Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 177-187

FRANCESCA ROLANDI e ANNA ZARETTI (*)

Su una disequazione di evoluzione con termine dissipativo discontinuo. (**)

1. – Sia V uno spazio di Hilbert e V' il suo duale. Indichiamo con $\| \ \|$ la norma in V, con $\| \ \|_*$ la norma in V' e con $\langle , \rangle$ la dualità tra V e V'. Sia inoltre H uno spazio di Hilbert identificato con il suo duale per il prodotto scalare $(\cdot)$ e sia $| \ |$ la norma indotta su H dal prodotto scalare $(,)$. Si suppone inoltre che $H_0^1(\Omega) \subseteq H \subseteq L^2(\Omega)$ (Ω aperto limitato di $\boldsymbol{R}^n$ di frontiera Γ sufficientemente regolare), che $V \subset H$ con immersione completamente continua e che V sia denso in H. Nel seguito, per semplicità, assumeremo $H = L^2(\Omega)$.

Sia inoltre K un insieme chiuso e convesso di V con $0 \in K$.

Sia $A \in \mathscr{L}(V, V')$ un operatore autoaggiunto e tale che

$$\langle Av, v \rangle \geqslant \alpha \|v\|^2 \qquad (\alpha > 0) \qquad \forall v \in V .$$

Indichiamo con $\varphi(\eta)$ una funzione monotona non decrescente (e quindi non necessariamente continua) in un intervallo $[a, b]$ $(-\infty \leqslant a < 0 < b < +\infty)$, tale che

$$\lim_{\eta \to b^-} \varphi(\eta) = +\infty \quad \text{se } b < +\infty , \qquad \lim_{\eta \to a^+} \varphi(\eta) = -\infty \quad \text{se } a > -\infty ,$$

$$\varphi(0^-) \leqslant 0 , \qquad \varphi(0^+) \geqslant 0 ,$$

(*) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica, Facoltà d'Ingegneria del Politecnico, Milano, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 14-II-1977.

e sia

$$\Phi[u'(t)] \in [\varphi(u'(t)^-),\ \varphi(u'(t)^+)]\ (^1)\ .$$

Consideriamo il seguente problema

$$(1.1)\quad \int_0^T \langle u''(t) + Au(t) + \Phi[u'(t)] - f(t),\ v(t) - u'(t)\rangle\, dt \geq 0\ ,$$

$$\forall v(t) \in L^2(0, T;\ V)\ ,\ v(t) \in K \text{ q.o.}\ ,\ \text{con } f(t) \in L^2(0, T;\ V')\ ;$$

$$(1.2)\qquad u(0) = u_0\ ,\qquad u'(0) = u_1\ .$$

Si dirà che $u(t)$ è soluzione del problema (1.1), (1.2), *relativa al convesso K se*

$$(1.3)\quad u(t),\ u'(t) \in L^\infty(0, T;\ V)\ ,\qquad u'(t) \in K \text{ q.o.},\qquad u''(t) \in L^\infty(0, T;\ L^2(\Omega))\ .$$

Vale il seguente teorema di esistenza e unicità per la soluzione definita precedentemente.

Teorema. *Se $u_0 \in V$, $Au_0 \in L^2(\Omega)$, $u_1 \in K$, $f(t)$, $f'(t) \in L^2(0, T;\ L^2(\Omega))$, $\bar{\varphi}(u_1) \in L^2(\Omega)$ $(a < u_1 < b)$ (²) esiste una ed una sola soluzione del problema* (1.1), (1.2).

Nel n. **2** si mostrerà l'esistenza della soluzione del problema (1.1), (1.2) in ipotesi restrittive su $\varphi(\eta)$. Nel n. **3** si tratterà il caso generale e si dimostrerà l'unicità di tale soluzione. Nel n. **4** si considererà il caso in cui $A = -\Delta$, $V = H_0^1(\Omega)$ e si mostrerà come, nelle stesse ipotesi del teorema di esistenza e unicità, si possa ottenere un risultato di regolarità. Infine nel n. **5** si daranno alcune applicazioni del teorema dimostrato precedentemente.

2. – Cominciamo a dimostrare il teorema di esistenza supponendo che $\varphi(\eta)$ sia una funzione continua e limitata in $\boldsymbol{R}^1$ insieme a $\varphi'(\eta)$ con $\varphi'(\eta) \geq 0$.

