Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 123-133

G. PICA (*)

Conteggio di grafi esterno - planari massimali con quattro vertici di grado due e studio del gruppo dei loro automorfismi (**)

1. - Introduzione.

In [**5**] ci si è occupati del conteggio degli OM-grafi con quattro vertici di grado due (2-vertici) tali che i due 3-cicli (cicli di lunghezza tre) senza spigoli sul ciclo hamiltoniano c hanno uno spigolo in comune.

Con il termine OM-grafo si intende un grafo esterno-planare massimale; è noto inoltre che tali grafi hanno almeno due vertici di grado due (cfr. [**3**]).

Dato un OM-grafo G, esiste un grafo piano GP, che si suppone fissato per ogni G, isomorfo ad esso che ha la proprietà di avere un ciclo hamiltoniano c che divide il piano in due regioni, una finita che viene indicata con R, ed una infinita, in modo tale che tutti gli spigoli di GP che non sono su c (che verranno chiamati *corde*) si trovano in R e dividono R in triangoli.

Un OM-grafo GP che ha quattro 2-vertici ha due 3-cicli che non hanno spigoli su c (cfr. $[\mathbf{1}]_2$). Evidentemente i due 3-cicli possono avere, o non, uno spigolo in comune.

Per conteggio dei grafi di un certo tipo si intende il calcolo della cardinalità di un insieme I dei grafi di quel tipo, a due a due non isomorfi, tale che ogni grafo di quel tipo sia isomorfo ad uno, e a un solo, elemento di I. All'insieme I si dà il nome di *insieme campione.*

In questo lavoro si procederà al conteggio degli OM-grafi con quattro 2-vertici i cui due 3-cicli senza spigoli su c non hanno uno spigolo in comune

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Facoltà di Ingegneria, Università, 80100 Napoli, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (CNR). — Ricevuto: 16-IV-1977.

ed al conteggio degli OM-grafi con quattro 2-vertici aventi il gruppo degli automorfismi di ordine dato.

Nel seguito con A (risp. B) viene indicato l'insieme campione dei grafi di ordine n con quattro 2-vertici ed i cui due 3-cicli suddetti non hanno (risp. hanno) uno spigolo in comune.

Considerato un elemento H di B, nella sua rappresentazione piana HP le corde dei due 3-cicli suddetti, diverse dallo spigolo in comune (spigolo che nel seguito verrà detto *diagonale*), formano un 4-ciclo t che divide R in cinque regioni, una interna ad esso e quattro esterne.

Considerato un elemento G di A, nella sua rappresentazione piana GP, le corde dei due 3-cicli suddetti dividono R in sette regioni, due interne ad essi e cinque esterne.

Le regioni di G esterne ai due 3-cicli e che contengono i 2-vertici denominiamole R_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, in modo tale che, detto n_i il numero di corde interne ad R_i, risulti

$$n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3 \geqslant n_4 \geqslant 0 \tag{1}$$

e chiamiamo t_i la corda che appartiene ad R_i e ad uno dei due 3-cicli.

La scelta dei nomi da dare alle suddette regioni risulta non univoca nel caso che si ha l'uguaglianza tra due o più n_i aventi indici consecutivi; in tal caso nel seguito, quando sarà possibile, si darà un altro criterio per rendere univoca la denominazione delle R_i; in caso contrario la scelta dei nomi delle R_i sarà fatta in modo arbitrario.

La regione di G esterna ai due 3-cicli e che non contiene vertici di grado due verrà indicata con R_5.

Una contrazione elementare di un grafo G è l'operazione che consiste nell'identificare due vertici adiacenti U e V, cioè nel sostituire U e V con un nuovo vertice W adiacente a quei vertici che sono adiacenti ad U oppure a V (cfr. [**3**]).

Un grafo G si dice ***contraibile*** in un grafo H se H può essere ottenuto da G con una successione finita di contrazioni elementari.

Ogni grafo G appartenente ad A è contraibile in un grafo H appartenente a B. Tale contrazione di G in H si ottiene identificando successivamente a due a due i vertici di G appartenenti ad R_5.

Conserviamo per le regioni e le corde del grafo H ottenuto dalla contrazione di G, la stessa denominazione delle regioni R_i e delle corde t_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, usata per G.

