Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 255-265

ENZO BARONE (*)

Un modello matematico di traffico automobilistico con «mollificatore». (**)

1. - Posizioni e problema.

Nel seguito $x \in \boldsymbol{R} =]-\infty, +\infty[$; $v, w \in]v_1, v_2[= V$; $0 \leqslant v_1 < v_2 < +\infty$. In questo lavoro si studia il problema

$$(1) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + v\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u + \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{w-v}{T}\,u\right) = F(u) & (x \in \boldsymbol{R};\ v, w \in V;\ t > 0)\,, \\ u(x, v, w;\ 0) = u_0(x, v, w) & (x \in \boldsymbol{R};\ v, w \in \overline{V})\,, \\ u(x, v, w;\ t) = 0 & (x \in \boldsymbol{R};\ v \notin V;\ w \in \overline{V};\ t \geqslant 0)\,, \end{cases}$$

dove, se $f = f(x, v, w)$, è

$$(2) \qquad F(f) = K_1(f) - K_2(f)\,,$$

$$(3a) \qquad K_1(f) = \int_x^{+\infty} q(x, x')\,\mathrm{d}x' \int_{V_1}^{V_2} f(x', v, w')\,\mathrm{d}w' \int_V^{V_2} (v' - v) f(x, v', w)\,\mathrm{d}v',$$

$$(3b) \qquad K_2(f) = f(x, v, w) \int_x^{+\infty} q(x, x')\,\mathrm{d}x' \int_{V_1}^{V} (v - v')\,\mathrm{d}v' \int_{V_1}^{V_2} f(x', v', w')\,\mathrm{d}w'\,.$$

Le costanti v_1, v_2 e $T > 0$ sono assegnate.

Si suppone inoltre che

$$(4) \qquad q(x, x') = q^0(x) K(x' - x) \qquad (x \in \boldsymbol{R}\,,\ x' > x)\,,$$

(*) Indirizzo: Ist. Mat., Università, Via Arnesano, 73100 Lecce, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 2-V-1977.

dove

$$0 \leqslant q^0(x) \leqslant 1 \qquad (x \in \boldsymbol{R}), \tag{4a}$$

$$0 \leqslant K(\xi) \leqslant M \qquad (\xi \geqslant 0), \tag{4b}$$

$$\int_0^{+\infty} K(\xi)\, \mathrm{d}\xi = 1 . \tag{4c}$$

Qui la probabilità di interazione $q^0(x)$ e la densità della probabilità di interazione normalizzata $K(\xi)$ sono assegnate.

Il problema (1) è la rappresentazione matematica di un modello tipo-Boltzmann, per il traffico su un'autostrada.

Precedentemente sono stati fatti dei lavori matematici (cfr. [**2**] e [**3**]) su un'equazione strettamente legata all'equazione (1) e proposta da Paveri-Fontana in [**8**]$_1$. Precisamente, l'equazione in [**2**], [**3**] e [**8**]$_1$ può essere vista come un caso particolare di quella in (1) e si ottiene da quest'ultima ponendo $K(\xi) = \delta(\xi)$ (delta di Dirac). Esponiamo brevemente come si giunge al problema (1).

In un'autostrada a più corsie si prende in considerazione il traffico che si muove in una certa direzione e si denota con $u(x, v, w; t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}w$ il (valore atteso del) numero di veicoli che al tempo t sono situati nell'intervallo $(x, x + \mathrm{d}x)$ con velocità in $(v, v + \mathrm{d}v)$ ed i cui guidatori hanno velocità desiderata in $(w, w + \mathrm{d}w)$.

Muovendosi lungo l'autostrada i veicoli possono *interagire* fra loro (nel senso che un veicolo più veloce deve rallentare quando ne incontra uno più lento e non può sorpassarlo) e possono subire un processo di *rilassamento*, (con questo termine intendiamo riferirci all'accelerazione dei veicoli verso la velocità desiderata dai loro guidatori).

