Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 159-167

LORIS MOLINARI (*)

Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi che ammettono una corrispondenza K-linearizzante quadratica involutoria. (**)

1. – In questa Nota si studia il problema consistente nel determinare se esistono trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi ordinari per le quali esista un'omografia K tangente in una coppia regolare (A, B) tale che la corrispondenza K-linearizzante sia una corrispondenza quadratica involutoria Q.

Si fa vedere che il problema ha soluzione sia quando Q è un'inversione (quadratica) Q_1 (n. **3**), sia quando Q è la corrispondenza Q_2 (che si suppone non degenere) delle rette coniugate rispetto a un fascio di coni quadrici e ciò nel caso in cui la Q_2 sia di 1ª specie (n. **4**), oppure di 2ª specie (n. **5**). Si determina pure la configurazione caratteristica in (A, B) di tutte le trasformazioni considerate e di quelle per cui la Q_2 è di 3ª specie (n. **6**).

Si studiano inoltre (nn. **7-9**) quelle trasformazioni puntuali $\overline{\overline{T}}$ (fra due spazi proiettivi ordinari) per le quali esiste, in ogni coppia regolare, un'omografia tangente K tale che la corrispondenza K-linearizzante sia una Q_2 (non degenere) di 3ª specie.

2. – Sia T una trasformazione puntuale fra due spazi proiettivi ordinari S, $\overline{S}$ e sia (A, B) una coppia regolare di punti corrispondenti che assumiamo come origini dei riferimenti proiettivi in S, $\overline{S}$.

È noto che esistono ∞^3 omografie tangenti alla T in (A, B): supponendo che i riferimenti proiettivi in S, $\overline{S}$ si corrispondano in una qualunque di tali

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria, Università, P.za di Porta S. Donato 5, 40127 Bologna, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 17-I-1977.

omografie ne viene che la T si può rappresentare mediante le equazioni

$$(1)\quad \overline{x}_i = x_i + \varphi_i(x_1, x_2, x_3) + [3]\,, \qquad [\varphi_i(x_1, x_2, x_3) = \sum_{h,k=1}^{3} a^i_{hk} x_h x_k\,,\ i = 1, 2, 3]\,.$$

Le equazioni delle ∞^3 omografie tangenti alla T in (A, B) risultano

$$(2)\quad \overline{x}_i = \frac{x_i}{1 - \sum_{j=1}^{3} \lambda_j x_j} \qquad (\lambda_j = \text{parametri})\,.$$

Le rette caratteristiche della (1) per A sono le generatrici base della rete di coni cubici di equazione

$$(3)\quad \sum_{h,k=1}^{3} \mu_{hk}[x_h \varphi_k(x_1, x_2, x_3) - x_k \varphi_h(x_1, x_2, x_3)] = 0 \qquad (\mu_{hk} = \text{parametri})\,.$$

Ad ogni omografia tangente K definita dalle (2) e alla T si può associare la corrispondenza K-linearizzante [**1**], della stella di rette di centro A in sè che associa alla retta $x_1/l_1 = x_2/l_2 = x_3/l_3$ la retta $x_1/l'_1 = x_2/l'_2 = x_3/l'_3$ dove

$$(4)\quad l'_i = \varphi_i(l_1, l_2, l_3) - l_i \sum_{h=1}^{3} \lambda_h l_h \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$

3. – È ben noto che esistono due tipi proiettivamente distinti di trasformazioni quadratiche involutorie fra due stelle di rette sovrapposte Σ_1, Σ_2: l'inversione quadratica, che indicheremo con Q_1, e la corrispondenza delle rette coniugate rispetto a un fascio di coni quadrici, che indicheremo con Q_2. Consideriamo dapprima una Q_1: è ben noto che le rette fondamentali r_1, r_2, r_3 in Σ_1 e le rette fondamentali r'_1, r'_2, r'_3 in Σ_2 sono tali che, ad es., si ha: $r_1 \equiv r'_2$, $r_2 \equiv r'_1$, $r_3 \equiv r'_3$. Vi è allora un cono quadrico di rette unite passante per r_1 ed r_2; inoltre tutti i piani del fascio di asse r_3 sono uniti. Da tutto ciò segue immediatamente che se, e solo se, esiste un'omografia K tangente alla T in (A, B) tale che la corrispondenza K-linearizzante sia una Q_1, la configurazione caratteristica della T in (A, B) è formata da un cono quadrico ed eventualmente da un'ulteriore retta caratteristica. Ora è noto [**1**] che ciò accade se, e solo se, una retta per A è totalmente K-linearizzante. Si può allora dire che:

