Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 331-345

CARLA LUPPI (*)

Connessione relativa e compattezza nelle algebre di Heyting topologiche. (**)

Introduzione.

In [2] ho considerato la definizione di topologia in una algebra di Heyting, introducendo così le AHT; ho quindi esteso alle AHT i consueti concetti algebrico-topologici che compaiono nelle algebre di chiusura: ad esempio, ho definito i morfismi, studiato le congruenze, definito le AHT quozienti e le algebre relativizzate. Nel presente lavoro ho portato avanti ulteriormente l'indagine, occupandomi del concetto di connessione e di compattezza. C'è anzitutto da osservare che, non essendo i due operatori K, I l'uno duale dell'altro, è spontaneo affiancare a ciascun K-concetto il relativo I-concetto: così la nozione di compattezza si sdoppia, ed anzi alcuni esempi mostrano che i due concetti di K-compattezza ed I-compattezza non coincidono; per la nozione di connessione tuttavia si preferisce seguire una via diversa. Poichè la connessione di un elemento x è strettamente legata all'esterno di x, si estende dapprima quest'ultimo concetto alle AHT, considerando naturale definire l'esterno di x in relazione allo pseudocomplemento relativo, di cui il complemento è un caso particolare. Tra le varie possibilità che si presentano per definire l'esterno di x relativo ad a è apparso naturale scegliere l'operatore E_a (cfr. Def. 1.1), che coinvolge entrambi gli operatori della topologia e che ha come codominio gli aperti dell'AHT.

Usando l'operatore E_a si è data quindi la definizione di connessione relativa ad a (cfr. Def. 2.1), che corrisponde, sotto opportune ipotesi, al concetto di « connessione a meno dell'elemento a » (cfr. Teor. 2.2). A tale concetto si estendono, anche se sotto alcune condizioni, varie proprietà della connessione nelle ABT (cfr. Teor. 2.1, 2.3).

(*) Indirizzo: Ist. di Mat., Università, 43100 Parma, Italia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.).— Ricevuto: 14-VII-1977.

Per quanto riguarda la compattezza, come detto sopra, i due concetti di K-compattezza ed I-compattezza non sono equivalenti; si sono comunque trovati dei legami fra essi (cfr. Teor. 3.1); tra le varie proprietà delle AHT compatte si può segnalare che vale, seppure sotto una condizione, che ogni elemento chiuso è compatto (cfr. Teor. 3.2, 3.3).

1. - L'operatore E_a, elementi relativamente separati.

Definizione 1.1. Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I \rangle$ una AHT, $a \in H$, per ogni $x \in H$ chiameremo *esterno di x relativo ad a* l'elemento

$$E_a(x) = K(x) \Rightarrow I(a) ; \tag{1}$$

chiameremo invece *esterno di x* l'elemento

$$E(x) = -K(x) . \tag{2}$$

Corollario. *In ogni AHT si ha $E(x) = E_0(x) = I(-x)$.*

Valgono le seguenti semplici proposizioni.

Lemma 1.1.

(i) $E_a(x) = E_{I(a)}(x)$;

(ii) *se* $a_1 \leqslant a_2$, *allora* $E_{a_1}(x) \leqslant E_{a_2}(x)$;

(iii) $K(x) \leqslant I(a)$ *sse* $E_a(x) = 1$.

Definizione 1.2. Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I \rangle$ una AHT, siano x, y, $a \in H$; x, y si dicono *separati relativamente ad a* sse $x \leqslant E_a(y)$ *e* $y \leqslant E_a(x)$; x, y si dicono invece *contigui relativamente ad a* sse non sono separati relativamente ad a. Ovviamente x, y si dicono *separati* sse $x \leqslant E(y)$ e $y \leqslant E(x)$, si dicono *contigui* sse non sono separati.

Corollario. *Siano x, $y \in \mathscr{H}$; valgono allora le due seguenti proposizioni:*

(i) *x, y sono separati relativamente a* 1;

(ii) *x, y sono separati relativamente ad a sse sono separati relativamente ad $I(a)$.*

Nel prossimo teorema saranno enunciate varie proprietà relative alla separazione o alla contiguità di elementi; poichè in alcune di esse interviene il concetto di intorno di un elemento, ne richiamiamo la definizione.

Definizione 1.3. Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I \rangle$ una AHT, $a, x \in H$; si dirà che *a è un intorno di x* sse $x \leqslant I(a)$.