Introduciamo le seguenti ipotesi semplificative:

1.1. *Rilassamento.* Tutti i veicoli che si muovono alla velocità v che differisce da quella desiderata w, accelerano verso quest'ultima con legge « esponenziale »

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{w - v}{T}$$

1.2. *Interazione.* (a) Un veicolo che si muove con velocità v_1 e ne incontra uno con velocità $v_2 < v_1$ o sorpassa (con probabilità $1 - q^0$) cambiando corsia oppure rallenta (con probabilità q^0) a v_2 *istantaneamente* (ovvero in un tempo trascurabile rispetto al tempo medio di permanenza sull'autostrada).

(b) L'evento di rallentamento (la cui durata è istantanea) può avvenire a diverse distanze fra i veicoli interagenti. Precisamente si suppone che $K(\xi)\,d\xi$ sia la probabilità che l'interazione avvenga quando la distanza tra due veicoli è in $(\xi, \xi + d\xi)$ (ed, evidentemente, non ci sia sorpasso). Queste ipotesi motivano (4a)-(4c).

1.3. *Recupero.* Immediatamente dopo l'« interazione », il veicolo rallentato può iniziare un processo di « rilassamento »: precisamente, accelera verso la velocità desiderata.

Sotto queste ipotesi per un'autostrada infinita senza entrate e uscite, si ottiene il problema (1).

La metodologia per ottenere l'equazione del traffico tipo-Boltzmann, si può trovare in [**8**]$_1$ o in [**6**]. [**6**] contiene una discussione dettagliata dell'ipotesi I.3. Ulteriori discussioni sulle proprietà del modello qui studiato si possono trovare in [**8**]$_2$.

Come già detto, nel modello introdotto in [**8**]$_1$ si suppone $K(\xi) = \delta(\xi)$; questo significa che l'ipotesi I.2 (b) è sostituita dall'ipotesi che, nel momento dell'interazione i due veicoli (interagenti) sono nella stessa posizione (distanza zero).

Poichè nel modello qui trattato i veicoli possono interagire con una probabilità funzione della distanza, riteniamo di poter dire che questo modello è in qualche modo più generale di quello introdotto in [**8**]$_1$.

In [**2**] si è studiato il problema di Cauchy per il modello del riferimento [**8**]$_1$, con u appartenente allo spazio delle funzioni uniformemente continue e limitate e si è provato un teorema di esistenza e unicità locale. Una generalizzazione di questi risultati (per esempio lo studio in uno spazio meno restrittivo oppure la prova di un'esistenza globale della soluzione) appare difficile. In [**4**] omettendo la variabile spaziale x si riesce a studiare il problema nello spazio L^1 delle funzioni sommabili e si ottiene anche l'esistenza ed unicità globale.

In questo lavoro, l'introduzione del nucleo non singolare $K(\xi)$ « mollificatore » ci permette di ottenere un teorema di esistenza e unicità globale (cioè per $t \in [0, +\infty])$ per $u \in L^1$. Sottolineiamo il fatto che L^1 è, dal punto di vista fisico del problema, lo spazio più naturale per la ricerca della soluzione. Infatti dire che al tempo t risulta $u(t) \in L^1$, vuol dire che in quell'istante la popolazione dei veicoli sull'autostrada è finita. Come in [**2**] e [**3**] anche qui si prova che se $u_0 \geqslant 0$, anche la soluzione u è positiva. Desideriamo inoltre far notare che la presenza del « mollificatore » $K(\xi)$ non modifica la forma del problema spazialmente omogeneo che è indipendente dalla variabile di posizione (cfr. equazione (86) in [**8**]$_1$). Infine segnaliamo che nella letteratura sulle teorie di

Boltzmann, un « mollificatore » non singolare della variabile spaziale è stato introdotto da D. Morgenstern in [7], per la dinamica dei gas rarefatti.