Le trasformazioni fra due spazi proiettivi ordinari per le quali esiste una omografia K tangente nella coppia regolare (A, B) e tale che la corrispondenza K-linearizzante sia un'inversione quadratica Q_1 sono tutte e sole quelle che ammet-

tono una retta totalmente K-linearizzante uscente da A. L'omografia tangente suddetta è unica.

Ricordiamo che le trasformazioni che ammettono, in ogni coppia regolare, una retta totalmente K-linearizzante sono state studiate e determinate tutte in [**1**], [**5**]$_{1,2}$.

4. – Consideriamo ora una trasformazione Q_2 non degenere. Dimostriamo che

Le trasformazioni fra due spazi proiettivi ordinari per le quali esiste almeno un'omografia K_1 tangente nella coppia regolare (A, B) e tale che la corrispondenza K_1-linearizzante sia una Q_2 di 1ª specie sono tutte e sole quelle a configurazione caratteristica armonica.

Consideriamo una trasformazione Q_2 di 1ª specie fra le due stelle proiettive sovrapposte $\Sigma_1(l_1, l_2, l_3)$, $\Sigma_2(l'_1, l'_2, l'_3)$: essa si può sempre rappresentare mediante le equazioni

$$l'_1 = k_1 l_1(-l_1 + l_2 + l_3)\,,\ l'_2 = k_1 l_2(l_1 - l_2 + l_3)\,,\ l'_3 = k_1 l_3(l_1 + l_2 - l_3)(k_1 \neq 0). \tag{5}$$

Ora le (4) si possono scrivere nella forma (5) se e solo se risulta

$$a^1_{22} = a^1_{23} = a^1_{33} = a^2_{11} = a^2_{13} = a^2_{33} = a^3_{11} = a^3_{12} = a^3_{22} = 0\,, \tag{6}$$

$$a^1_{12} = a^3_{23}\,, \quad a^1_{13} = a^2_{23}\,, \quad a^2_{12} = a^3_{23}\,, \tag{7}$$

$$a^2_{22} = a^1_{11} + 2a^1_{12} - 2a^2_{12}\,, \quad a^3_{33} = a^1_{11} + 2a^1_{13} - 2a^2_{12}\,, \tag{8}$$

$$\lambda_1 = 2a^2_{12} - k_1\,, \quad \lambda_2 = 2a^1_{12} - k_1\,, \quad \lambda_3 = 2a^1_{13} - k_1\,. \tag{9}$$

Ma le (6), (7) e (8) sono caratteristiche perchè si abbia una configurazione armonica in (A, B) [**3**]$_1$, mentre le (9) definiscono ∞^1 omografie come la K_1. L'asserto è così dimostrato.

Per le trasformazioni che, in ogni coppia regolare, presentano tale configurazione si veda [**3**]$_1$ e [**4**]$_1$: in tali lavori ne sono stati determinati alcuni tipi.

5. – Dimostriamo ora che

Le trasformazioni fra due spazi proiettivi ordinari per le quali nella coppia regolare (A, B) esiste almeno un'omografia K_2 tangente tale che la corrispondenza K_2-linearizzante sia una Q_2 di 2ª specie sono tutte e sole quelle che hanno la seguente configurazione caratteristica in (A, B): una retta g, generatrice base doppia della rete dei coni cubici che ha come generatrici base le rette caratteristiche in (A, B), e tre rette caratteristiche semplici di cui due quasi-ipercaratteristiche.