Se indichiamo con n l'ordine di un grafo G appartenente ad A e con n_5 il numero di corde interne ad R_5, risulta, evidentemente, che

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n - 9 - n_5 \,. \tag{2}$$

Dato un grafo G di A e detto H il grafo in cui è contraibile, scelta su H una corda t_m (il criterio di scelta verrà indicato in seguito in base alla scelta delle R_i) orientiamola in modo che abbia come primo estremo il vertice T_n, che essa non ha in comune con la diagonale, e come secondo estremo il vertice T_p, che essa ha in comune con la diagonale; associamo quindi al 4-ciclo t un verso che sia concorde con quello fissato su t_m. Associamo alle corde t_i di G lo stesso orientamento che esse hanno in H.

Indichiamo inoltre con r_1 (risp. r_2) la corda di G diversa dalle t_i appartenente al 3-ciclo che contiene (risp. non contiene) t_m. Orientiamo r_1 in modo tale che resti associata al 3-ciclo a cui appartiene il verso concorde a t_m.

Indichiamo con a_{ir}, $1 \leqslant r \leqslant n_i$ e $1 \leqslant i \leqslant 5$, le corde di G appartenenti ad R_i e diverse da t_i ed r_i; poniamo $a_{i0} = t_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$; $a_{50} = r_1$ ed $a_{5n_5+1} = r_2$ Considerata la corda a_{ir} orientiamola con il verso per cui risulta primo estremo il vertice che essa ha in comune con a_{ir-1}. Diremo inoltre che due corde a_{ir-1} ed a_{ir} sono ***consecutive*** se il secondo estremo di a_{ir-1} coincide con il primo estremo di a_{ir}.

Ciò premesso, fissata la denominazione delle regioni R_i, ad ogni corda a_{ir}, ove per $1 \leqslant i \leqslant 4$, $1 \leqslant r \leqslant n_i$ e per $i = 5$ $1 \leqslant r \leqslant n_5 + 1$, associamo la quantità

$$s_{ir} = \begin{matrix} 1 & \text{se } a_{ir-1} \text{ ed } a_{ir} \text{ sono consecutive} \\ 0 & \text{in caso contrario}. \end{matrix}$$

In questo modo, in corrispondenza di ogni scelta di denominazione per le regioni R_i, ad ogni OM-grafo di A viene associata una sequenza di successioni del tipo

$$s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1n_1}; s_{21}, s_{22}, \ldots, s_{2n_2}; s_{31}, s_{32}, \ldots, s_{3n_3}; s_{41}, s_{42}, \ldots, s_{4n_4}; \\ s_{51}, s_{52}, \ldots, s_{5n_5+1}. \tag{3}$$

Nel seguito con $P^{(i)}_{N,4}$ verrà indicato il numero di partizioni dell'intero N nei quattro addendi n_1, n_2, n_3, n_4 verificanti l'i-esima delle seguenti relazioni, escludentesi a due a due (cfr. [**5**]):

$$\begin{array}{llll} (a_1) & n_1 = n_2 = n_3 = n_4 \geqslant 0; & (a_2) & n_1 > n_2 = n_3 = n_4 \geqslant 0; \\ (a_3) & n_1 = n_2 = n_3 > n_4 \geqslant 0; & (a_4) & n_1 = n_2 > n_3 = n_4 \geqslant 0; \\ (a_5) & n_1 = n_2 > n_3 > n_4 \geqslant 0; & (a_6) & n_1 > n_2 = n_3 > n_4 \geqslant 0; \\ (a_7) & n_1 > n_2 > n_3 = n_4 \geqslant 0; & (a_8) & n_1 > n_2 > n_3 > n_4 \geqslant 0, \end{array} \tag{4}$$

e con il simbolo $\{x\}$ indicheremo il più piccolo intero maggiore od uguale ad x; inoltre dati due interi $x \geqslant y$ il simbolo div (x, y) indica il numero 1 se x è divisibile per y, lo zero in caso contrario.

2. - Calcolo di $|A|$.

Indicato con A_j (risp. B_j) il sottoinsieme di A (risp. B) tale che gli n_i verificano la j-esima delle relazioni (4) si ha che la famiglia $\{A_j\}$ (risp. $\{B_j\}$), $(j=1, \dots, 8)$; costituisce una partizione di A (risp. B) e quindi $|A| = \sum_{j=1}^{8} |A_j|$.