(¹) Qui e nel seguito si è posto:

$$w(t) = \{w(x, t),\ x \in \Omega\}\ ,\qquad w'(t) = \left\{\frac{\partial w(x, t)}{\partial t}\ ,\ x \in \Omega\right\}\ .$$

(²) Si è posto:
$$\bar{\varphi}(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \eta = 0\ , \\ \varphi(\eta^-) & \text{se } 0 < \eta < b\ , \\ \varphi(\eta^+) & \text{se } a < \eta < 0\ . \end{cases}$$

Consideriamo la disequazione

$$(2.1)\quad \int_0^T \langle u''(t) + Au(t) + \varphi(u'(t)) - f(t), v(t) - u'(t)\rangle \, dt \geq 0 ,$$

$$\forall v(t) \in L^2(0, T; V) , \; v(t) \in K \text{ q.o.} ,$$

con le condizioni (1.2).

Indichiamo con $\beta(u) = J(u - P_k u)$ (3) un operatore di penalizzazione relativo a K e consideriamo l'equazione penalizzata associata alla disequazione (2.1)

$$(2.2)\qquad u''_\varepsilon(t) + Au_\varepsilon(t) + \varphi(u'_\varepsilon(t)) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u'_\varepsilon(t)) = f(t),$$

con le condizioni iniziali: $u_\varepsilon(0) = u_0$, $u'_\varepsilon(0) = u_1$.

Sia $\{g_j\}$ una base dello spazio V; posto $u_{n\varepsilon}(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn\varepsilon}(t) g_j$, consideriamo il sistema approssimato dedotto dalla (2.2)

$$(2.3)\qquad \langle u''_{n\varepsilon}(t) + Au_{n\varepsilon}(t) + \varphi(u'_{n\varepsilon}(t)) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u'_{n\varepsilon}(t)) - f(t), g_j\rangle = 0$$

con $u_{n\varepsilon}(0) = u_{0n\varepsilon}$, $u'_{n\varepsilon}(0) = u_{1n\varepsilon}$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} u_{0n\varepsilon} \underset{V}{=} u_0 , \qquad \lim_{n\to\infty} u_{1n\varepsilon} \underset{V}{=} u_1 , \qquad u_{1n\varepsilon} \in K , \qquad \lim_{n\to\infty} Au_{0n\varepsilon} \underset{L^2(\Omega)}{=} Au_0 .$$

Il sistema (2.3) ha, come ovvio, una ed una sola soluzione in $[0, \tau]$, $\tau \leq T$, soddisfacente le condizioni iniziali.

Per ottenere le maggiorazioni a priori sulle $u_{n\varepsilon}(t)$, moltiplichiamo le (2.3) per $\alpha'_{jn\varepsilon}(t)$ e sommiamo. Si ottiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u'_{n\varepsilon}(t)|^2 + \langle Au_{n\varepsilon}(t), u_{n\varepsilon}(t)\rangle\right) + \langle\varphi(u'_{n\varepsilon}(t)) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u'_{n\varepsilon}(t)), u'_{n\varepsilon}(t)\rangle = \langle f(t), u'_{n\varepsilon}(t)\rangle .$$

Integrando tra 0 e t si ottiene (ricordando la monotonia di φ e di β)

$$|u'_{n\varepsilon}(t)|^2 + \alpha\|u_{n\varepsilon}(t)\|^2 \leq 2\int_0^t |f(t)|\,|u'_{n\varepsilon}(t)|\, dt + |u_1|^2 + |Au_0|\,|u_0| .$$

(3) Si ricorda che con J si indica l'operatore di dualità tra V e V' e con P_k l'operatore di proiezione da V in K.