Sostituendo in (1) $F(u)$ con una funzione nota $\Phi = \Phi(x, v, w; t)$ ed usando il metodo delle caratteristiche si ottiene

$$(5)\qquad u(x, v, w; t) = \exp\frac{t}{T}\, u_0(\bar{x}(t), \bar{v}(t), w) + \\ + \int_0^t \exp\frac{t-s}{T}\, \Phi(\bar{x}(t-s), \bar{v}(t-s), w; s)\, \mathrm{d}s,$$

dove

$$(6a)\qquad \bar{x}(t) = \bar{x}(x, v, w; t) = x - wt + (w-v)T\left(\exp\frac{t}{T} - 1\right),$$

$$(6b)\qquad \bar{v}(t) = \bar{v}(v, w; t) = w - (w-v)\exp\frac{t}{T}.$$

Come in [2] poniamo

$$(7)\qquad [Z(t)g](x, v, w) = \exp\frac{t}{T}\, g(\bar{x}(t), \bar{v}(t), w) \qquad (t \in \boldsymbol{R}),$$

ma questa volta consideriamo $Z(t)$ come operatore definito sullo spazio $X = \{g = g(x, v, w);\ g \in L^1(R \times R \times \bar{V})\}$. Ancora denotiamo con $X_0 = \{g;\ g \in X,\ g(x, v, w) = 0$ q.o., se $v \notin V\}$. X_0 è un sottospazio chiuso di X ed è usato per ottenere la terza relazione di (1). Si prova subito

Lemma 1. (a) $\{Z(t);\ t \in \boldsymbol{R}\} \subset \mathscr{B}(X)$ *l'algebra di Banach degli operatori lineari e limitati su* X; (b) $\|Z(t)f\| = \|f\|$, $\forall f \in X$; (c) $\{Z(t);\ t \in \boldsymbol{R}\}$ *è un gruppo, cioè*: $Z(0) = I$, $Z(t)Z(s) = Z(t+s)$, $\forall t, s \in \boldsymbol{R}$.

Dim. Tenuto conto che il determinante Jacobiano $\partial(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w})/\partial(x, v, w) = \exp[t/T]$, risulta

$$\|Z(t)f\| = \exp\frac{t}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v\int_{V_1}^{V_2}|f(\bar{x}, \bar{v}, w)|\,\mathrm{d}w$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\bar{x}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\bar{v}\int_{V_1}^{V_2}|f(\bar{x}, \bar{v}, w)|\,\mathrm{d}w = \|f\|.$$

La (a) e (c) sono immediate.

2. - L'operatore $Z_0(t)$.

Sia $Z_0(t)$ la restrizione di $Z(t)$ allo spazio di Banach X_0. Come in [**2**] si vede facilmente che $Z(t)$ trasforma X_0 in sè $\forall t \geqslant 0$ e quindi $Z_0(t)$ può essere considerato come un operatore da X_0 in X_0 $(t \geqslant 0)$.

Abbiamo

Lemma 2. (a) $\{Z_0(t), t \geqslant 0\} \subset \mathscr{B}(X_0)$ *ed è un semigruppo*; (b) $\|Z_0(t)g\| = \|g\|$, $\forall g \in X_0$; (c) $Z_0(t)$ *è fortemente continuo in* t, $\forall t \geqslant 0$.

Dim. La (a) e (b) discendono dal Lemma 1. Per la (c) basta provare che $\lim \|Z_0(h)g - g\| = 0$ quando $h \to 0_+$, $\forall g \in X_0$, perchè $Z_0(t)$ è un semigruppo. Ora basta osservare che quando $h \to 0_+$ risulta $\bar{x}(h) \to x$, $\bar{v}(h) \to v$ pertanto $\|Z_0(h)g - g\| \to 0$ per la continuità in media d'ordine $p = 1$.