Consideriamo una Q_2 di 2^a specie fra le stelle proiettive sovrapposte Σ_1 e Σ_2: essa si può sempre rappresentare mediante le equazioni

$$l_1' = k_2(-l_1^2 + l_1 l_2)\,, \qquad l_2' = k_2(l_1 l_2 - l_2^2)\,, \qquad l_3' = k_2(l_1 l_3 + l_2 l_3) \qquad (k_2 \neq 0)\,. \tag{10}$$

Ora le (4) si possono scrivere nella forma (10) se e solo se risulta

$$a_{23}^1 = a_{33}^1 = a_{13}^2 = a_{33}^2 = 0\,, \qquad a_{33}^3 = 2a_{13}^1 = 2a_{23}^2\,, \tag{11}$$

$$a_{22}^1 = a_{22}^3 = a_{12}^3 = 0\,, \qquad a_{12}^1 = a_{23}^3\,, \tag{12}$$

$$a_{11}^3 = a_{11}^2 = 0\,, \qquad a_{12}^2 = a_{13}^3\,, \tag{13}$$

$$a_{11}^1 = -2a_{12}^1 + 2a_{12}^2 + a_{22}^2\,, \tag{14}$$

$$\lambda_1 = 2a_{12}^2 - k_2\,, \qquad \lambda_2 = 2a_{12}^1 - k_2\,, \qquad \lambda_3 = 2a_{13}^1\,. \tag{15}$$

Le relazioni (11), (12), (13) e (14) sono caratteristiche per la configurazione caratteristica detta nell'asserto. Infatti, per le (11) si ha che la retta $x_1 = x_2 = 0$ è generatrice base doppia della rete (3); per le (12) e per la $a_{23}^1 = 0$ (compresa nella (11)) si ha che la retta $x_1 = x_3 = 0$ è quasi-ipercaratteristica; dalle (13), insieme con le $a_{12}^3 = a_{13}^2 = 0$ (comprese nelle (11) e (12)), segue che anche la retta $x_2 = x_3 = 0$ è quasi-ipercaratteristica e infine dalla (14) segue, ove si tenga conto di relazioni precedenti, che la retta $x_1 - x_2 = x_3 = 0$ è caratteristica. Inoltre le (15) definiscono ∞^1 omografie come la K_2. L'asserto è così dimostrato.

Le trasformazioni che, in ogni coppia regolare, hanno una tale configurazione caratteristica sono state studiate in $[4]_2$ e $[4]_3$: in tali lavori ne sono stati determinati alcuni tipi.

6. – Si ha: *Le trasformazioni fra due spazi proiettivi ordinari per le quali esiste almeno un'omografia K_3 tangente nella coppia regolare (A, B) e tale che la corrispondenza K_3-linearizzante sia una Q_2 di 3^a specie sono tutte e sole quelle che hanno in (A, B) la seguente configurazione caratteristica: una retta quasi-ipercaratteristica semplice e una seconda retta caratteristica p sestupla in quanto tutti i coni della rete avente come generatrici base le rette caratteristiche in (A, B) hanno una generatrice cuspidale coincidente con la p.*

Infatti una corrispondenza Q_2 di 3^a specie fra le stelle Σ_1 e Σ_2 si può sempre rappresentare mediante le equazioni

$$l_1' = k_3 l_1 l_2\,, \qquad l_2' = -k_3 l_2^2\,, \qquad l_3' = k_3(2ml_1^2 + l_2 l_3) \qquad (m \neq 0\,,\ k_3 \neq 0)\,. \tag{16}$$

Ora le (4) si possono scrivere nella forma (16) se e solo risulta

$$a^1_{22} = a^1_{23} = a^1_{33} = a^2_{11} = a^2_{13} = a^2_{33} = a^3_{12} = a^3_{22} = 0\,, \tag{17}$$

$$a^1_{11} = 2a^2_{12} = 2a^3_{13}\,,\ 2a^1_{12} = -\,a^2_{22} = 2a^3_{23}\,,\ 2a^1_{13} = 2a^2_{23} = a^3_{33}\,,\ a^3_{11} = 2mk_3\,, \tag{18}$$

$$\lambda_1 = 2a^2_{12}\,,\ \lambda_2 = 2a^1_{12} - k_3\,,\ \lambda_3 = a^3_{33}\,. \tag{19}$$

Ma le (17) e (18) sono caratteristiche della configurazione caratteristica detta nell'asserto mentre le (19) definiscono ∞^1 omografie come la K_3. L'asserto è così dimostrato.