Da cui segue

$$(2.4)\qquad \begin{cases} |u'_{n\varepsilon}(t)| \leqslant \text{cost}. & \text{(indipendente da } n,\ \varepsilon,\ \varphi) \\ \|u_{n\varepsilon}(t)\| \leqslant \text{cost}. & \text{(indipendente da } n,\ \varepsilon,\ \varphi)\,. \end{cases}$$

Inoltre

$$(2.5)\qquad \int_0^t \langle \beta(u'_{n\varepsilon}(t)),\ u'_{n\varepsilon}(t)\rangle\, dt \leqslant \varepsilon \text{ cost. (indipendente da } n,\ \varepsilon,\ \varphi)\,.$$

Deriviamo ora la (2.3) rispetto a t, moltiplichiamo per $\alpha''_{n\varepsilon}(t)$ e sommiamo. Si ottiene

$$(2.6)\qquad \langle u'''_{n\varepsilon}(t) + Au'_{n\varepsilon}(t) + (\varphi(u'_{n\varepsilon}(t)))' + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u'_{n\varepsilon}(t)))' - f'(t),\ u''_{n\varepsilon}(t)\rangle = 0\,.$$

Osserviamo ora che

$$\langle(\varphi(u'_{n\varepsilon}(t))',\ u''_{n\varepsilon}(t)\rangle = \langle \varphi'(u'_{n\varepsilon}(t))\, u''_{n\varepsilon}(t),\ u''_{n\varepsilon}(t)\rangle \geqslant 0\,, \qquad \langle(\beta(u'_{n\varepsilon}(t)))',\ u''_{n\varepsilon}(t)\rangle \geqslant 0\,,$$

poichè β è lipschitziano essendo V uno spazio di Hilbert.

Dalla (2.6), integrando tra 0 e t, si ottiene

$$(2.7)\quad |u''_{n\varepsilon}(t)|^2 + \alpha\|u'_{n\varepsilon}(t)\|^2 \leqslant 2\int_0^t |f'(t)|\,|u''_{n\varepsilon}(t)|\, dt + |u''_{n\varepsilon}(0)|^2 + \|Au_1\|_*\,\|u_1\|\,.$$

Osserviamo ora che ponendo $t = 0$ nella (2.3) si ottiene

$$u''_{n\varepsilon}(0) + Au_{n\varepsilon}(0) + \varphi(u'_{n\varepsilon}(0)) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u'_{n\varepsilon}(0)) = f(0)\,,$$

da cui (essendo $u'_{n\varepsilon}(0) \in K$)

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} |u''_{n\varepsilon}(0)| &\leqslant |Au_{n\varepsilon}(0)| + |\varphi(u'_{n\varepsilon}(0))| + |f(0)| \\ &\leqslant |Au_0| + |\varphi(u_1)| + M_\varphi |u_1 - u'_{n\varepsilon}(0)|\,. \end{aligned}$$

Infatti (ricordando che $\varphi'(\eta) \leqslant M_\varphi < +\infty$) risulta

$$\int_\Omega [\varphi(u'_{n\varepsilon}(0)) - \varphi(u_1)]^2\, d\Omega \leqslant M_\varphi^2 \int_\Omega [u'_{n\varepsilon}(0) - u_1]^2\, d\Omega\,.$$

Sostituendo la (2.8) nella (2.7) si ha

$$|u''_{n\varepsilon}(t)| \leqslant C_1 + C_2(|\varphi(u_1)| + M_\varphi |u_1 - u'_{n\varepsilon}(0)|)\,, \tag{2.9}$$

(C_1 e C_2 costanti indipendenti da n, ε, φ),

$$\|u'_{n\varepsilon}(t)\| \leqslant \text{cost.} \qquad \text{(indipendente da } n \text{ e da } \varepsilon \text{ ma non da } \varphi)\,. \tag{2.10}$$

Dalla seconda delle (2.4) e dalla (2.10) segue che le funzioni $u_{n\varepsilon}(t)$ sono V-equicontinue. Poichè l'immersione di V in $L^2(\Omega)$ è completamente continua, per il teorema di Ascoli-Arzelà possiamo allora ammettere che sia

$$\lim_{n\to\infty} u_{n\varepsilon}(t) \underset{L^2(\Omega)}{=} u_\varepsilon(t) \qquad \text{uniformemente in } [0, T]\,.$$

Analogamente, dalla (2.10) e (2.9) si può dedurre che

$$\lim_{n\to\infty} u'_{n\varepsilon}(t) \underset{L^2(\Omega)}{=} u'_\varepsilon(t) \qquad \text{uniformemente in } [0, T] \tag{2.11}$$

e quindi, per il teorema di Fischer-Riesz, e per la (2.11) possiamo supporre che risulti

$$\lim_{n\to\infty} u'_{n\varepsilon}(t) = u'_\varepsilon(t) \qquad \text{q.o. in } Q = [0, T]\times\Omega\,. \tag{2.12}$$