Se denotiamo con A_0 il generatore infinitesimale di $Z_0(t)$ (cfr. [**1**]-[**5**]$_1$). risulta A_0 un operatore lineare densamente definito, chiuso e tale che

$$\lim_{h \to 0_+} \left\| \frac{1}{h} [Z_0(h)g - g] - A_0 g \right\| = 0 \qquad \forall g \in D(A_0) \subset X_0 . \tag{8}$$

Definiamo l'operatore A_1 come segue

$$\begin{cases} A_1 g = -v g_x - \dfrac{w-v}{T} g_0 + \dfrac{1}{T} g , \\[2ex] D(A_1) = \left\{ g \in X_0 ; \exists g_x, g_v, v g_x + \dfrac{w-v}{T} g_v \in X_0 \right\} , \end{cases} \tag{9}$$

dove $g_x = \partial g / \partial x$, $g_v = \partial g / \partial v$ sono derivate generalizzate.

È facile provare che $\forall g \in D(A_1)$ risulta

$$\lim_{h \to 0+} \left\| \frac{1}{h} [Z_0(h)g - g] - A_1 g \right\| = 0 , \tag{10}$$

pertanto A_1 è la restrizione di A_0 all'insieme $D(A_1) \subset D(A_0)$.

Come conseguenza A_1 è chiudibile e la sua chiusura $\bar{A}_1$ è contenuta in A_0. Osserviamo ancora che $Z_0(t)$ trasforma $D(A_1)$ in sè. Infatti se $g \in D(A_1)$ e poniamo $f = Z_0(t) g$ risulta

$$v f_x + \frac{w-v}{T} f_v = \exp \frac{t}{T} \left\{ \bar{v} g_x(\bar{x}, \bar{v}, w) + \frac{w - \bar{v}}{T} g_v(\bar{x}, \bar{v}, w) \right\} .$$

Possiamo allora riunire i risultati precedenti con il seguente

Teorema 1. *La famiglia* $\{Z_0(t), t \geqslant 0\}$ *è un semigruppo fortemente continuo di operatori lineari e limitati in* X_0: $Z_0(t)[D(A_1)] \subset D(A_1)$, *dove* A_1 *è la restrizione del generatore di* $Z_0(t)$ *all'insieme* $D(A_1)$.

3. - L'operatore non lineare $F(u)$.

Dalla definizione segue facilmente che K_1 e K_2 trasformano X_0 in sè e inoltre risulta

$$\|K_i(u)\| \leqslant \delta \|u\|^2 , \qquad i = 1, 2 , \; u \in X_0 , \; \delta = (v_2 - v_1) M . \tag{11}$$

Dalla (2) segue che

$$\|F(u)\| \leqslant 2\delta \|u\|^2 \qquad (u \in X_0) \tag{12}$$

e dalle (3) e (2)

$$\|K_i(f) - K_i(g)\| \leqslant \delta(\|f\| + \|g\|) \|f - g\| \qquad (f, g \in X_0) , \tag{13}$$

$$\|F(f) - F(g)\| \leqslant 2\delta(\|f\| + \|g\|) \|f - g\| \qquad (f, g \in X_0) . \tag{14}$$

Nel seguito useremo anche il seguente funzionale

$$Jf = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{V_1}^{V_2} f(x, v, w)\, dw \qquad (f \in X) . \tag{15}$$

Dalla definizione segue che

$$|Jf| \leqslant \|f\| \qquad \text{e quindi} \quad J \in X^* = \mathscr{B}(X; \mathbf{R}) , \tag{16}$$

$$JZ_0(t) f = Jf \qquad (f \in X_0 , \; t \geqslant 0) , \tag{17}$$

$$JF(f) = 0 \qquad (f \in X_0) . \tag{18}$$

4. - Il problema astratto.

I risultati delle sezioni precedenti e la forma del sistema (1) suggeriscono di studiare il seguente problema dei valori iniziali astratto (cfr. [**1**], pag. 30, [**5**]$_1$, pag. 486, [**5**]$_2$)

$$(19) \qquad \frac{du}{dt} = A_0 u(t) + F(u(t)) \,, \qquad \lim_{t \to 0+} u(t) = u_0 \in D(A_0) \qquad (t > 0) \,,$$

dove ora $u(t)$ è una trasformazione da $[0, +\infty)$ in X_0 e d/dt è una derivata forte.