Teorema 1.1. *Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I \rangle$ una* AHT, *siano $x, y, z, a, b \in H$, allora valgono le seguenti proposizioni:*

(i) *se $x \leqslant z$ e z, y sono separati relativamente ad a anche x, y lo sono;*

(ii) *1, x sono separati relativamente ad a sse a è intorno di $K(x)$;*

(iii) *se x, y sono separati relativamente ad a e a non è intorno nè di x nè di y, allora $x, y \neq 1$;*

(iv) *sia a clopen; se $(x \cup a)$ e y sono contigui relativamente ad a, allora x, y sono contigui relativamente ad a;*

(v) *se $a \leqslant b$ e x, y sono separati relativamente ad a, allora x, y sono separati relativamente a b;*

(vi) *$I(x)$ e $E_a(x)$ sono separati relativamente ad ogni intorno di $K(I(a))$; in particolare se a è clopen, $I(x)$ ed $E_a(x)$ sono separati relativamente ad a;*

(vii) *se x, y sono separati relativamente ad a allora a è intorno di $x \cap y$; viceversa se x, y sono chiusi e a è intorno della loro intersezione, allora x, y sono separati relativamente ad a;*

(viii) *a è un intorno di $(K(x) \cap E_a(x))$;*

(ix) *sia $x \cup y = 1$; x, y sono separati relativamente ad a sse a è intorno di $(K(x) \cap K(y))$.*

Dimostrazione. (i) Basta osservare che $x \cap K(y) \leqslant z \cap K(y) \leqslant I(a)$ e $y \cap K(x) \leqslant y \cap K(z) \leqslant I(a)$.

(ii) Ovvio.

(iii) Se fosse $x = 1$, si avrebbe da (ii) che a è intorno di $K(x)$, assurdo.

(iv) Supponiamo che x, y siano separati relativamente ad a; allora si ha

$$(x \cup a) \cap K(y) = (x \cap K(y)) \cup (a \cap K(y)) \leqslant a = I(a)$$

e

$$K(x \cup a) \cap y = \big(K(x) \cup K(a)\big) \cap y = \big(K(x) \cap y\big) \cup \big(K(a) \cap y\big) \leqslant K(a) = I(a) ,$$

da cui segue che $(x \cup a)$, y sono separati relativamente ad a.

(v) Basta osservare che $I(a) \leqslant I(b)$.

(vi) Da $x \cap (x \Rightarrow a) \leqslant a$, segue, tenendo presente (iii) del teor. 2.1 di [**2**], $I(x) \leqslant I(x \Rightarrow a) \Rightarrow I(a) \leqslant \big(K(x) \Rightarrow I(a)\big) \Rightarrow I(a)$, da cui per (ii) del teor. 2.1 di [**2**], si ha $I(x) \leqslant I\big(\big(K(x) \Rightarrow I(a)\big) \Rightarrow I(a)\big) \leqslant K\big(K(x) \Rightarrow I(a)\big) \Rightarrow K\big(I(a)\big) \leqslant K\big(E_a(x)\big) \Rightarrow I(b)$, dove b è un intorno di $K\big(I(a)\big)$; inoltre $E_a(x) = K(x) \Rightarrow I(a) \leqslant K\big(I(x)\big) \Rightarrow I(a) \leqslant$ $\leqslant K\big(I(x)\big) \Rightarrow I(b)$.

(vii) Basta osservare che $x \cap y \leqslant x \cap K(y) \leqslant I(a)$. La parte inversa segue dal fatto che $x \cap K(y) = y \cap K(x) = x \cap y \leqslant I(a)$.

(viii) Si ha $K(x) \cap E_a(x) = K(x) \cap \big(K(x) \Rightarrow I(a)\big) \leqslant I(a)$.

(ix) Basta dimostrare che $K(x) \cap K(y) \leqslant I(a)$, poichè l'altra implicazione segue da (vii) e da (i). Da (viii) si ha $K(x) \leqslant E_a(x) \Rightarrow I(a)$ e $K(y) \leqslant$ $\leqslant E_a(y) \Rightarrow I(a)$; da ciò $K(x) \cap K(y) \leqslant \big(E_a(x) \Rightarrow I(a)\big) \cap \big(E_a(y) \Rightarrow I(a)\big) = \big(E_a(x) \cup$ $\cup E_a(y)\big) \Rightarrow I(a)$; d'altra parte $x \leqslant E_a(y)$ e $y \leqslant E_a(x)$, da cui $\big(E_a(x) \cup E_a(y)\big) \Rightarrow$ $\Rightarrow I(a) \leqslant (x \cup y) \Rightarrow I(a) = 1 \Rightarrow I(a)$, si ha quindi $K(x) \cap K(y) \leqslant I(a)$.

Teorema 1.2. *Sia* $\mathscr{H} = \langle H, K, I \rangle$ *una* AHT, *siano* x, a *due elementi di* H *tali che* $a \leqslant x$ *e* a *aperto, inoltre siano* $x_1, x_2 \leqslant x$. *Allora sono equivalenti*:

(i) x_1, x_2 *sono separati relativamente ad* a *in* $\mathscr{H}_x$;

(ii) x_1, x_2 *sono separati relativamente ad* a *in* $\mathscr{H}$.

Dimostrazione. (i) *implica* (ii). Basta tener presente $x_1 \cap K(x_2) \leqslant$ $\leqslant I(a) \leqslant I(x \Rightarrow a)$.

(ii) *implica* (i). Basta tener presente $x_1 \cap K(x_2) \leqslant x \cap I(x \Rightarrow a) \leqslant a = I(a)$.

Si osservi che la condizione « a è aperto », oltre che sufficiente per l'equivalenza fra (i) e (ii), è anche necessaria per $x = a$.