(2a) *calcolo di* $|A_1|$.

Poichè gli n_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, verificano le (a_1) di (4), per ogni H appartenente a B_1 la scelta della regione da chiamare R_1 può essere fatta in quattro modi diversi. In corrispondenza di ognuna di tali scelte, si fissi il verso su t prendendo $t_m = t_1$ e si chiamino le altre regioni in modo che la successione delle corde su t è $t_1 t_2 t_3 t_4$. Allora ad ogni OM-grafo G di A_1, orientate le sue corde nel modo prima indicato, sono associate quattro sequenze che, come si vede facilmente, sono la (3) e

$$\text{(X)} \qquad 1 - s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2n_1}; 1 - s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1n_1}; 1 - s_{41}, s_{42}, \dots, s_{4n_1}; \\ 1 - s_{31}, s_{32}, \dots, s_{3n_1}; s'_{51}, s_{5n_5+1}, \dots, s_{52} .$$

$$\text{(Y)} \qquad s_{31}, s_{32}, \dots, s_{3n_1}; s_{41}, s_{42}, \dots, s_{4n_1}; s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1n_1}; s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2n_1}; \\ 1 - s'_{51}, s_{5n_5+1}, \dots, s_{52} .$$

$$\text{(Z)} \qquad 1 - s_{41}, s_{42}, \dots, s_{4n_1}; 1 - s_{31}, s_{32}, \dots, s_{3n_1}; 1 - s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2n_1}; \\ 1 - s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1n_1}; 1 - s_{51}, s_{52}, \dots, s_{5n_5+1} .$$

Si osservi che esse sono a due a due coincidenti nei seguenti casi, che si escludono a vicenda:

— la (3) coincide con la (X), e quindi la (Y) con (Z), se

$$\text{(5)} \qquad s_{11} = 1 - s_{21}, \ s_{1r} = s_{2r}; \quad s_{31} = 1 - s_{41}, \ s_{3r} = s_{4r}; \quad (2 \leqslant r \leqslant n_1); \\ s_{51} = s'_{51}, \ s_{52} = s_{5n_5+1}, \dots ,$$

— la (3) coincide con la (Y), e quindi la (X) con (Z), se

$$(6) \qquad s_{1j} = s_{3j}\,; \quad s_{2j} = s_{4j}\,; \quad (1 \leqslant j \leqslant n_1)\,; \quad s_{51} = 1 - s'_{51}\,;$$
$$s_{52} = s_{5n_5+1}\,;\; s_{53} = s_{5n_5}\,; \ldots .$$

Si vede facilmente che, per ogni fissato valore di n_5, il numero delle sequenze che verificano le (a_1) di (4) è

$$P^{(1)}_{n-9-n_5,4} \cdot (2^{n_1+n_2+n_3+n_4}) \cdot 2^{n_5+1} = P^{(1)}_{n-9-n_5,4} \cdot 2^{n-9-n_5} \cdot 2^{n_5+1}$$

ed il numero di quelle che sono a due a due coincidenti è dato da

$$P^{(1)}_{n-9-n_5,4}\, 2^{(n-9-n_5)/2}\, 2^{1+\{n_5/2\}}\,.$$

Per cui, posto $n_5 = h$, si ha che

$$|A_1| = \sum_{h=0}^{n-9} P^{(1)}_{n-9-h,4} \left(\frac{2^{(n-9-h)/2}\, 2^{1+\{h/2\}}}{2} + \frac{2^{n-9-h}\, 2^{h+1} - 2^{(n-9-h)/2}\, 2^{1+\{h/2\}}}{4} \right)$$

$$= \sum_{h=0}^{n-9} P^{(1)}_{n-9-h,4}\, 2^{(n-11-h)/2}\, (2^{(n-9+h)/2} + 2^{\{h/2\}})\,.$$

2b) *Calcolo di* $|A_2|$ e $|A_3|$.