Con un procedimento « standard » (cfr. [**5**]$_2$, [**9**]), trasformiamo formalmente il nostro problema astratto nella seguente equazione integrale

$$(20) \qquad u(t) = u_1(t) + \int_0^t Z_0(t-s) F(u(s))\, ds \qquad (t > 0) \,,$$

dove

$$(21) \qquad u_1(t) = Z_0(t)\, u_0 \,, \qquad \|u_1(t)\| = \|u_0\| \qquad \text{(cfr. Lemma (1))}$$

e dove l'integrale è nel senso di Riemann.

Si ha il seguente

Teorema 2. *Se $\bar{t}$ è un conveniente valore di t, l'equazione* (20) *ammette un'unica soluzione* $u \in S_1 = S(u_1, r)$ *sfera chiusa di centro* u_1 *e raggio* r *in* $Y = C([0, \bar{t}], X_0)$ *con la norma* $\|u\|_y = \max\{\|u(t)\|;\, t \in [0, \bar{t}]\}$.

Dim. Definiamo il seguente operatore non lineare su Y

$$(22) \qquad [Q(u)](t) = u_1(t) + \int_0^t Z_0(t-s) F(u(s))\, ds \,, \qquad D(Q) = Y \,.$$

Se $u \in S_1$ risulta $\|u(t)\| \leqslant \|u\|_y \leqslant \|u_1\|_y + r = \|u_0\| + r$, conseguentemente se u, $\hat{u} \in S_1$ risulta

$$(23) \qquad \|Q(u) - Q(\hat{u})\|_y \leqslant c(\bar{t}) \|u - \hat{u}\|_y \,,$$

$$(24) \qquad \|Q(u) - u_1\|_y \leqslant c(\bar{t})\, r \,,$$

dove

$$(25) \qquad c(\bar{t}) = 4\delta\bar{t}(\|u_0\| + r)^2/r \,.$$

Se scegliamo $\bar{t}$ in modo che sia $0 < c(\bar{t}) < 1$ le (23) e (24) mostrano che Q trasforma S_1 in sè ed è strettamente contrattiva.

Si conclude che se $\bar{t}$ è scelto sufficientemente piccolo, l'equazione $u = Q(u)$, cioè la (20) ammette un'unica soluzione $u \in S_1 \subset Y$, c.v.d..

Notiamo che, poichè $F(f)$ ha derivata di Frechét $F'(t)$ continua (cfr. [**9**]) la soluzione u di (20) è anche soluzione di (19) non appena sia $u_0 \in D(A_0)$ e quindi si ha il seguente

Teorema 3. *Il problema* (19) *ha un'unica soluzione forte* $u = u(t)$, $t \in [0, \bar{t}]$ *non appena sia* $u_0 \in D(A_0)$.

5. - Positività di $u = u(t)$.

Proveremo che la soluzione di (19) è positiva, non appena lo è $u_0 \in D(A_0)$. A tal fine introduciamo i seguenti coni positivi chiusi

$$X_0^+ = \{f\colon f \in X_0,\ f(x; v, w) \geqslant 0 \ \ \forall (x, v, w) \in R \times \bar{V} \times \bar{V}\},$$

$$Y_0^+ = \{u\colon u \in Y_0,\ u(t) \in X_0^+ \ \ \forall t \in [0, \bar{t}]\}.$$

Anche qui, come in [**2**] e [**3**] si osserva che $Z_0(t)[X_0^+] \subset X_0^+$ (cfr. (7)), ma F non trasforma X_0^+ in sè. Trasformiamo allora il problema (19) come segue

$$\frac{du}{dt} = A_1 u(t) + F_1(u(t)), \qquad \lim_{t \to 0+} u(t) = u_0, \tag{26}$$

dove

$$A_1 = A_0 - aI, \qquad D(A_1) = D(A_0), \qquad F_1 = F + aI, \tag{27}$$

con

$$a = \delta(\|u_0\| + r). \tag{28}$$

Osserviamo che poichè aI commuta con A_0, A_1 genera il semigruppo

$$Z_1(t) = \exp[-at]Z_0(t), \qquad \|Z_1(t)f\| = \exp[-at]\|f\| \tag{29}$$

e che $Z_1(t)[X_0^+] \subset X_0^+$, $\forall t \geqslant 0$.