Chiudiamo il paragrafo considerando un secondo operatore E_a^I, analogo ad E_a, ma di esso meno « fine »:

$$E_a^I(x) = I(x \Rightarrow a) . \tag{3}$$

Tale operatore ha un certo interesse, in relazione ad un noto teorema di rappresentazione delle algebre di Heyting (cfr. [**4**]). Posto $\mathscr{E}^I(x, y) = E_y^I(x)$, $\mathscr{E}^I$ può in un certo senso essere considerato come l'operatore che fa « nascere » la struttura di Heyting nel reticolo degli aperti di un'algebra di Boole topologica. Appare così naturale, dopo aver introdotto una topologia nelle algebre di Heyting, reiterare il processo iniziale, ovvero chiederci quale specie di struttura ne verrà, introducendo l'operatore $\mathscr{E}^I$ nel reticolo $\mathscr{T}$ degli aperti di una AHT; il seguente Lemma dà una risposta a tale questione.

Lemma 1.2. *Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I\rangle$ una* AHT, *sia $\mathscr{T}$ il reticolo degli aperti di $\mathscr{H}$; $\mathscr{T}$ è una algebra di Heyting e precisamente per ogni $a, b \in \mathscr{T}$, $a \rightarrow b = E_b^I(a)$. In particolare se a è clopen $a \rightarrow b = a \Rightarrow b$.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare $\forall x \in \mathscr{T}$, $x \leqslant I(a \Rightarrow b)$ sse $x \cap a \leqslant b$, ma ciò segue tenendo presente $x = I(x)$ e che I è un operatore crescente. Inoltre se a è chiuso l'asserto segue dall'assioma (ε) delle AHT.

Si può infine notare che esiste una relazione fra i due operatori E_a ed E_a^I e precisamente:

Lemma 1.3. *In ogni* AHT *si ha $E_a(x) \leqslant E_a^I(x)$; inoltre se a è clopen $E_a(x) = E_a^I(x)$; in particolare $E(x) = E_0(x) = E_0^I(x)$.*

Dimostrazione. Segue da (iii) e (ii) del teor. 2.1 di [**2**].

2. - Connessione relativa, connessione.

Definizione 2.1. Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I\rangle$ una AHT; si dice che $\mathscr{H}$ *è connessa relativamente ad a* sse non esistono $x, y \in H$ tali che:

(i) $x, y \nleqslant a$,

(ii) $1 = x \cup y \cup a$,

(iii) x, y sono separati relativamente ad a.

Corollario. *Se $\mathscr{H}$ ha la topologia condensata, $\mathscr{H}$ è connessa relativamente ad ogni a.*

Lemma 2.1. *Sia H un'algebra di Heyting, sono allora equivalenti le due seguenti condizioni:*

(i) *in H il filtro $\{1\}$ è primo;*

(ii) *per ogni topologia $\langle K, I\rangle$ e per ogni $a \in H$, $\mathscr{H} = \langle H, K, I\rangle$ è connessa relativamente ad a.*

Dimostrazione. (i) *implica* (ii). Il contronominale segue direttamente da (iii) del Teor. 1.1.

(ii) *implica* (i). Posto $x \cup y = 1$, basta prendere $a = x \cap y$ e la topologia discreta.

Corollario. *Sia H un'algebra di Heyting avente un nodo α tale che H^{α}* (1) *è una catena; per ogni topologia $\langle K, I\rangle$ si ha allora che $\mathscr{H} = \langle H, K, I\rangle$ è connessa relativamente ad ogni $a \in H$.*

Definizione 2.2. Una AHT si dice *connessa* sse è connessa relativamente a 0.

Teorema 2.1. *Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I\rangle$ una* AHT *e sia a un clopen di $\mathscr{H}$; allora sono equivalenti le due seguenti condizioni:*

(i) *$\mathscr{H}$ è connessa relativamente ad a;*

(ii) *non esistono due chiusi x, y tali che $1 = x \cup y \cup a$, $x, y \nleq a$ e a sia intorno della loro intersezione.*

Inoltre sono equivalenti:

(i′) *$\mathscr{H}$ è connessa;*

(ii′) 1 *non è unione di clopen disgiunti e $\neq 0$.*

Dimostrazione. (i) *implica* (ii). Da non (ii), tenendo presente la (vii) del Teor. 1.1, segue che $\mathscr{H}$ è sconnessa relativamente ad a.

(ii) *implica* (i). Da non (i) segue che esistono x, y tali che $1 = x \cup y \cup a$, $x, y \nleq a$ e $x \cap K(y) \leqslant I(a)$ e $y \cap K(x) \leqslant I(a)$. Sia $z = y \cup a$, essendo a clopen per (iv) del Teor. 1.1 x, z risultano separati relativamente ad a; per (ix) del Teor. 1.1 si ha quindi $K(x) \cap K(y) \leqslant K(x) \cap K(z) \leqslant I(a)$. Così si ha che a è intorno di $K(x) \cap K(y)$, $1 = K(x) \cup K(y) \cup a$ e $K(x)$, $K(y) \nleq a$.

(i′) *implica* (ii′). Segue ovviamente da (i) *implica* (ii), essendo 0 clopen.