Inoltre per le (2.4), (2.9), (2.10) si può concludere che sia

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}{}^{*}\, u'_{n\varepsilon}(t) \underset{L^2(0,T;V)}{=} u'_\varepsilon(t)\,, & \lim\limits_{n\to\infty}{}^{*}\, u''_{n\varepsilon}(t) \underset{L^2(0,T;L^2(\Omega))}{=} u''_\varepsilon(t)\,, \\ \lim\limits_{n\to\infty}{}^{*}\, Au_{n\varepsilon}(t) \underset{L^2(0,T;V')}{=} Au_\varepsilon(t)\,, & \lim\limits_{n\to\infty}{}^{*}\, \beta(u'_{n\varepsilon}(t)) \underset{L^2(0,T;V')}{=} \psi(t)\,. \end{cases} \tag{2.13}$$

Inoltre per la (2.12) e poichè $\varphi(\eta)$ è continua e limitata in $L^2(Q)$, si può ammettere che sia

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*}\, \varphi(u'_{n\varepsilon}(t)) \underset{L^2(0,T;L^2(\Omega))}{=} \varphi(u'_\varepsilon(t))\,. \tag{2.14}$$

Sfruttando la monotonia e l'emicontinuità di β si può affermare che (cfr. **[2]**)

$$\psi(t) = \beta(u'_\varepsilon(t))\,.$$

Possiamo ora passare al limite nella (2.3); è così dimostrata l'esistenza di una soluzione della (2.2).

Osserviamo ora che, poichè le stime a priori ottenute sono indipendenti anche da ε, si può ammettere che sia:

$$(2.15)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0}{}^{*}\, u''_\varepsilon(t) \underset{L^2(Q)}{=} u''(t)\,, & \lim\limits_{\varepsilon\to 0}{}^{*}\, u'_\varepsilon(t) \underset{L^2(0,T;V)}{=} u'(t)\,, \quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0}{}^{*}\, Au_\varepsilon(t) \underset{L^2(0,T;V')}{=} Au(t)\,, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} u'_\varepsilon(t) = u'(t) & \text{q.o. in } Q\,, \quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0}{}^{*}\, \varphi(u'_\varepsilon(t)) \underset{L^2(Q)}{=} \varphi(u'(t))\,. \end{cases}$$

Occorre ora far vedere che $u'(t)\in K$. A tale scopo si osserva che dalla (2.2) si ha

$$\beta(u'_\varepsilon(t)) = \varepsilon\{f(t) - u''_\varepsilon(t) - Au_\varepsilon(t) - \varphi(u'_\varepsilon(t))\} \underset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} 0 \qquad \text{in } L^2(0, T;\, V')\,.$$

Di conseguenza, per la monotonia di β e la (2.5), risulta (cfr. [2]): $\beta(u'(t)) = 0 \Rightarrow u'(t)\in K$ q.o.

Rimane da mostrare che $u(t)$ soddisfa la (2.1).

Moltiplichiamo la (2.2) per $v(t) - u'_\varepsilon(t)$ $\big(v(t)\in L^2(0, T;\, V),\ v(t)\in K$ q.o.$\big)$. Tenendo conto che

$$\langle \beta(u'_\varepsilon(t)),\, v(t) - u'_\varepsilon(t)\rangle = \langle \beta(u'_\varepsilon(t)) - \beta(v(t)),\, v(t) - u'_\varepsilon(t)\rangle \leqslant 0\,,$$

si ottiene, integrando tra 0 e T,

$$\int_0^T \langle u''_\varepsilon(t) + Au_\varepsilon(t) + \varphi(u'_\varepsilon(t)) - f(t),\, v(t) - u'_\varepsilon(t)\rangle\, dt \geqslant 0\,,$$

da cui

$$(2.16)\qquad \int_0^T \langle u''_\varepsilon(t) + Au_\varepsilon(t) + \varphi(u'_\varepsilon(t)),\, v(t)\rangle\, dt - \int_0^T \langle f(t),\, v(t) - u'_\varepsilon(t)\rangle\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\,|u'_\varepsilon(T)|^2 + \frac{1}{2}\,\langle Au_\varepsilon(T),\, u_\varepsilon(T)\rangle - \frac{1}{2}\,|u_1|^2 - \frac{1}{2}\,\langle Au_0,\, u_0\rangle + \int_0^T \langle \varphi(u'_\varepsilon(t)),\, u'_\varepsilon(t)\rangle\, dt\,.$$