Considerato un elemento G di A_2 (risp. A_3) ed indicato con H l'elemento di B_2 (risp. B_3) in cui esso è contraibile, si fissi il verso su t scegliendo $t_m = t_1$ (risp. $t_m = t_4$) e si chiamino le altre regioni in modo che la successione delle corde su t è $t_1 t_2 t_3 t_4$. Allora ad ogni elemento di A_2 (risp. A_3) viene associata una ed una sola sequenza del tipo (3) e quindi, posto $n_5 = h$, si ha

$$|A_i| = \sum_{h=0}^{n-9} P^{(i)}_{n-9-h,4}\, 2^{n-9-h}\, 2^{h+1} = 2^{n-8} \sum_{h=0}^{n-9} P^{(i)}_{n-9-h,4} \qquad (i = 2, 3)\,.$$

(2c) *Calcolo di* $|A_4|$.

Considerato un generico elemento G di A_4 ed indicato con H l'elemento di B_4 in cui è contraibile, si chiami R_1 una delle due regioni con n_1 corde e si fissi il verso su t prendendo $t_m = t_1$; si chiamino le altre regioni con n_3 corde in modo che la successione delle R_i secondo il verso di t è (a) $R_1 R_2 R_3 R_4$ oppure (b) $R_1 R_3 R_2 R_4$ oppure (c) $R_1 R_3 R_4 R_2$.

Indichiamo con A'_4 il sottoinsieme di A_4 ai cui elementi è associata la (a), con A_4'' quello ai cui elementi è associata la (b), con A_4''' quello ai cui elementi è associata la (c); evidentemente tali insiemi costituiscono una partizione di A_4, per cui $|A_4|=|A_4'|+|A_4''|+|A_4'''|$.

In conseguenza della doppia scelta della regione da denominare R_1, ad ogni elemento di A_4 sono associate due sequenze: la (3) e, rispettivamente, la (X) o la (Y) o la (Z) a secondo che esso appartenga ad A_4', A_4'' o A_4''', con

$$\text{(X)}\qquad 1-s_{21}, s_{22}, \ldots, s_{2n_1}; 1-s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1n_1}; 1-s_{41}, s_{42}, \ldots, s_{4n_3}; \\ 1-s_{31}, s_{32}, \ldots, s_{3n_3}; s_{51}', s_{5n_5+1}, \ldots, s_{52}.$$

$$\text{(Y)}\qquad s_{21}, s_{22}, \ldots, s_{2n_1}; s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1n_1}; s_{41}, s_{42}, \ldots, s_{4n_3}; s_{31}, s_{32}, \ldots, s_{3n_3}; \\ s_{51}'', s_{5n_5+1}, \ldots, s_{52}.$$

$$\text{(Z)}\qquad 1-s_{21}, s_{22}, \ldots, s_{2n_1}; 1-s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1n_1}; 1-s_{41}, s_{42}, \ldots, s_{4n_3}; \\ 1-s_{31}, s_{32}, \ldots, s_{3n_3}; 1-s_{51}, s_{52}, \ldots, s_{5n_5+1}.$$

Si ha che la (3) coincide con la (X) se

$$(7)\qquad s_{11}=1-s_{21}, \ s_{1r}=s_{2r}, \ 2\leqslant r\leqslant n_1; \quad s_{31}=1-s_{41}, \ s_{3j}=s_{4j}, \ (2\leqslant j\leqslant n_3); \\ s_{51}=s_{51}', \ s_{52}=s_{5n_5+1}, \ldots.$$

Si ha che la (3) coincide con la (Y) se

$$(8)\qquad s_{1r}=s_{2r}, \ (1\leqslant r\leqslant n_1); \quad s_{3j}=s_{4j}, \ (1\leqslant j\leqslant n_3); \\ s_{51}=s_{51}'', \ s_{52}=s_{5n_5+1}, \ s_{53}=s_{5n_5}, \ldots.$$