Poichè i problemi (19) e (20) sono equivalenti, $u(t)$ soluzione di (19), è anche soluzione di (26) e verifica l'equazione integrale

$$u(t) = u_2(t) + \int_0^t Z_1(t-s)F_1(u(s))\,ds \qquad t \in [0, \bar{t}], \tag{30}$$

dove

$$u_2(t) = Z_1(t)\,u_0 = \exp[-at]\,Z_0(t)\,u_0 . \tag{31}$$

Se ora l'operatore

$$Q_1(\hat{u})(t) = u_2(t) + \int_0^t z_1(t-s)F_1(\hat{u}(s))\,ds, \qquad D(Q_1) = Y, \tag{32}$$

suggerito dalla (30) è contrattive e se F_1 trasforma Y_0^+ in Y_0^+ almeno in un opportuno intorno di u_2, potendosi ottenere u col procedimento delle approssimazioni successive, si ha che se $u_0 \in X_0^+$ anche $u \in Y_0^+$.

Consideriamo quindi $S_2 = S(u_2; r) = \{\hat{u} : \hat{u} \in Y_0;\ \|\hat{u} - u_2\|_y \in r\}$.

Poichè dalla (3a) segue che K_1 trasforma Y_0^+ in Y_0^+, basterà provare che a $I - K_2$ trasforma $S_2 \cap Y_0^+$ in Y_0^+. Infatti se $f \in X_0^+$ risulta $K_2(f) \leqslant \delta\|f\|f$ e quindi $(aI - K_2)f \geqslant f(a - \delta\|f\|) \geqslant 0$ non appena sia anche $\|f\| \leqslant a/\delta = \|u_0\| + r$. Ora se $\hat{u} \in S_2 \cap Y_0^+$ risulta $\|\hat{u}(t)\| \leqslant \|u_2\|_y + r \leqslant \|u_0\| + r$ e quindi $(aI - K_2)\cdot \hat{u}(t) \in X_0^+$, $\forall t \in [0, \bar{t}]$. Si conclude che $F_1(\hat{u}(t)) \in X_0^+$.

Poichè K_2 trasforma X_0^+ in X_0^+ risulta: $0 \leqslant (aI - K_2)\,\hat{u}(t) \leqslant a\hat{u}(t)$ e quindi

$$\|(aI - K_2)\,\hat{u}\|_y \leqslant a\|\hat{u}\|_y . \tag{33}$$

Dalla (33) segue che

$$\|F_1(\hat{u})\|_y \leqslant \|K_1(\hat{u})\|_y + \|(aI - K_2)\,\hat{u}\|_y \leqslant \delta\|\hat{u}\|_y^2 + a\|\hat{u}\|_y \leqslant 2a\|\hat{u}\|_y$$

e poi (cfr. (25))

$$\|Q_1(\hat{u}) - u_2\|_y \leqslant c(\bar{t})\cdot r . \tag{34}$$

Analogamente si prova che se $\hat{u}$, $\hat{u}' \in S_2$, $\hat{u} \in Y_0^+$ risulta

$$\|Q_1(\hat{u}) - Q_1(\hat{u}')\| \leqslant 4a\bar{t}\|\hat{u} - \hat{u}'\|_y \leqslant c(\bar{t})\|\hat{u} - \hat{u}'\|_y \tag{35}$$

e quindi Q_1 è contrattiva (cfr. n. 4).