(ii′) *implica* (i′). Da non (i′), tenendo presente (ii) *implica* (i), si ha che esistono due chiusi x, y tali che $1 = x \cup y$ e $x, y \neq 0$, $x \cap y = 0$; da ciò segue $x = -y$ e $y = -x$, così x, y sono clopen; da ciò segue non (ii′).

---

(1) Con H^{α} si intende il filtro generato da α; dualmente con H_{α} l'ideale generato da α.

Osservazione. Contrariamente a ciò che accade nelle ABT (cfr. [5]), una AHT può essere connessa pur avendo dei clopen $\neq 0, 1$; si possono infatti considerare semplici esempi, tenendo presente il Lemma 2.1.

Definizione 2.3. Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I\rangle$ una AHT, siano x, $a \in H$ e $a \leqslant x$; si dice che x *è connesso relativamente ad* a sse non esistono x_1, x_2 tali che:

(i) $x_1, x_2 \nleqslant a$,

(ii) $x = x_1 \cup x_2 \cup a$,

(iii) x_1, x_2 sono separati relativamente ad a.

Corollario. *Se a è un aperto di $\mathscr{H}$, sono equivalenti le due seguenti condizioni:*

(i) *x è connesso relativamente ad a;*

(ii) *$\mathscr{H}_x$ è connessa relativamente ad a.*

Dimostrazione. L'equivalenza segue direttamente dalle definizioni 2.1, 2.3 tenendo presente il Teor. 1.2.

Definizione 2.4. Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I\rangle$ una AHT, siano $a, x \in H$; si dice che a *spezza la connessione di* x se $a \neq 0$, $a \neq x$ ed $\exists a'$ separato da a tale che $x = a \cup a'$. Nel caso $x = 1$, si dirà che *a spezza la connessione di $\mathscr{H}$.*

Lemma 2.2. *Sia $a \leqslant x$; a spezza la connessione di x sse a spezza la connessione di $\mathscr{H}_x$.*

Dimostrazione. Basta osservare che $a \cap K(a') = a \cap x \cap K(a') = a \cap \cap K_x(a')$, essendo $a, a' \leqslant x$.

Lemma 2.3. *Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I\rangle$ una* AHT, $a \in H$; *se a spezza la connessione di $\mathscr{H}$ ed a' è un elemento separato da a tale che $a \cup a' = 1$ allora valgono le seguenti proprietà*

(i) $a' = -a$ *e* $a = -a'$,

(ii) $a = --a$,

(iii) *a è un clopen proprio.*

D i m o s t r a z i o n e. (i) Poichè $a \cup a' = 1$ e $a \cap a' \leqslant a \cap K(a') = 0$, si ha $a' = -a$ e $a = -a'$.

(ii) Da (i) segue $a = -a' = --a$.

(iii) Basta dimostrare che a, a' sono aperti; da ciò segue infatti che essendo $a = -a'$, a è anche chiuso e quindi a è un clopen (proprio, essendo $a \neq 0, 1$). A tale scopo basta tener presente $a \leqslant -K(a') = I(-a') = I(a)$; a' è aperto per simmetria.

Il seguente teorema illustra il significato del concetto di connessione relativa.

T e o r e m a 2.2. *Sia* $\mathscr{H} = \langle H, K, I\rangle$ *una* AHT, *siano* $a, x \in H$ *e* a *spezzi la connessione di* x; *si ha allora che le due seguenti condizioni sono equivalenti*:

(i) x *è connesso relativamente ad* a;

(ii) $-a \cap x$ *è connesso.*

D i m o s t r a z i o n e. Poichè a spezza la connessione di x, $\exists a'$ tale che $x = a \cup a'$ e $a \cap K(a') = a' \cap K(a) = 0$; tenendo presente il Lemma 2.2 e (i), (ii) del Lemma 2.3 si ha che $a' = \underset{x}{-} a = -a \cap x$ e $a = \underset{x}{-}\underset{x}{-} a$.

(i) *implica* (ii). Dimostriamo il contronominale; si ha che $\exists x_1, x_2 \neq 0$ e separati tali che $a' = x_1 \cup x_2$; inoltre dall'ipotesi si ha $x = a \cup x_1 \cup x_2$. È infine ovvio osservare che $x_1, x_2 \nleqslant a$, mentre da (v) del Teor. 1.1 segue che x_1, x_2 sono separati relativamente ad a.

(ii) *implica* (i). Dimostriamo il contronominale; si ha che $\exists x_1, x_2 \nleqslant a$ tali che $x = x_1 \cup x_2 \cup a$, $x_1 \cap K(x_2) \leqslant I(a)$ e $x_2 \cap K(x_1) \leqslant I(a)$. D'altra parte $x = a \cup a'$, si ha quindi $a' = x \cap a' = (a' \cap x_1) \cup (a' \cap x_2)$. Si può osservare che $a' \cap x_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$: sia ad esempio $a' \cap x_1 = 0$; poichè $a', x_1 \in H_x$, ne segue $x_1 \leqslant \underset{x}{-} a' = \underset{x}{-}\underset{x}{-} a = a$, assurdo. Si deve infine dimostrare che $(a' \cap x_1) \cap K(a' \cap x_2) = 0$; a tale scopo basta osservare:

$$(a' \cap x_1) \cap K(a' \cap x_2) =$$

$$= a' \cap \big(x_1 \cap K(a' \cap x_2)\big) \leqslant a' \cap \big(x_1 \cap K(x_2)\big) \leqslant a' \cap I(a) \leqslant a' \cap K(a) = 0\,.$$

L e m m a 2.4. *Sia* $\mathscr{H} = \langle H, K, I\rangle$ *una* AHT, *sia* $a, x, y \in H$ *e* $a < x \leqslant y$; *se* a *spezza la connessione di* y *allora* a *spezza la connessione di* x.