7. – Sia T una trasformazione puntuale fra due spazi proiettivi ordinari S, $\bar{S}$. Asscciamo a ciascun punto di una coppia regolare (A, B) un tetraedro di riferimento i cui vertici indicheremo con A_i, B_i $(i=0,1,2,3;\ A_0 \equiv A,\ B_0 \equiv B)$. Si hanno per la T le equazioni fondamentali

$$\mathrm{d}A_i = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} A_k\,, \qquad \mathrm{d}B_1 = \sum_{k=1}^{3} \tau_{ik} B_k \qquad (i = 0,\,1,\,2,\,3)\,, \tag{20}$$

essendo le ω_{ik}, τ_{ik} $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ forme di Pfaff in tre parametri principali e in 26 parametri secondari.

Poniamo, al solito, $\omega_{0i} = \omega_i$ e osserviamo che gli elementi di ciascuna terna ω_1, ω_2, ω_3, si possono considerare come le coordinate omogenee di una retta della stella di centro A (o B).

Per differenziazione esterna si deducono le equazioni di struttura

$$[\mathrm{d}\omega_{ik}] = \sum_{j=0}^{3} [\omega_{ij}\,\omega_{jk}]\,, \qquad [\mathrm{d}\tau_{ik}] = \sum_{j=0}^{3} [\tau_{ij}\,\tau_{jk}]\,.$$

Se le rette AA_i, BB_i si corrispondono in una qualunque omografia tangente alla T in (A, B) si hanno le relazioni

$$\tau_i = \omega_i \qquad (i = 1,\,2,\,3)\,. \tag{21}$$

Differenziando esternamente le (21) si perviene, per un ben noto lemma di E. Cartan, a tre forme quadratiche

$$\Omega_i = 2 \sum_{r,s=1}^{3} a^i_{rs}\,\omega_r\,\omega_s \qquad (a^i_{rs} = a^i_{sr};\ i = 1,\,2,\,3)\,,$$

tali che

$$\tau_{ik} - \omega_{ik} - \delta^i_k(\tau_{00} - \omega_{00}) = \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_i}{\partial \omega_k} \qquad (i, k = 1, 2, 3)\,, \tag{22}$$

dove δ^i_k è il simbolo di Kronecker.

Gli sviluppi locali della T risultano

$$\bar{x}_i = x_i + \sum_{h,k=1}^{3} a^i_{hk} x_h x_k + [3]\,. \tag{23}$$

8. – Consideriamo ora una trasformazione $\bar{T}$ cioè (cfr. n. **1**) una trasformazione puntuale per la quale esiste, in ogni coppia regolare, un'omografia tangente K tale che la corrispondenza K-linearizzante sia una Q_2 (non degenere) di 3ª specie. Si vede dalle (19) che si possono scegliere i riferimenti in modo che sia $a^1_{12} = a^2_{12} = a^3_{33} = 0$ e che le (23) si scrivono

$$\bar{x}_1 = x_1 + [3]\,, \ \bar{x}_2 = x_2 + c_1 x_2^2 + [3]\,, \ \bar{x}_3 = x_3 + c_2 x_1^2 + [3] \qquad (c_1 \neq 0\,,\ c_2 \neq 0)\,.$$