Osserviamo che

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \Big(\frac{1}{2}\,|u'_\varepsilon(T)|^2 + \frac{1}{2}\,\langle Au_\varepsilon(T),\, u_\varepsilon(T)\rangle - \frac{1}{2}\,|u_1|^2 - \frac{1}{2}\,\langle Au_0,\, u_0\rangle +$$

$$+ \int_0^T \langle \varphi(u'_\varepsilon(t)),\, u'_\varepsilon(t)\rangle\, dt\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\,|u'(T)|^2 + \frac{1}{2}\,\langle Au(T),\, u(T)\rangle - \frac{1}{2}\,|u_1|^2 - \frac{1}{2}\,\langle Au_0,\, u_0\rangle + \int_0^T \langle \varphi(u'(t)),\, u'(t)\rangle\, dt$$

e dunque dalla (2.16) segue che

$$\int_0^T \langle u''(t) + Au(t) + \varphi(u'(t)), v(t)\rangle \, dt - \int_0^T \langle f(t), v(t) - u'(t)\rangle \, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^T \langle u''(t) + Au(t) + \varphi(u'(t)), u'(t)\rangle \, dt ,$$

cioè la (2.1). Poichè $u(t)$ soddisfa ovviamente le (1.2), (1.3), il problema (2.1), (1.2) ha una soluzione.

3. – In questo paragrafo mostreremo come, sfruttando i risultati ottenuti nei paragrafi precedenti, si possa dimostrare l'esistenza della soluzione del problema (1.1), (1.2) considerato al n. **1**. Dimostreremo inoltre l'unicità di tale soluzione.

Per quanto riguarda l'esistenza, ci limiteremo a dare una traccia della dimostrazione in quanto essa si ottiene modificando opportunamente il procedimento usato da Amerio e Prouse in un loro lavoro (cfr. [**1**]).

Si costruisce innanzitutto un'opportuna successione $\{\varphi_n(\eta)\}$ di funzioni non decrescenti, continue e limitate insieme alle loro derivate e si considera il problema

$$\int_0^T \langle u_n''(t) + Au_n(t) + \varphi_n(u_n'(t)) - f(t), v(t) - u_n'(t)\rangle \, dt \geqslant 0 \tag{3.1}$$

$$\forall v(t) \in L^2(0, T; V) , \quad v(t) \in K \text{ q.o.} ,$$

$$u_n(0) = u_0 , \qquad u_n'(0) = u_1 . \tag{3.2}$$

La soluzione del problema (3.1), (3.2) esiste per quanto dimostrato al n. **2**.

Sfruttando le maggiorazioni [4] (2.4), (2.9), (2.10) si dimostra infine che la successione $\{u_n(t)\}$ converge alla soluzione del problema (1.1), (1.2).

Dimostriamo ora l'unicità. Siano $u_1(t)$ e $u_2(t)$ due eventuali soluzioni del problema (1.1), (1.2). Risulta

$$\int_0^T \langle u_i''(t) + Au_i(t) + \Phi[u_i'(t)] - f(t), v(t) - u_i'(t)\rangle \, dt \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2) . \tag{3.3}$$

---

[4] Si osservi che la successione $\{\varphi_n(\eta)\}$ è costruita in modo tale che risulti

$$|\varphi_n(u_1)| \leqslant |\bar{\varphi}(u_1)| .$$

Questo implica che le maggiorazioni (2,9), (2.10) non dipendono da $\varphi_n(\eta)$.