Dimostrazione. Dall'ipotesi segue che esiste un elemento a' separato da a tale che $y = a \cup a'$; si ha quindi $x = y \cap x = a \cup (a' \cap x)$, ed $a' \cap x$ è separato da a perchè $a' \cap x \leqslant a'$.

Teorema 2.3. *Sia* $\mathscr{H} = \langle H, K, I \rangle$ *una* AHT, *siano* $a, x \in H$, $a < x$ *e* a *spezzi la connessione di* $K(x)$; *se* x *è connesso relativamente ad* a *e* $y \leqslant K(x)$, *si ha allora che* $x \cup y$ *è connesso relativamente ad* a.

Dimostrazione. Dal Lemma 2.4 segue che a spezza $x \cup y$, cioè: $\exists a'$ tale che $x \cup y = a \cup a'$ e a, a' sono separati. Supponiamo che $x \cup y$ sia sconnesso relativamente ad a; allora dal Teor. 2.1 segue che a' è sconnesso, cioè $\exists x_1, x_2 \neq 0$ e separati tali che $a' = x_1 \cup x_2$. Si ha quindi $a' \cap x = (x_1 \cup x_2) \cap \cap x = (x_1 \cap x) \cup (x_2 \cap x)$, da cui segue $x = (x \cup y) \cap x = (a \cup a') \cap x = a \cup \cup (a' \cap x) = a \cup (x_1 \cap x) \cup (x_2 \cap x)$. Si vuol dimostrare che $x_i \cap x \nleqslant a$; sia ad esempio $x_1 \cap x \leqslant a$, poichè $x_1 \leqslant a'$, si ha $(x_1 \cap x) \cap x_1 \leqslant a \cap a' = 0$, cioè $x_1 \cap x = 0$; quindi si ha $x = a \cup (x \cap x_2)$ e $K(x) = K(a) \cup K(x \cap x_2) \leqslant K(a) \cup K(x_2)$. Tenendo presente che a, a' sono separati e x_1, x_2 sono separati, segue

$$x_1 = x_1 \cap K(x) \leqslant x_1 \cap \big(K(a) \cup K(x_2)\big) =$$
$$= \big(x_1 \cap K(a)\big) \cup \big(x_1 \cap K(x_2)\big) \leqslant \big(a' \cap K(a)\big) \cup \big(x_1 \cap K(x_2)\big) = 0 ,$$

assurdo. Si può osservare inoltre che $(x \cap x_1)$ e $(x \cap x_2)$ sono separati relativamente ad a; ciò segue infatti da (v) e (i) del Teor. 1.1, tenendo presente che x_1, x_2 sono separati. Da ciò segue che x è sconnesso relativamente ad a, assurdo.

Il teorema che segue trae spunto da un noto fatto topologico, del quale costituisce una generalizzazione.

Teorema 2.4. *Siano* $\mathscr{H} = \langle H, K, I \rangle$, $\mathscr{H}' = \langle H', K', I' \rangle$ *due* AHT, *siano* $a, x \in H$ *e* $a \in H_x$, *sia* $f\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ *un omomorfismo continuo tale che* $f \restriction H_x$ *sia iniettivo. Se* $f(x)$ *è connesso relativamente ad* $f(a)$, *allora* x *è connesso relativamente ad* a.

Dimostrazione. Supponiamo che $\exists x_1, x_2$ separati relativamente ad a tali che $x = x_1 \cup x_2 \cup a$; si vuol dimostrare che $x_1 \leqslant a$ oppure $x_2 \leqslant a$. Si ha

$$f(x) = f(x_1) \cup f(x_2) \cup f(a) ,$$
$$f(x_1) \leqslant f\big(K(x_2)\big) \Rightarrow f\big(I(a)\big) \leqslant K'\big(f(x_2)\big) \Rightarrow I'\big(f(a)\big)$$

e analogamente $f(x_2) \leqslant K'\big(f(x_1)\big) \Rightarrow I'\big(f(a)\big)$; poichè $f(x)$ è connesso relativamente ad $f(a)$ si ha $f(x_1) \leqslant f(a)$ oppure $f(x_2) \leqslant f(a)$, da cui segue, tenendo presente la iniettività di $f \upharpoonright H_x$, $x_1 \leqslant a$ oppure $x_2 \leqslant a$.

Corollario. *Siano $\mathscr{H} = \langle H, K, I \rangle$, $\mathscr{H}' = \langle H', K', I' \rangle$ due* AHT, *sia $a \in H$ e $f: \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ un omomorfismo continuo iniettivo. Se $\mathscr{H}'$ è connessa relativamente ad $f(a)$, allora $\mathscr{H}$ è connessa relativamente ad a.*

3. - Compattezza.