Indichiamo ora, al solito, con δ un simbolo di differenziazione rispetto ai soli parametri secondari e poniamo $e_{ik} = \omega_{ik}(\delta)$, $t_{ik} = \tau_{ik}(\delta)$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$. Dalle (21) e (22) si deduce

$$e_h = t_h = 0 \ \ (h = 1, 2, 3),\ e_{12} = e_{21} = e_{31} = e_{32} = 0,\ t_{10} - e_{10} = t_{20} - e_{20} = t_{30} - e_{30} = 0,$$

$$\delta c_1 = c_1(e_{22} - e_{00})\,, \qquad \delta c_2 = c_2(2e_{11} - e_{00} - e_{33})\,.$$

Dalle precedenti relazioni si vede che si può porre $c_1 = c_2 = 1$. Allora le (22) diventano

$$\left\{\begin{aligned} &\tau_{10} - \omega_{10} = \tfrac{1}{3}(f + h)\omega_1 + q\omega_3\,, \qquad \tau_{20} - \omega_{20} = \alpha\omega_2\,,\ \tau_{30} - \omega_{30} = q\omega_1\,,\\ &\omega_{12} \quad = -\tfrac{1}{3}(3\gamma + f + h)\omega_1 + \beta\omega_2 - q\omega_3\,,\\ &\omega_{21} \quad = -\alpha\omega_1 - b\omega_2\,, \qquad \omega_{23} = b\omega_1 - a\omega_2 - \alpha\omega_3\,,\\ &\omega_{31} \quad = \tfrac{1}{3}(2f - h)\omega_1 + q\omega_3\,, \qquad \omega_{32} = -q\omega_1 + \gamma\omega_2\,,\\ &\omega_{22} - \omega_{00} = \beta\omega_1 + (p - 2\alpha)\omega_2 + \gamma\omega_3\,,\ 2\omega_{11} - \omega_{33} - \omega_{00} = g\omega_1 - \alpha\omega_2 + f\omega_3. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Dalla terza delle (24) segue che la retta $\omega_1 = \omega_2 = 0$ è ipercaratteristica (cfr. [**3**]$_2$), mentre dalla settima e ottava delle (24) segue che le curve $\omega_1 = = \omega_2 = 0$ sono rette se e solo se è $q = 0$.

Si ha poi

$$[d\omega_1] \wedge \omega_1 = 0\,, \qquad [d\omega_2] = 0\,,$$

cioè *i piani caratteristici* $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ *inviluppano sempre superficie caratteristiche.*

9. – Differenziando esternamente la seconda delle (24) si ottiene $\delta\alpha = -\,e_{20}$ e quindi si può far sì che sia

$$\alpha = 0\,. \tag{25}$$

Differenziando poi esternamente la quarta e la ottava delle (24) e tenendo conto della (25) si ottiene

$$\delta\beta = \beta(e_{11} - e_{00}) + e_{10}\,, \qquad \delta\gamma = 2\gamma(e_{11} - e_{00}) + e_{30}\,,$$

e quindi si può far sì che sia

$$\beta = \gamma = 0\,. \tag{26}$$

Si ha così

$$e_{10} = e_{20} = e_{30} = 0\,. \tag{27}$$

La differenziazione completa delle (24), rispetto ai soli parametri secondari, ove si tenga conto delle (25), (26) e (27), conduce alle relazioni

$$\delta q = 3q(e_{11} - e_{00})\,, \qquad \delta a = -\,2a(e_{11} - e_{00})\,, \qquad \delta b = -\,b(e_{11} - e_{00})\,,$$

$$\delta f = 2f(e_{11} - e_{00}) + 3qe_{13}\,, \qquad \delta g = g(e_{11} - e_{00}) + (3f - h)\,e_{13}\,,$$

$$\delta h = 2h(e_{11} - e_{00}) + 3qe_{13}\,, \qquad \delta p = 0\,.$$

Osserviamo che l'invariante relativo b ha un significato geometrico molto semplice. Infatti le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la retta quasi-ipercaratteristica $\omega_1 = \omega_3 = 0$ sia inflessionale di 2ª specie almeno sono (cfr. [**4**]$_2$)

$$(a^2_{22} - 2a^1_{12})\,\alpha_{21} - 2a^1_{23}\,\alpha_{23} = 0\,, \qquad (a^2_{22} - 2a^3_{23})\,\alpha_{23} - 2a^3_{12}\,\alpha_{21} = 0\,, \tag{28}$$

dove si sono indicati con α_{21} e α_{23} i coefficienti di ω_2 rispettivamente in ω_{21} e ω_{23}. Ora, nel nostro caso, le (28) si riducono all'unica condizione $b = 0$.