Poniamo

$$v(t) = u_2'(t) \qquad \text{per } 0 \leqslant t \leqslant s\,, \qquad v(t) = 0 \qquad \text{per } s < t \leqslant T\,,$$

$$v(t) = u_1'(t) \qquad \text{per } 0 \leqslant t \leqslant s\,, \qquad v(t) = 0 \qquad \text{per } s < t \leqslant T\,,$$

rispettivamente nella prima e nella seconda delle (3.3) e $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$. Si ottiene

$$0 \leqslant \int_0^s \langle w''(t) + Aw(t) + \Phi[u_1'(t)] - \Phi[u_2'(t)], -w'(t)\rangle\, dt$$

$$\leqslant \int_0^s \left\{ -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(|w'(t)|^2 + \langle Aw(t), w(t)\rangle\big) - \langle \Phi[u_1'(t)] - \Phi[u_2'(t)], u_1'(t) - u_2'(t)\rangle \right\} dt$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}|w'(s)|^2 - \frac{1}{2}\langle Aw(s), w(s)\rangle - \int_0^s \langle \Phi[u_1'(t)] - \Phi[u_2'(t)], u_1'(t) - u_2'(t)\rangle\, dt\,.$$

Da cui segue: $|w'(s)|^2 + \langle Aw(s), w(s)\rangle \leqslant 0$, $\forall s \in [0, T]$ e quindi $w \equiv 0$.

Il teorema di esistenza e unicità è così completamente dimostrato.

4. – Consideriamo ora un esempio per cui valgono i risultati enunciati nel paragrafi precedenti. Precisamente poniamo (con le notazioni del n. **1**)

$$V = H_0^1(\Omega)\,, \qquad A = -\Delta\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)\,.$$

Osserviamo che il problema (1.1), (1.2) traduce, in questo caso, il moto trasversale di una membrana vibrante fissata al bordo, sottoposta all'azione di una forza esterna e di una resistenza funzione crescente della velocità, soggetta inoltre ad un vincolo. È ovvio che il tipo di vincolo dipenderà dalla definizione del convesso K. Ad esempio se

$$K = \{v(x)\,|\, v \in H_0^1(\Omega),\ |v(x)| \leqslant M \text{ q.o. in } \Omega\}$$

si impone alla velocità della membrana di non superare un valore prefissato M.

Come è ovvio, sono soddisfatte, per questo esempio, tutte le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità. Esiste perciò una e una sola $u(t)$ tale che

$$\text{(4.1)} \qquad \int_0^T \langle u''(t) - \Delta u(t) + \Phi[u'(t)] - f(t), v(t) - u'(t)\rangle\, dt \geqslant 0$$

$$\forall v(t) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))\,,\ v(t) \in K \text{ q.o.}\,,$$

$$u(0) = u_0\,, \qquad u'(0) = u_1\,, \tag{4.2}$$

$$u(t),\ u'(t) \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))\,,\ u'(t) \in K \text{ q.o.}\,, \qquad u''(t) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))\,. \tag{4.3}$$

Dimostriamo ora che le stesse ipotesi garantiscono in questo caso una maggiore regolarità per la soluzione. Precisamente risulta

$$\Delta u(t) \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))\,. \tag{4.4}$$

Per ottenere la (4.4) seguiamo il procedimento usato al n. **2**. Consideriamo pertanto dapprima il caso in cui la funzione $\varphi(\eta)$ sia continua e limitata in $\boldsymbol{R}^1$ insieme alla sua derivata $\varphi'(\eta)$ con $\varphi'(\eta) \geqslant 0$.

Scelta come base di $H_0^1(\Omega)$ la successione $\{g_j\}$ delle autofunzioni dell'operatore Δ e indicati con λ_j i corrispondenti autovalori, moltiplichiamo la (2.3) (ove ad A si sostituisce $-\Delta$) per $-\lambda_j \alpha'_{jn\varepsilon}(t)$. Sommando e integrando tra 0 e t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ si ottiene

$$\begin{aligned} &\|u'_{n\varepsilon}(t)\|^2 + |\Delta u_{n\varepsilon}(t)|^2 - \|u'_{n\varepsilon}(0)\|^2 - |\Delta u_{n\varepsilon}(0)|^2 - \\ &\quad - 2 \int_0^t \Big(\varphi(u'_{n\varepsilon}(t)) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u'_{n\varepsilon}(t)), \Delta u'_{n\varepsilon}(t)\Big)\, dt = -2 \int_0^t (f(t), \Delta u'_{n\varepsilon}(t))\, dt\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Si osservi ora che