Nelle seguenti definizioni, richiameremo i consueti concetti di ricoprimento, ricoprimento aperto, sottoricoprimento finito.

Definizione 3.1. Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I \rangle$ una AHT, sia $a \in H$ e sia $\mathscr{F}$ una famiglia di elementi di H che ammette supremo (2); si dice che $\mathscr{F}$ è un *ricoprimento di a* se $a \leqslant \bigcup \mathscr{F}$; il ricoprimento $\mathscr{F}$ si dirà *aperto* se gli elementi di $\mathscr{F}$ sono aperti di $\mathscr{H}$; se $\mathscr{F}$ è un ricoprimento di 1 si dirà anche che $\mathscr{F}$ è un *ricoprimento di $\mathscr{H}$*. Si dirà inoltre che da un ricoprimento $\mathscr{F}$ di a è possibile estrarre un *sottoricoprimento finito* se esiste un $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$ tale che $\mathscr{F}_0$ è finito e $a \leqslant \bigcup \mathscr{F}_0$.

Definizione 3.2. Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I \rangle$ una AHT, si dirà che $\mathscr{H}$ è *K-compatta* se vale la seguente condizione:

(i) per ogni famiglia $\mathscr{F}$ di chiusi, che ha la proprietà dell'intersezione finita (PIF) e che ammette infimo, si ha $\bigcap \mathscr{F} \neq 0$ (3);

si dirà che $\mathscr{H}$ è *I-compatta* se vale la seguente condizione:

(ii) da ogni ricoprimento aperto di $\mathscr{H}$ è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.

Si dirà inoltre che un'algebra $\mathscr{H}$ è *compatta* se è K-compatta e I-compatta.

Corollario. *Sia $\mathscr{H} = \langle H, \mathscr{C}, \mathscr{T} \rangle$ una* AHT; *se $\mathscr{C}$, $\mathscr{T}$ sono finiti allora $\mathscr{H}$ è compatta. In particolare se H è finita, $\mathscr{H}$ è compatta.*

---

(2) Nel seguito si indicherà l'infimo di $\mathscr{F}$ con $\bigcap \mathscr{F}$, mentre si indicherà il supremo con $\bigcup \mathscr{F}$.

(3) La (i) può anche essere formulata nel seguente modo:

(i') per ogni famiglia $\mathscr{F}$ di chiusi che ha infimo 0, si può trovare una sottofamiglia finita $\mathscr{F}_0$ tale che $\bigcap \mathscr{F}_0 = 0$.

Lemma 3.1. *Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I \rangle$ una* AHT; *si considerino le seguenti condizioni:*

(i) *H ha un nodo $\alpha \neq 0$ tale che H_α è finita;*

(ii) *H ha un nodo $\alpha \neq 0$ tale che H^α è finita.*

Se H soddisfa (i), *$\mathscr{H}$ è K-compatta, mentre se H soddisfa* (ii), *$\mathscr{H}$ è I-compatta.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{F} = \{c_i\}$ una famiglia di chiusi tale che $\bigcap \mathscr{F} = 0$. Posto allora $\mathscr{F}_\alpha = \{c_i | c_i \leqslant \alpha\}$ cioè $H_\alpha \cap \mathscr{F}$, si ha $\bigcap \mathscr{F}_\alpha = 0$, giacchè $\mathscr{F}_\alpha \neq \emptyset$; l'asserto segue tenendo presente che $\mathscr{F}_\alpha$ è finita. L'altra affermazione si dimostra dualmente.

Come noto nel caso booleano le condizioni (i) ed (ii) della Def. 3.2 sono equivalenti; nel caso heytingiano si osserva che esistono AHT K-compatte e non I-compatte e viceversa; esempi di AHT K-compatte e non I-compatte si possono trovare considerando delle AHT aventi la topologia discreta, soddisfacenti (i) del Lemma 3.1 e aventi un nodo β tale che H_β è isomorfa ad un segmento chiuso della retta reale; dualmente si possono trovare esempi di algebre I-compatte ma non K-compatte.

Ci si pone ora il problema di vedere sotto quali condizioni un'algebra I-compatta è K-compatta e viceversa. Se tentiamo di estendere al caso heytingiano una nota dimostrazione booleana, si può osservare che in entrambe le implicazioni servono due condizioni: un legame fra supremi e infimi e un legame fra operatori topologici; precisamente nella prima implicazione serve $-\bigcap = \bigcup -$ e $-K = I-$, nella seconda implicazione serve $\bigcap - = - \bigcup$ e $K- = -I$. In generale nelle AHT vale una sola delle due condizioni richieste contemporaneamente; si ha quindi il seguente teorema:

Teorema 3.1. *Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I \rangle$ una* AHT, *si considerino le due seguenti condizioni:*

(i) $-\bigcap\limits_{i \in \mathscr{I}} \{x_i\} = \bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} \{-x_i\}$, *per ogni famiglia* $\{x_i\}_{i \in \mathscr{I}}$;

(ii) $K(-x) = -I(x)$, *per ogni* $x \in H$.