Indicato con N' il numero totale delle sequenze associate agli elementi di A_4', con N_1' il numero di quelle tra esse che verificano le (7); con N'' il numero delle sequenze che sono associate agli elementi di A_4'' e con N_1'' il numero di quelle tra esse che verificano le (8); con N_4''' il numero totale delle sequenze associate agli elementi di A_4''', si ha, ponendo $n_5=h$, che

$$N'=N''=N'''=\sum_{h=0}^{n-9} P^{(4)}_{n-9-h,4}2^{n-9-h}2^{1+h}; \qquad N_1'+N_1''=\sum_{h=0}^{n-9} P^{(4)}_{n-9-h,4}2^{(n-9-h)/2}2^{1+\{h/2\}},$$

e quindi

$$|A_4| = \frac{N' + N'' - (N'_1 + N''_1)}{2} + N'_1 + N''_1 + \frac{N'''}{2} =$$

$$= 2^{(n-9)/2} \sum_{h=0}^{n-9} P^{(4)}_{n-9-h,4} (3 \cdot 2^{(n-9)/2} + 2^{\{h/2\}}) .$$

(2d) *Calcolo di* $|A_5|$, $|A_6|$, $|A_7|$.

Indicato con G un generico elemento di A_5 (risp. A_6, A_7) e con H l'elemento di B_5 (risp. B_6, B_7) in cui esso è contraibile, si fissi il verso su t scegliendo $t_m = t_4$ (risp. $t_m = t_1$). Denominiamo le due regioni aventi lo stesso numero di corde in modo che la regione R_i preceda la regione R_{i+1} secondo il verso di t, a partire da t_m. Tenendo allora presente che il numero delle possibili successioni delle corde t_i su t è tre, e che il numero delle sequenze, in corrispondenza di ogni fissato valore di $n_5 = h$, è: $3P^{(i)}_{n-9-h,4} 2^{n-9-h+(1+h)}$, $i = 5, 6, 7$; si ha che

$$|A_i| = 3 \cdot 2^{n-8} \sum_{h=0}^{n-9} P^{(i)}_{n-9-h,4} , \qquad i = 5, 6, 7 .$$

2l) *Calcolo di* $|A_8|$.

Per la unicità della scelta di denominazione delle regioni R_i, si ha che ad ogni elemento di A_8 è associata una ed una sola sequenza del tipo (3) e quindi

$$|A_8| = \sum_{h=0}^{n-9} 6 \cdot P^{(8)}_{n-9-h,4} 2^{n-9-h+(1+h)} = 3 \cdot 2^{n-7} \sum_{h=0}^{n-9} P^{(8)}_{n-9-h,4} .$$

3. - Gruppo degli automorfismi di un *OM*-grafo con quattro 2-vertici.

Allo scopo di calcolare l'ordine del gruppo degli automorfismi associato ad un *OM*-grafo con quattro 2-vertici, premettiamo i seguenti lemmi.

Lemma 1. *Ogni automorfismo a di un OM-grafo G che lascia fisso un vertice di grado due, coincide con l'identità.*

Indichiamo con V il 2-vertice di G tale che $a(V) = V$ e con A e B i vertici di G che sono adiacenti a V; poichè A e B hanno grado diverso (1), non

(1) Infatti A (ad es.) è adiacente a V, B, ad un vertice C, che è adiacente anche a B, e ad almeno un altro vertice; B invece, è adiacente solo a V, A e C (o viceversa, scambiando i nomi di A e B).

può essere $a(A) = B$ e quindi si ha necessariamente che $a(A) = A$ e $a(B) = B$. Detto C l'altro vertice adiacente ad A e B, si ha necessariamente che $a(C) = C$; così procedendo si vede che a lascia fissi tutti i vertici di G per cui coincide con l'identità.

Lemma 2. *Ogni automorfismo a di un OM-grafo G con quattro vertici di grado due, distinto dall'identità, è un'applicazione involutoria.*

Supponiamo che $a(V_l) = V_m$ ed $a(V_m) = V_i$, con V_l, V_m e V_i tre vertici di G di grado due e $V_l \neq V_m$. Vogliamo dimostrare che $V_i = V_l$. Indichiamo con A e B i vertici di G adiacenti a V_l; per definizione di automorfismo si ha che $a(A) = A'$ e $a(B) = B'$ sono adiacenti a V_m e hanno lo stesso grado di A e B; detto C il vertice adiacente sia ad A che a B, si ha che $a(C)$ è adiacente sia ad A' che a B'. Così procedendo si dimostra che $a(t_l) = t_m$ e $a(t_m) = t_i$. Supponiamo per assurdo che $V_i \neq V_l$, cioè $t_i \neq t_l$, e distinguiamo due casi:

1) t_l e t_m hanno un estremo in comune; in tale ipotesi questo estremo resta fisso, mentre da $a(t_m) = t_i$ segue che esso ha come corrispondente in a uno degli estremi di t_i; da cui l'assurdo;

2) t_l e t_m non hanno un estremo in comune; allora nel caso che G appartiene all'insieme campione B si ha che t_m e t_i hanno un estremo T in comune, per cui da $a(t_m) = t_i$ segue che T resta fisso, mentre da $a(t_l) = t_m$ segue che esso è corrispondente di uno degli estremi di t_l, e ciò è impossibile. Mentre se G appartiene all'insieme A si ha che t_l e t_m appartengono ognuna ad uno dei due 3-cicli senza corde su c, per cui all'estremo X di t_l è associato l'estremo X' di t_m, entrambi non appartenenti ad R_5, ed all'altro estremo Y di t_l è associato l'estremo Y' di t_m, entrambi appartenenti ad R_5. Allora se t_m e t_i hanno un estremo in comune, questo è necessariamente X', che pertanto dovrebbe restare fisso, e ciò è assurdo; in caso contrario, uno degli estremi di t_i è necessariamente X, per cui si ha che $a(X') = X$. Detto allora Z l'altro vertice del 3-ciclo contenente t_l si ha che $a(Y') = Z$. Ma ciò non è possibile in quanto i vertici Y e Z non sono adiacenti allo stesso numero di vertici di R_5 e da $a(Y) = Y'$ segue che Y e Y' hanno lo stesso grado. In definitiva da $a(V_l) = V_m$ segue che $a(V_m) = V_l$ e di conseguenza, si ha che $a(A') = A$ e $a(B') = B$. Così procedendo si ha l'asserto.

Teorema 1. *L'ordine del gruppo degli automorfismi di un OM-grafo con quattro 2-vertici è uno, oppure due, oppure quattro.*

In base ai lemmi dimostrati si ha che ogni automorfismo a di G, distinto dall'identità, soddisfa a una sola delle seguenti condizioni

(1) $a(V_1)=V_2$; $a(V_3)=V_4$; evidentemente un tale tipo di automorfismo esiste quando $n_1=n_2$ e $n_3=n_4$ e, poichè i vertici corrispondenti hanno lo stesso grado, quando, fissata la denominazione delle R_i, si ha che

— se G appartiene a B_1, le s_{ij} sono tali che

(9) $$s_{11}=1-s_{21}\,,\ s_{1r}=s_{2r}\,;\qquad s_{31}=1-s_{41}\,,\ s_{3r}=s_{4r}\,;\qquad (2\leqslant r\leqslant n_1)\,;$$

— se G appartiene ad A_1 e le s_{ij} verificano le (5);

— se G appartiene a B_4, la successione delle regioni è $R_1R_2R_3R_4$ o $R_1R_3R_4R_2$, e

(10) $$s_{11}=1-s_{21}\,,\ s_{1r}=s_{2r}\,,\ (2\leqslant r\leqslant n_1)\,;\quad s_{31}=1-s_{41}\,,\ s_{3j}=s_{4j}\,,\ (2\leqslant j\leqslant n_3),$$

mentre se la successione delle regioni è $R_1R_3R_2R_4$ e

(11) $$s_{1r}=s_{2r}\quad (1\leqslant r\leqslant n_1)\,;\qquad s_{3j}=s_{4j}\quad (1\leqslant j\leqslant n_3)\,,$$

se G appartiene ad A_4 e le s_{ij} verificano le (7) oppure le (8), secondo che G appartiene ad A_4' o ad A_4''.

(2) $a(V_1)=V_3$; $a(V_2)=V_4$; un tale tipo di automorfismo esiste quando $n_1=n_3$ e $n_2=n_4$, cioè, in base alla (1), quando

— G appartiene a B_1 e le s_{ij} sono tali che

(12) $$s_{1r}=s_{3r}\,,\ s_{2r}=s_{4r}\qquad (1\leqslant r\leqslant n_1)\,,$$

— G appartiene ad A_1 e le s_{ij} verificano le (6).

