, dimostrando che sussiste il conclusivo

Teorema 4.1. *Se* $\overline{\mathscr{O}}$ *è l'ovale ultrapotenza di un qualunque ovale* $\mathscr{O}$, *allora il tipo di Buekenhout di* $\overline{\mathscr{O}}$ *coincide con quello di* $\mathscr{O}$.

Dim. Se $\mathscr{O}$ è del tipo I, anche $\overline{\mathscr{O}}$ è dello stesso tipo. Infatti, se esistesse in $\mathscr{D}(\overline{\mathscr{O}})$ una retta secante (tangente) regolare, ad esempio $(\bar{o},\bar{\xi})$, allora, in virtù della Proposizione 3.1, esisterebbe un $B\in\mathscr{F}$ tale che per ogni $\alpha\in B$, la retta $\big(o(\alpha),\xi(\alpha)\big)$ risulterebbe regolare in $\mathscr{P}(\mathscr{O})$ contro l'ipotesi.

Esaminiamo ora il caso II. In virtù del Corollario 3.2 e del Lemma 1.6, si ha che $\overline{\mathscr{O}}$ è del tipo II oppure del tipo V, ma se fosse di quest'ultimo tipo, esisterebbe in $\mathscr{D}(\overline{\mathscr{O}})$ almeno una tangente $(\bar{\xi})$ regolare e quindi, per la Proposizione 3.1, la tangente $(\xi(\alpha))$ sarebbe regolare in $\mathscr{P}(\mathscr{O})$, $\forall \alpha \in B \in \mathscr{F}$, contrariamente a quanto ipotizzato.

Del tutto similmente si prova il caso III.

Nel caso in cui $\mathscr{O}$ è del tipo IV, sempre dal Corollario 3.2 e dal Lemma 1.6, segue che $\overline{\mathscr{O}}$ non può essere che del tipo IV o V. Ma se $\overline{\mathscr{O}}$ fosse del tipo V, fissata in esso una qualunque coordinatizzazione $(\bar{o}, \bar{u}, \bar{\xi})$, si avrebbe che la secante $(\bar{o}, \bar{\xi})$ è regolare e quindi, per la Proposizione 3.1, esisterebbe un $B \in \mathscr{F}$: $\forall \alpha \in B$, $(o(\alpha), \xi(\alpha))$ sarebbe regolare contro l'ipotesi.

Il caso V è immediata conseguenza ancora del Corollario 3.2 e del Lemma 1.6.

Passiamo ora all'esame delle quattro sottoclassi della V.

Nel caso V.1, se in $\mathscr{P}(\overline{\mathscr{O}})$ esistesse una secante (tangente) pascaliana, ad esempio $(\bar{o}, \bar{\xi})$ con $\bar{o} \neq \bar{\xi}$, fissata una coordinatizzazione $(\bar{o}, \bar{u}, \bar{\xi})$ di $\overline{\mathscr{O}}$, $\forall \bar{u} \in \overline{\mathscr{O}}$ e $\bar{o} \neq \bar{u} \neq \bar{\xi}$, nel doppio-cappio $\bar{Q}(\bar{o}, \bar{u}, \bar{\xi})$ si avrebbe $\bar{Q}^*(= \bar{Q}(\bar{o}, \bar{u}, \bar{\xi}) - \{\bar{o}\})$ gruppo abeliano moltiplicativo e quindi, per la Proposizione 3.8, $(o(\alpha), \xi(\alpha))$ pascaliana al variare di α in un opportuno $B \in \mathscr{F}$, contro l'ipotesi.

Se $\mathscr{O}$ è del tipo V.2, allora, per il Corollario 3.9 nonché per il Lemma 1.6, tutte le tangenti ad $\overline{\mathscr{O}}$ sono pascaliane, d'altro canto non possono esistere in $\mathscr{P}(\overline{\mathscr{O}})$ secanti pascaliane altrimenti, per quanto osservato nel caso precedente, si avrebbero in $\mathscr{P}(\mathscr{O})$ infinite secanti pascaliane, d'onde un assurdo. Analogamente si prova il caso V.3.

Da ultimo, se $\mathscr{O}$ è del tipo V.4, allora anche $\overline{\mathscr{O}}$ è dello stesso tipo, in virtù del Corollario 3.9 e del Lemma 1.6. Il teorema risulta così completamente provato.

Osservazione. In accordo con la generalizzazione data in [4] per la nozione di ovale, una *conica* (nel senso di Buekenhout) può essere definita come segue:

se si chiama *conica proiettiva* ogni insieme non vuoto di punti di un piano lineare π, definito sopra un campo k, coincidente con la totalità dei punti *razionali sopra* k di una conica non singolare, definita sopra k, allora, diremo *conica* ogni ovale isomorfo alla struttura naturale di ovale di una conica proiettiva. Poichè (cfr. [4]) un ovale $\mathscr{O}$ è una conica se, e soltanto se, il doppio-cappio relativo ad una sua qualunque coordinatizzazione è un campo, dai Teoremi 3.7 e 4.1, e dalla Proposizione 2.2, discende che $\overline{\mathscr{O}}$ è una conica se, e soltanto se, $\mathscr{O}$ è una conica.

Bibliografia

[1] U. Bartocci, *Un procedimento di estensione dei piani grafici infiniti,* Rend. Accad. Naz. Lincei (8) **46** (1969), 358-366.

[2] U. BARTOCCI e G. FAINA, *Sul tipo di Lenz-Barlotti di certe estensioni di un piano grafico infinito*, Rend. Accad. Naz. Lincei (8) **58** (1975), 703-707.

[3] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Chap. I, 3ª ediz. 1961.

[4] F. BUEKENHOUT, *Etude intrinsèque des ovales*, Rend. Mat. (5) **25** (1966), 333-393.

[5] W. W. COMFORT and S. NEGREPONTIS, *The theory of ultrafilters*, « Die Grund. d. Math. », Bd. 211, Springer, Berlin 1974.

[6] P. DEMBOWSKI, *Finite geometries*, « Ergebn. d. Math. », Bd. 44, Springer-Verlag, Berlin 1968.

[7] G. FAINA, *Sul doppio-cappio associato ad un ovale* (in corso di pubblicazione sul Boll. Un. Mat. Ital. (1978)).

[8] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry* (with an appendix of L. Lombardo Radice), Cremonese, Roma 1961.

Summary

In this paper, following [**1**] *and* [**2**], *one indicates the way of constructing non trivial extensions of infinite ovals (in the sense of Buekenhout) different from free extensions. Furthermore, one studies the type of regularity of the extensions obtained.*

* * *