Si vede subito dalla quinta e sesta delle (24) che le condizioni $a = b = 0$ sono necessarie e sufficienti affinchè le curve caratteristiche semplici ($\omega_1 = \omega_3 = 0$) siano rette.

Si vede pure subito che se le suddette curve sono rette appartengono necessariamente a una stella (in entrambi gli spazi S, $\bar{S}$) e che le condizioni $q = 0$, $h = 2f$ sono necessarie e sufficienti affinchè le curve ipercaratteristiche siano rette di una stella in S (e in $\bar{S}$).

Si ha poi che le forme quadratiche delle asintotiche delle superficie caratteristiche $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ sono rispettivamente

$$\varphi_1 = -b\omega_2^2 + q\omega_3^2\,, \qquad \varphi_2 = \omega_1[-\tfrac{1}{3}(f+h)\,\omega_1 - 2q\omega_3]\,.$$

Segue allora che le superficie caratteristiche $\omega_1 = 0$ sono rigate, necessariamente sviluppabili, se e solo se le curve ipercaratteristiche o quelle caratteristiche semplici sono rette. Inoltre le superficie caratteristiche $\omega_2 = 0$ sono rigate sviluppabili se e solo se le curve ipercaratteristiche sono rette (e allora tali rette sono le generatrici di quelle rigate).

Bibliografia.

[1] E. Čech, *Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces*, (I), (II), (III), Časopis Pěst Mat. a Fys. **74-75** (1950), 32-48, 123-136, 137-157.

[2] L. Molinari: [•]$_1$ *Sulla corrispondenza K-linearizzante di una trasformazione puntuale fra due spazi proiettivi ordinari*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **9** (1974), 721-729; [•]$_2$ *Una classificazione di un tipo di trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi*, Atti Accad. Sci. Ist. Bologna (13) **2** (1975), 156-185.

[3] L. Muracchini: [•]$_1$ *Trasformazioni puntuali fra due spazi a configurazione caratteristica armonica*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **8** (1953), 144-152; [•]$_2$ *Le trasformazioni puntuali che posseggono rette ipercaratteristiche*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **11** (1956), 182-188.

[4] R. Musti: [•]$_1$ *Sulle trasformazioni puntuali tra spazi proiettivi ordinari a configurazione caratteristica armonica*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **2** (1969), 36-51; [•]$_2$ *Sulle trasformazioni puntuali tra spazi che posseggono in ogni coppia tre direzioni quasi-ipercaratteristiche non complanari*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **2** (1969), 52-64; [•]$_3$ *Trasformazioni tra spazi che ammettono in ogni coppia una direzione ipercaratteristica e due ipercaratteristiche in senso debole*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **2** (1969), 243-253.

[5] G. Vaona: [•]$_1$ *Le trasformazioni fra due spazi che posseggono iperpiani di rette caratteristiche*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **12** (1952-53), 195-238; [•]$_2$ *Deformazione proiettiva di uno strato di superficie dello spazio ordinario*, Atti Sem. Mat. Fis. Modena **7** (1954), 28-67.

Summary.

Let T a point-transformation between two projective spaces of 3 dimension and let (A, B) a regular pair of corresponding points. In this paper we determine the configuration of characteristic lines of point-transformations T for which there is, at (A, B), a tangential projectivity K such that K-linearizing correspondence is an involutary quadratic transformation.

We also study those point-transformations $\overline{T}$ for which there is, at every regular pair of corresponding points, a tangential projectivity K such that K-linearizing correspondence is an involutory quadratic transformation of third species.

* * *