Se $\mathscr{H}$ è I-compatta e in essa vale (i), *allora $\mathscr{H}$ è compatta; se $\mathscr{H}$ è K-compatta e in essa vale* (ii), *allora $\mathscr{H}$ è compatta.*

Osservazione. Si possono costruire semplici esempi di AHT (finite e quindi) compatte in cui non valgono rispettivamente (i) e (ii); cioè tali condizioni non sono necessarie. Si osservi che una classe di algebre (non di Boole) in cui vale (i) è quella delle algebre aventi un nodo α tale che H_α è una catena finita; mentre una classe di AHT in cui vale (ii) è costituita dalle algebre I-discrete i cui elementi diversi dallo 0 sono densi.

Definizione 3.3. Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I\rangle$ una AHT, sia $a \in H$; si dice che a è *K-compatto* se vale la seguente condizione:

(i) per ogni famiglia di chiusi $\mathscr{F}$ tale che, $\mathscr{F} \cup \{a\}$ ammette infimo e ha la PIF, $\bigcap (\mathscr{F} \cup \{a\}) \neq 0$;

si dice invece che a è *I-compatto* se vale la seguente condizione:

(ii) da ogni ricoprimento aperto di a è possibile estrarre un sottoricoprimento finito;

si dice che a è *compatto* se è K-compatto e I-compatto.

Lemma 3.2. *$\mathscr{H}_a$ è K-compatta sse a è K-compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{F} = \{c_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ una famiglia di chiusi di $\mathscr{H}$ tale che $\bigcap (\mathscr{F} \cup \{a\}) = 0$. Posto allora $\mathscr{F}_a = \{c_i \cap a\}_{i\in\mathscr{I}}$, si ha, per una nota proprietà reticolare, che $\bigcap (\mathscr{F}_a \cup \{a\}) = 0$ da cui, osservando che $\bigcap (\mathscr{F}_a \cup \{a\}) = \bigcap \mathscr{F}_a$, si ha $\bigcap \mathscr{F}_a = 0$. Poichè $c_i \cap a$ è un chiuso di $\mathscr{H}_a$ e $\mathscr{H}_a$ è K-compatta, si ha che esiste un insieme finito $\mathscr{I}_0 \subseteq \mathscr{I}$ tale che $0 = \bigcap_{i\in\mathscr{I}_0} (c_i \cap a)$; da ciò segue $0 = \bigcap (\{c_i\}_{i\in\mathscr{I}_0} \cup \{a\})$ e quindi che a è K-compatto. Viceversa, sia $\mathscr{G} = \{b_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ una famiglia di chiusi di $\mathscr{H}_a$ tale che $0 = \bigcap \mathscr{G}$; da una nota proprietà delle AHT (cfr. teor. 3.1 di [2]) si ha che esiste un chiuso c_i di $\mathscr{H}$ tale che $b_i = c_i \cap a$, da cui $0 = \bigcap_{i\in\mathscr{I}} (c_i \cap a)$. Poichè vale $\bigcap_{i\in\mathscr{I}} (c_i \cap a) = \bigcap (\{c_i\}_{i\in\mathscr{I}} \cup \{a\})$ e a è K-compatto, si ha che esiste un insieme finito $\mathscr{I}_0 \subseteq \mathscr{I}$ tale che $0 = \bigcap (\{c_i\}_{i\in\mathscr{I}_0} \cup \{a\})$, cioè $0 = \bigcap_{i\in\mathscr{I}_0} b_i$ e quindi $\mathscr{H}_a$ è K-compatta.

L'affermazione duale in generale non vale: più precisamente vale solo una delle due implicazioni; nel Lemma seguente diamo una condizione sufficiente perchè valga anche l'altra.

Lemma 3.3. *Se $\mathscr{H}_a$ è I-compatta allora a è I-compatto. Se a è I-compatto e ogni famiglia di aperti ha supremo, allora $\mathscr{H}_a$ è I-compatta.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{F} = \{a_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ una famiglia di aperti di $\mathscr{H}$ tale che $a \leqslant \bigcup \mathscr{F}$; si ha $a = a \cap \bigcup \mathscr{F}$ e, da una nota proprietà delle algebre di Heyting,

$a = \bigcup_{i \in \mathscr{I}} (a \cap a_i)$. Poichè $a \cap a_i$ è un aperto di $\mathscr{H}_a$ e $\mathscr{H}_a$ è I-compatta, esiste un insieme finito $\mathscr{I}_0 \subseteq \mathscr{I}$ tale che $a = \bigcup_{i \in \mathscr{I}_0} (a \cap a_i)$, da cui $a \leqslant \bigcup_{i \in \mathscr{I}_0} a_i$ e quindi a è I-compatto. Viceversa sia $\mathscr{G} = \{b_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ una famiglia di aperti di $\mathscr{H}_a$ tali che $a = \bigcup \mathscr{G}$; da una nota proprietà delle AHT (cfr. teor. 5.1 di [**2**]) si ha che esiste un aperto a_i di $\mathscr{H}$ tale che $b_i = a \cap a_i$, e quindi $a = \bigcup_{i \in \mathscr{I}} (a \cap a_i)$. Poichè gli a_i sono aperti di $\mathscr{H}$, $\bigcup_{i \in \mathscr{I}} a_i$ esiste ed inoltre si ha $a \leqslant \bigcup_{i \in \mathscr{I}} a_i$. Tenendo presente che a è I-compatto si ha che esiste un insieme finito $\mathscr{I}_0 \subseteq \mathscr{I}$ tale che $a \leqslant \bigcup_{i \in \mathscr{I}_0} a_i$, da cui segue $a = a \cap \bigcup_{i \in \mathscr{I}_0} a_i = \bigcup_{i \in \mathscr{I}_0} (a \cap a_i) = \bigcup_{i \in \mathscr{I}_0} b_i$ cioè $\mathscr{H}_a$ è I-compatta.