$$-\big(\beta(u'_{n\varepsilon}(t)), \Delta u'_{n\varepsilon}(t)\big) = \sum_{i=1}^n \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\beta(u'_{n\varepsilon}(t)), \frac{\partial}{\partial x_i} u'_{n\varepsilon}(t)\Big\rangle \geqslant 0 \tag{4.6}$$

per la monotonia di β e poichè β soddisfa ad una condizione di Lipschitz. Inoltre (osservando che se $v \in H_0^1(\Omega)$ allora $\varphi(v) \in H_0^1(\Omega)$)

$$\begin{aligned} -\big(\varphi(u'_{n\varepsilon}(t)), \Delta u'_{n\varepsilon}(t)\big) &= -\int_\Omega \varphi(u'_{n\varepsilon}(t)) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u'_{n\varepsilon}(t)}{\partial x_i^2}\, d\Omega \\ &= \int_\Omega \varphi'(u'_{n\varepsilon}(t)) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u'_{n\varepsilon}(t)}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega \geqslant 0\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dalla (4.5), tenendo conto delle (4.6) e (4.7), si deduce allora che

$$\begin{cases} \|u'_{n\varepsilon}(t)\| \leqslant \text{cost.} & \text{(indipendente da } n, \varepsilon, \varphi)\,, \\ |\Delta u_{n\varepsilon}(t)| \leqslant \text{cost.} & \text{(indipendente da } n, \varepsilon, \varphi)\,. \end{cases} \tag{4.8}$$

Ripetendo i ragionamenti fatti nei nn. **2**, **3**, la seconda delle (4.8) permette di concludere che la soluzione del problema (4.1), (4.2), (4.3) soddisfa anche la (4.4).

5. – Diamo ora due altre applicazioni del teorema di esistenza e unicità.

Esempio 1. Poniamo

$$V = H_0^1(\Omega)\,, \qquad A = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + a_0(x),$$

con

$$a_{ij},\, a_0 \in L^\infty(\Omega)\,, \qquad a_{ij} = a_{ji}\,,\ a_0 \geqslant 0\,,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant c\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \qquad \forall(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n \ (c > 0)\,.$$

Anche in questo caso esiste ovviamente una ed una sola soluzione del problema (1.1), (1.2); non è però in generale possibile regolarizzare ulteriormente la soluzione. Solo per particolari scelte del convesso K e del relativo operatore di penalizzazione si può ottenere che $Au(t) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Ad esempio (cfr. [**3**]) una scelta possibile è la seguente

$$K \equiv \{v(x)\,|\, v \in H_0^1(\Omega),\ |v(x)| \leqslant M \text{ q.o. in } \Omega\}\,,$$

$$\beta(v) = v - P_K v = (v - M)^+ + (v + M)^-\,.$$

Osserviamo inoltre che, nel caso in cui $K = H_0^1(\Omega)$, il problema quì considerato si riduce a quello trattato in [**1**].

Esempio 2. Poniamo

$$V = H_0^2(\Omega)\,, \qquad H = H_0^1(\Omega)\,, \qquad A = -\Delta^2\,.$$

Anche in tale caso si può applicare il teorema enunciato al n. **1** (ovviamente identificando H_0^1 con il suo duale) e asserire che il problema (1.1), (1.2) ammette una ed una sola soluzione. Tale problema, come è noto, traduce matematicamente lo studio del moto trasversale di una verga fissata agli estremi, vibrante sotto l'azione di una forza esterna e di una resistenza e sottoposta ad un vincolo dipendente dal convesso K.

References.

[1] L. AMERIO and G. PROUSE, *On the non linear wave equation with dissipative term discontinuous with respect to the velocity*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **44** (1968), 491-496.

[2] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier-Villars, Paris 1969.

[3] F. ROLANDI e A. ZARETTI, *Un principio di massimo per la soluzione di una equazione ellittica omogenea non lineare* (in corso di stampa su Rend. Acc. Naz. Lincei).

Summary.

We prove an existence and uniqueness theorem of a solution $u(t)$ for an evolution inequality with a dissipative term $\varphi(u'(t))$ where $\varphi(\eta)$ is a monotone non-decreasing function. Some examples are given and a regularity result is obtained in a special case.

* * *