(3) $a(V_1)=V_4$; $a(V_2)=V_3$; un tale automorfismo esiste quando G appartiene a B_1 e le s_{ij} sono tali che

(13) $$s_{11}=1-s_{41}\,,\ s_{1r}=s_{4r}\,;\qquad s_{21}=1-s_{31}\,,\ s_{2r}=s_{3r}\,;\qquad (2\leqslant r\leqslant n_1)\,.$$

Si ha, quindi, che il gruppo degli automorfismi di G ha ordine quattro quando esso appartiene a B_1 e le s_{ij} verificano sia le (9) che le (12) e le (13); mentre se sono verificate solo le (9) (risp. (12) o (13)) e non le altre, tale gruppo ha ordine due. Ciò si verifica anche quando G appartiene ad A_1 e sono valide le (5) o le (6), oppure G appartiene a B_4 e sono verificate le (10) o le (11), od anche se G appartiene ad A_4 e sono verificate le (7) o le (8). In tutti gli altri casi si ha che il gruppo degli automorfismi di G è costituito solo dall'identità.

Teorema 2. *Il numero degli OM-grafi di ordine n, con quattro 2-vertici, il cui gruppo degli automorfismi ha ordine quattro è dato da*

$$\operatorname{div}(n-8,\,4)\,2^{(n-8)/4}\,, \tag{14}$$

ed il numero di quelli aventi il gruppo degli automorfismi di ordine due è dato da

$$3\cdot 2^{(n-12)/4}\big((2^{(n-8)/4}-1)\,P^{(1)}_{n-8,4}+2^{(n-4)/4}\,P^{(4)}_{n-8,4}\big)+ \\ +\sum_{h=0}^{n-9}2^{(n-9-h)/2+\{h/2\}}\,(P^{(1)}_{n-9-h,4}+2\cdot P^{(4)}_{n-9-h,4})\,. \tag{15}$$

Difatti si dimostra facilmente che il numero degli OM-grafi di B_1 che verificano le (9), (12), (13) è dato dalla (14) (cfr. [**5**], p. 358 e tale numero è indicato con N_5).

La (15) segue dal fatto che il numero degli elementi di B_1 tali che le quaterne ad essi associati sono a due a due coincidenti è dato da: $3P^{(1)}_{n-8,4}(2^{(n-8)/2}\cdot 2^{(n-8)/4})/2$ ed il numero degli elementi di B_4 che verificano le (10) o le (11) è dato da: $3\cdot P^{(4)}_{n-8,4}2^{(n-8)/2}$; inoltre, per ogni fissato valore di h, $0\leqslant h\leqslant n-9$, il numero degli elementi di A_1 verificanti le (5) o le (6) è dato da $P^{(1)}_{n-9-h,4}\;2^{(n-9-h)/2+\{h/2\}}$ ed il numero degli elementi di A_4 che verificano le (7) o le (8) è dato da: $P^{(4)}_{n-9-h,4}2^{(n-9-h)/2+1+\{h/2\}}$.

Ringrazio il prof. S. Antonucci per i validi suggerimenti datimi.

Bibliografia

[**1**] S. Antonucci: [•]$_1$ *Conteggio di grafi planari massimali,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **2** (1976), 207-212; [•]$_2$ *Conteggio di OM-grafi con due o tre 2-vertici e con un gruppo di automorfismi dato,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **2** (1976), 185-198.

[**2**] C. Berge, *Graphes et hypergraphes,* Dunod, Paris 1973.

[**3**] F. Harary, *Graph theory,* Add. Wels. Publ., London 1972.

[**4**] F. Harary - E. Palmer, *Graphical enumeration,* Acad. Press, New York 1973.

[**5**] G. Pica, *Una questione di conteggio di grafi,* Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) **43** (1976), 351-361.

[**6**] G. Polya, *Kombinatorische anzahlbestimmungen für gruppen, graphen, und chemische verbindungen,* Acta Math. **68** (1937), 145-254.

[**7**] J. Rordan, *An introduction to combinatorial analysis,* Wiley, New York 1958.

Summary

As a completion of what has been developed in [**5**], *it is performed the enumeration of maximal outer-planar graphs with four vertices of degree* 2, *whose cycles of lenght* 3, *without edges on the hamiltonian cycle, have non common edges; it is performed also the enumeration of the maximal outer-planar graphs with four vertices of degree* 2, *beeing he order of the group of automorphism established.*

* * *