Si conclude quindi col seguente

Teorema 4. *Il problema* (19) *ha un'unica soluzione forte* $u = u(t) \in X_0^+$ $\forall t \in [0, \bar{t}]$ *non appena sia* $u_0 \in D(A_0) \cap X_0^+ = D_0^+$, *ove* $\bar{t}$ *è lo stesso del Teorema* 3.

6. - Soluzione globale.

Applicando il funzionale J ad entrambi i membri della (20) ed usando le (17), (18), (21) si ottiene

$$Ju(t) = Ju_0\,, \qquad \forall t \in [0, \bar{t}]\,. \tag{36}$$

Se ora $u_0 \in D_0^+$ poichè $u(t) \in X_0^+$ dalla (36) segue che

$$\|u(t)\| = \|u_0\|\,, \qquad \forall t \in [0, \bar{t}]\,, \tag{37}$$

in quanto $Ju = \|u\|$ per $u \in X_0^+$.

La (37) ci dice che il numero di macchine sull'autostrada si conserva (come è auspicabile).

L'invarianza della norma ci consente, com'è noto, di estendere la soluzione a tutto $[0, +\infty)$; infatti per il problema di Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = A_0 u(t) + F(u(t)) \qquad (t > \bar{t})\,, \qquad \lim_{t \to \bar{t}_+} u(t) = u(\bar{t})\,,$$

valgono gli stessi risultati visti per (19), essendo $\|u(\bar{t})\| = \|u_0\|$ e quindi esiste un'unica soluzione forte in $[\bar{t}, 2\bar{t}]$. (Basta eseguire la trasformazione $t' = t - \bar{t}$, $\hat{u}(t') = u(t' + \bar{t}) = u(t)$).

Per induzione si ha quindi il seguente

Teorema principale. *Se* $u_0 \in D_0^+$ *il sistema* (19) *ha un'unica soluzione forte* $u = u(t)$, $\forall t \geq 0$ *e risulta* $u(t) \in D_0^+$ *con* $\|u(t)\| = \|u_0\|$, $\forall t \geq 0$.

Desidero ringraziare il Prof. Stefano Paveri-Fontana per il contributo datomi nel commento fisico del lavoro.

Bibliografia.

[1] V. Barbu, *Non linear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Nordhoff International Publishing, Leyden 1976.

[2] E. Barone and A. Belleni-Morante, *A non linear initial-value problem arising from kinetic theory of vehicular traffic* (in corso di pubblicazione).

[3] A. Belleni-Morante and G. Frosali, *Global solution of a non linear initial value problem of vehicular traffic*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **14** A (1977), 71-81.

[4] P. L. Butzer and H. Berens, *Semigroups of operators and approximation*, Springer, New York 1967.

[5] T. KATO: [•]$_1$ *Perturbation theory for linear operators*, Springer, New York 1966; [•]$_2$ *Non linear evolution equations in Banach spaces*, Proc. Symp. Appl. Math. **17** (1965), 50-67.

[6] M. LAMPIS, *On the kinetic equations for traffic flow* (in corso di pubblicazione).

[7] D. MORGENSTERN, *Analytical studies to the Maxwell-Boltzmann equation*, J. Rational Mech. Anal. **4** (1955), 533-555.

[8] S. PAVERI-FONTANA: [•]$_1$ *On Boltzmann-like treatments for traffic flow: a critical review of the basic model and an alternative proposal for diluite traffic analysis*, Transpn. Res. **9** (1975), 225-235; [•]$_2$ *A modified Boltzmann-like model for traffic flow*, rapporto interno dell'Istituto di Meccanica Razionale di Bari, 1976.

[9] I. SEGAL, *Non linear semigroups*, Ann. of Math. **78** (1963), 339-364.

Summary.

We prove that an abstract non linear initial-value problem arising from a mollified version of the Paveri-Fontana model for traffic flow, has a unique strong and norm invariant solution $u = u(t)$. The solution belongs to the positive cone of a suitable Banach space.

* * *