Si pone ora il problema di estendere al caso heytingiano il seguente ben noto risultato delle ABT: se x è un elemento chiuso di una ABT compatta, x è compatto. Si osserva che tale proposizione si estende alle AHT nel caso della K-compattezza (cfr. Teor. 3.2), mentre semplici esempi mostrano che esso non vale nel caso della I-compattezza; il Teor. 3.3 dà una condizione sufficiente perchè esso valga anche in questo secondo caso.

Teorema 3.2. *Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I \rangle$ una* AHT, *se a è chiuso e $\mathscr{H}$ è K-compatta, allora a è K-compatto.*

Dimostrazione. Per il Lemma 3.2 è sufficiente dimostrare che $\mathscr{H}_a$ è K-compatta; ma ciò segue direttamente tenendo presente che i chiusi di $\mathscr{H}_a$ sono anche chiusi di $\mathscr{H}$ e che $\mathscr{H}$ è K-compatta.

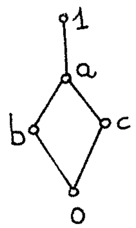
Teorema 3.3. *Sia $\mathscr{H} = \langle H, K, I \rangle$ una* AHT *I-compatta, $a \in H$ chiuso. Supponiamo che per ogni ricorprimento aperto $\{b_i\}$ di a si abbia*

$$\bigcup (a \Rightarrow b_i) = 1; \tag{4}$$

allora a è I-compatto.

Dimostrazione. Sia $\mathscr{F} = \{f_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ un ricoprimento aperto di a, quindi $a \leqslant \bigcup_{i \in \mathscr{I}} f_i$; allora si ha, tenendo presente la (4), $1 = \bigcup_{i \in \mathscr{I}} (a \Rightarrow f_i) = \bigcup_{i \in \mathscr{I}} I(a \Rightarrow f_i)$. Poichè $\mathscr{H}$ è I-compatta, esiste un insieme finito $\mathscr{I}_0 \subseteq \mathscr{I}$ tale che $1 = \bigcup_{i \in \mathscr{I}_0} (a \Rightarrow f_i)$; quindi $1 \leqslant a \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathscr{I}_0} f_i$, da cui $a \leqslant \bigcup_{i \in \mathscr{I}_0} f_i$.

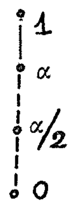
Osservazione. La condizione (4) non è necessaria, come mostra il seguente esempio di algebra di Heyting in cui si mette la topologia discreta



Si ha ovviamente che l'algebra è compatta, a è I-compatto mentre

$$a \Rightarrow (b \cup c) = 1 \neq (a \Rightarrow b) \cup (a \Rightarrow c) = a .$$

Una classe di algebre di Heyting in cui invece vale (4) è costituita dalle catene finite o discrete. Si può osservare però che gli elementi di ogni algebra di questa classe sono algebricamente compatti, cioè compatti nella topologia discreta. Si noti tuttavia che (4) non implica necessariamente una tale proprietà per gli elementi dell'algebra; a tale scopo basta considerare il prodotto cartesiano dell'algebra **4**, dotata della topologia discreta, con la seguente AHT



$$\mathscr{T} = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant \alpha/2\} \cup \{1\} ,$$

$$\mathscr{C} = \{0, \alpha, 1\} ,$$

dove la catena $(0, \alpha)$ è un intervallo razionale. L'elemento $a = \langle \alpha, 1 \rangle$ infatti è compatto ma non algebricamente compatto.

Bibliografia.

[1] R. Balbes and A. Horn, *Injective and projective Heyting algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **148** (1970), 549-559.

[2] C. Luppi, *Algebre di Heyting topologiche*, Matematiche (Catania) (in corso di pubblicazione).

[3] J. C. C. McKinsey and A. Tarski, *The algebra of topology*, Ann. of Math. (2) **45** (1944), 141-191.

[4] H. Rasiowa and R. Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics*, Warsaw 1963.

[5] M. Servi, *Algebre di Fréchet: Una classe di algebre booleane con operatore*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **14** (1965), 335-366.

[6] R. Sikorski, *Closure algebras*, Fund. Math. **36** (1949), 165-206.

[7] M. Ward, *The closure operators of a lattice*, Ann. of Math. (2) **43** (1942), 191-196.

Summary.

We further investigate topological Heyting algebras (introduced in [**2**]) *giving and studying the notions of connection, relative-connection and compactness.*

* * *